ҚАРАҒАНДЫ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ
ХАБАРШЫСЫ
ВЕСТНИК
КАРАГАНДИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ISSN 0142-0843

МАТЕМАТИКА сериясы
№ 1(57)/2010
Серия МАТЕМАТИКА

Қаңтар–ақпан–наурыз
1996 жылдан бастап шығады
Жылына 4 рет шығады

Январь–февраль–март
Издается с 1996 года
Выходит 4 раза в год

Собственник РГКП **Карагандинский государственный университет имени Е.А.Букетова**

Адрес редакции: 100028, г. Караганда, ул. Университетская, 28
Тел.: 77-03-69 (внутр. 1026); факс: (7212) 77-03-84.

Редакторы *Ж.Т.Нұрмұханова*
Техн. редактор *В.В.Бутяйкин*

Издательство Карагандинского
государственного университета
им. Е.А.Букетова
100012, г. Караганда,
ул. Гоголя, 38,
тел.: (7212) 51-38-20
e-mail: izd_kargu@mail.ru

Басуға 31.03.2010 ж. қол қойылды.
Пішімі 60×84 1/8.
Офсеттік қағазы.
Көлемі 11,12 б.т.
Таралымы 300 дана.
Бағасы келісім бойынша.
Тапсырыс № 375.

Подписано в печать 31.03.2010 г.
Формат 60×84 1/8.
Бумага офсетная.
Объем 11,12 п.л. Тираж 300 экз.
Цена договорная. Заказ № 375.

Отпечатано в типографии
издательства КарГУ
им. Е.А.Букетова

Зарегистрирован Министерством культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан.
Регистрационное свидетельство № 1131–Ж от 10.03.2000 г.

МАЗМҰНЫ

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

С.Битимхан[1], М.Битимхан[2]

[1]Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова;
[2]Карагандинский государственный технический университет

Об абсолютной суммируемости кратных рядов с монотонными коэффициентами

В работе получено необходимое и достаточное условие абсолютной суммируемости кратных тригонометрических рядов Фурье функции $f \in L_q(I_s)$ с монотонными коэффициентами в терминах наилучшего приближения «углом». Кроме того, доказано необходимое и достаточное условие абсолютной суммируемости рядов Фурье монотонной функции в терминах модуля непрерывности этой функции.

Ключевые слова: кратный тригонометрический ряд, смешанная разность, абсолютная суммируемость, измеримая функция, Лебег, неравенство Гельдера.

Пусть R^s — s-мерное евклидово пространство точек $\overline{x}=\left(x_1,...,x_s\right)$ с вещественными координатами; $I_s=\left\{\overline{x}\in R^s: 0\le x_j\le 2\pi,\ \ j=1,2,...,s\right\}$ — s-мерный куб.

Положим $\gamma_i(nx)=\begin{cases}\cos nx, & i=1,\\ \sin nx, & i=2.\end{cases}$.

Рассмотрим кратный тригонометрический ряд

$$\sum_{\overline{n}\ge\overline{1}} B_{\overline{n}}(\overline{x})=\sum_{n_1=1}^{\infty}...\sum_{n_s=1}^{\infty} B_{n_1,...,n_s}(x_1,...,x_s)\,, \tag{1}$$

где $\overline{n}\ge\overline{\alpha}=(\alpha_1,...,\alpha_s)$ означает $n_j\ge\alpha_j$ для всех $j=1,2,...,s$;

$$B_{\overline{n}}(\overline{x})=\sum_{\overline{1}\le\overline{i}\le\overline{2}} a_{\overline{n}}^{(\overline{i})}\cdot\prod_{\nu=1}^{s}\gamma_{i_\nu}(n_\nu x_\nu)\,.$$

Положим $A_n^{(\beta)}=\dfrac{(\beta+1)(\beta+2)...(\beta+n)}{n!}, \beta\in R,\ n$ — натуральное число.

Сумма $\sigma_{\overline{n}}^{(\overline{\beta})}(\overline{x})=\sum\limits_{\overline{1}\le\overline{k}\le\overline{n}}\prod\limits_{j=1}^{s} A_{n_j-k_j}^{(\beta_j)}\left(A_{n_j}^{(\beta_j)}\right)^{-1}B_{\overline{k}}(\overline{x})$ называется $(C;\overline{\beta})\equiv(C;\beta_1,...,\beta_s)$ средним ряда (1).

Для заданного числа $b_{\overline{n}}$ смешанную разность определим следующим образом: $\Delta b_{\overline{n}}=\sum\limits_{\overline{0}\le\overline{\varepsilon}\le\overline{1}}(-1)^{s-\sum\limits_{i=1}^{s}\varepsilon_i}\cdot b_{\overline{n}-\overline{1}+\overline{\varepsilon}}$, где $\overline{\varepsilon}=(\varepsilon_1,...,\varepsilon_s)$. Ряд (1) назовем $|C;\overline{\beta}|_{\overline{\lambda}}$ суммируемым, $\overline{\lambda}\ge\overline{1}$, в точке $\overline{x}\in I_s$, если

$$\sum_{n_s=1}^{+\infty} n_s^{\lambda_s-1}\left[\sum_{n_{s-1}=1}^{+\infty} n_{s-1}^{\lambda_{s-1}-1}\dots\left[\sum_{n_1=1}^{+\infty} n_1^{\lambda_1-1}\left|\Delta\sigma_{\overline{n}}^{(\overline{\beta})}(\overline{x})\right|^{\lambda_1}\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\dots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}}<+\infty\,. \tag{2}$$

В случае $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_s=\lambda$ будем писать $|C;\overline{\beta}|_{\lambda}$ вместо $|C;\overline{\beta}|_{\overline{\lambda}}$.

Пусть $\tau_{\bar n}^{(\bar\beta)}(\bar x)$ есть $(C;\bar\beta)$ — среднее последовательности $\left\{\prod_{j=1}^{s} n_j \cdot B_{\bar n}(\bar x)\right\}$, то есть

$$\tau_{\bar n}^{(\bar\beta)}(\bar x) = \left(\prod_{j=1}^{s} A_{n_j}^{(\beta_j)}\right)^{-1} \cdot \sum_{\bar 1\le \bar k\le \bar n} \prod_{j=1}^{s} k_j A_{n_j-k_j}^{(\beta_j-1)} \cdot B_{\bar k}(\bar x).$$

Верна следующая лемма [1]:

Лемма 1. Пусть $\beta_j > -1,\ j = 1,\dots,s$. Тогда

$$\tau_{\bar n}^{(\bar\beta)}(\bar x) = \prod_{j=1}^{s} n_j \cdot \Delta\sigma_{\bar n}^{(\bar\beta)}(\bar x).$$

Пользуясь этой леммой, можно убедиться, что условие (2) эквивалентно условию

$$\sum_{n_s=1}^{+\infty}\frac{1}{n_s}\left[\sum_{n_{s-1}=1}^{+\infty}\frac{1}{n_{s-1}}\cdots\left[\sum_{n_1=1}^{+\infty}\frac{1}{n_1}\left|\tau_{\bar n}^{(\bar\beta)}(\bar x)\right|^{\lambda_1}\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\cdots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}} < +\infty .$$

Через $L_q(I_s)$ обозначим пространство всех измеримых, по Лебегу, 2π -периодических по каждой переменной функций $f(\bar x)$, для которых

$$\|f\|_q = \left(\int_{I_s} |f(\bar x)|^q\, d\bar x\right)^{\frac{1}{q}} < +\infty ,\ 1 \le q < +\infty .$$

Пусть $Y_{n_1,\dots,n_s}(f)_q$ — s -мерное наилучшее приближение «углом» (см. [2]) функции $f \in L_q(I_s)$; $\Omega_r(f;t_1,\dots,t_s)_q$ — смешанный модуль гладкости порядка r (r — натуральное число) функции $f \in L_q(I_s)$; $\omega(f;\delta)_q$ — модуль непрерывности функции $f \in L_q(I_1)$.

В дальнейшем через C будем обозначать положительные постоянные, вообще говоря, различные в разных формулах. Запись $A(\varphi) \succ\prec B(\varphi)$ означает, что существуют положительные постоянные c_1, c_2 такие, что $c_1 A(\varphi) \le B(\varphi) \le c_2 A(\varphi)$ для всех φ.

Условия абсолютной суммируемости ряда (1) в случае $\lambda = 1$, $s = 2$, $0 < \beta_j < \frac{1}{2}$, $j = 1,2$, исследовали И.Е.Жак и М.Ф.Тиман [3], а вопросы $\left|C;\bar\beta\right|_\lambda$ -суммируемости ряда Фурье функции $f \in L_2(I_s)$ изучили Ю.А.Пономаренко, М.Ф.Тиман [4], эти вопросы также были исследованы И.Салаи [5].

Определение (см. [6]). Если $a_{\bar n} \le a_{\bar k}$ при $\bar n \ge \bar k$, то числовая последовательность $\{a_{\bar n}\}$ называется монотонно убывающей. Класс таких последовательностей будем обозначать через M .

Теперь приведем полученные нами результаты. Нам понадобится следующий результат М.И.Дьяченко.

Теорема А (см. [7]). Если коэффициенты ряда

$$\sum_{\bar n\ge \bar 1} a_{\bar n} e^{i\bar n\bar x} \tag{3}$$

удовлетворяют условию $\{a_{\bar n}\} \in M$ и при некотором $q \in (\frac{2s}{s+1}, +\infty)$ выполняется условие

$$J_q = \sum_{\bar n\ge \bar 1}\prod_{j=1}^{s} n_j^{q-2} \cdot a_{\bar n}^q < +\infty,$$

то ряд (3) является рядом Фурье некоторой функции $f \in L_q(I_s)$ и $\| f \|_q \le C \cdot J_q^{\frac{1}{q}}$.

Используя эту теорему, докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 2. Пусть функция $f \in L_q(I_s)$, $q \in (\frac{2s}{s+1}, +\infty)$;

$$f(\bar x) \sim \sum_{\bar n\ge \bar 1} a_{\bar n}(f) \prod_{j=1}^{s} \cos n_j x_j$$

и $\{a_{\bar{n}}(f)\}\in M$, тогда имеет место неравенство

$$Y_{n_1,\ldots,n_s}(f)_q \le C\cdot\left(\sum_{k_1=n_1+1}^{+\infty}\ldots\sum_{k_s=n_s+1}^{+\infty} a_{\bar{k}}^q(f)\prod_{j=1}^{s}(k_j-n_j)^{q-2}\right)^{\frac{1}{q}},\ \ n_j=0,1,\ldots$$

Доказательство. Известно следующее равенство:

$$\prod_{j=1}^{s}\cos n_jx_j=\prod_{j=1}^{s}\frac{e^{in_jx_j}+e^{-in_jx_j}}{2}=\frac{1}{2^s}[e^{i(n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_sx_s)}+e^{i(-n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_sx_s)}+$$
$$+e^{i(n_1x_1-n_2x_2+\ldots+n_sx_s)}+\ldots+e^{i(n_1x_1+n_2x_2+\ldots-n_sx_s)}+e^{i(-n_1x_1-n_2x_2+n_3x_3+\ldots+n_sx_s)}+\ldots+$$
$$+e^{i(n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_{s-2}x_{s-2}-n_{s-1}x_{s-1}-n_sx_s)}+\ldots+e^{i(-n_1x_1-n_2x_2-\ldots-n_sx_s)}].$$

Пользуясь этим равенством, теоремой об ограниченности оператора сопряжения в пространстве $L_q(I_s)$, $1<q<+\infty$ (см. [8]) и теоремой А, можно убедиться, что

$$\|f\|_q\le C\cdot\left(\sum_{n_1=1}^{+\infty}\ldots\sum_{n_s=1}^{+\infty}a_{\bar{n}}^q(f)\cdot\prod_{j=1}^{s}n_j^{q-2}\right)^{\frac{1}{q}},\quad q\in\left(\frac{2s}{s+1},+\infty\right). \tag{4}$$

Положим

$$U_{\bar{n}}(f,\bar{x})=\sum_{k_1=1}^{n_1}\sum_{k_2=1}^{+\infty}\ldots\sum_{k_s=1}^{+\infty}a_{\bar{k}}(f)\prod_{j=1}^{s}\cos k_jx_j+\sum_{k_1=1}^{+\infty}\sum_{k_2=1}^{n_2}\ldots\sum_{k_s=1}^{+\infty}a_{\bar{k}}(f)\prod_{j=1}^{s}\cos k_jx_j+\ldots+$$
$$+\sum_{k_1=1}^{+\infty}\sum_{k_2=1}^{+\infty}\ldots\sum_{k_s=1}^{n_s}a_{\bar{k}}(f)\prod_{j=1}^{s}\cos k_jx_j-(s-1)\sum_{k_1=1}^{n_1}\sum_{k_2=1}^{n_2}\ldots\sum_{k_s=1}^{n_s}a_{\bar{k}}(f)\prod_{j=1}^{s}\cos k_jx_j\,.$$

Тогда

$$f(\bar{x})-U_{\bar{n}}(f,\bar{x})\sim\sum_{k_1=n_1+1}^{+\infty}\sum_{k_2=n_2+1}^{+\infty}\ldots\sum_{k_s=n_s+1}^{+\infty}a_{k_1,k_2,\ldots,k_s}(f)\prod_{j=1}^{s}\cos k_jx_j=$$
$$=\sum_{m_1=1}^{+\infty}\sum_{m_2=1}^{+\infty}\ldots\sum_{m_s=1}^{+\infty}a_{m_1+n_1,m_2+n_2,\ldots,m_s+n_s}(f)\prod_{j=1}^{s}\cos(m_j+n_j)x_j=$$
$$=\sum_{m_1=1}^{+\infty}\sum_{m_2=1}^{+\infty}\ldots\sum_{m_s=1}^{+\infty}a_{m_1+n_1,m_2+n_2,\ldots,m_s+n_s}(f)\prod_{j=1}^{s}[\cos m_jx_j\cdot\cos n_jx_j-\sin m_jx_j\cdot\sin n_jx_j].$$

Учитывая неравенство $|\sin y|\le 1,\ \ |\cos y|\le 1$ по определению наилучшего приближения «углом» и свойства нормы и пользуясь теоремой об ограниченности оператора сопряжения функции, получим

$$Y_{\bar{n}}(f)_q\le\|f-U_{\bar{n}}(f)\|_q\le C\cdot\left\|\sum_{m_1=1}^{+\infty}\ldots\sum_{m_s=1}^{+\infty}a_{m_1+n_1,\ldots,m_s+n_s}(f)\cdot\prod_{j=1}^{s}\cos m_jx_j\right\|_q.$$

Теперь, пользуясь неравенством (4) из последнего неравенства, получим

$$Y_{n_1,\ldots,n_s}(f)_q\le C\cdot\left(\sum_{m_1=1}^{+\infty}\ldots\sum_{m_s=1}^{+\infty}a_{m_1+n_1,\ldots,m_s+n_s}^q(f)\prod_{j=1}^{s}m_j^{q-2}\right)^{\frac{1}{q}}=$$
$$=C\cdot\left(\sum_{k_1=n_1+1}^{+\infty}\ldots\sum_{k_s=n_s+1}^{+\infty}a_{k_1,\ldots,k_s}^q(f)\prod_{j=1}^{s}(k_j-n_j)^{q-2}\right)^{\frac{1}{q}},q\in(\frac{2s}{s+1},+\infty).$$

Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть $\frac{2s}{s+1}<q\le 2$, $1\le\lambda\le q$, $0\le\beta_j<\frac{1}{q'}$, $j=1,\ldots,s,$ и функция $f\in L_q(I_s)$ имеет ряд Фурье вида

$$\sum_{\bar{n}\ge\bar{1}}a_{\bar{n}}(f)\cdot\prod_{j=1}^{s}\cos n_jx_j\,.$$

Если $\{a_{\bar{n}}(f)\}\in M$, то для того, чтобы ряд Фурье функции $f\in L_q(I_s)$ был $|C;\bar{\beta}|_\lambda$ -суммируем почти всюду на I_s, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n_1=2}^{+\infty}\ldots\sum_{n_s=2}^{+\infty}\prod_{j=1}^{s}n_j^{\left(\frac{1}{q}-\beta_j\right)\lambda-1}\cdot Y_{n_1,\ldots,n_s}^{\lambda}(f)_q<+\infty\,. \tag{5}$$

Доказательство. Достаточность условия (5) для $|C;\bar{\beta}|_\lambda$ -суммируемости ряда Фурье функции $f\in L_q(I_s)$ следует из пункта с) теоремы 4 работы [1] (без предположения $\{a_{\bar{n}}(f)\}\in M$).

Докажем необходимость. Пусть ряд Фурье функции $f \in L_q(I_s)$ $|C;\overline{\beta}|_\lambda$ -суммируем на I_s. Тогда по теореме 2 работы [1]

$$\sum_{\overline{n}\geq\overline{1}} |a_{\overline{n}}(f)|^{\lambda} \cdot \prod_{j=1}^{s} n_j^{\lambda(1-\beta_j)-1} < +\infty . \tag{6}$$

В силу монотонности наилучшего приближения «углом» и доказанной выше леммы 2 получим

$$\sum_{n_1=2}^{+\infty} \dots \sum_{n_s=2}^{+\infty} \prod_{j=1}^{s} n_j^{(\frac{1}{q}-\beta_j)\lambda-1} \cdot Y^{\lambda}_{n_1,\dots,n_s}(f)_q \succ\prec \sum_{\nu_1=1}^{+\infty} \dots \sum_{\nu_s=1}^{+\infty} \prod_{j=1}^{s} 2^{\nu_j(\frac{1}{q}-\beta_j)\lambda} Y^{\lambda}_{2^{\nu_1},\dots,2^{\nu_s}}(f)_q \leq$$

$$\leq C \cdot \sum_{\overline{\nu}\geq\overline{1}} \prod_{j=1}^{s} 2^{\nu_j(\frac{1}{q}-\beta_j)\lambda} \left[\sum_{\overline{k}\geq 2^{\overline{\nu}}+\overline{1}} \prod_{j=1}^{s} (k_j - 2^{\nu_j})^{q-2} a^q_{\overline{k}}(f) \right]^{\frac{\lambda}{q}} . \tag{7}$$

Учитывая, что по условию теоремы $\{a_{\overline{n}}(f)\} \in M$ и неравенство

$$\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} (k-2^{\nu})^{q-2} \leq C \cdot 2^{m(q-1)} ,$$

будем иметь

$$\sum_{\nu_1=1}^{+\infty} \dots \sum_{\nu_s=1}^{+\infty} \prod_{j=1}^{s} 2^{\nu_j(\frac{1}{q}-\beta_j)\lambda} \left[\sum_{k_1=2^{\nu_1}+1}^{+\infty} \dots \sum_{k_s=2^{\nu_s}+1}^{+\infty} \prod_{j=1}^{s} (k_j - 2^{\nu_j})^{q-2} a^q_{\overline{k}}(f) \right]^{\frac{\lambda}{q}} \leq$$

$$\leq C \cdot \sum_{\overline{\nu}\geq\overline{1}} \prod_{j=1}^{s} 2^{\nu_j\left(\frac{1}{q}-\beta_j\right)\lambda} \left[\sum_{\overline{m}\geq\overline{\nu}} \prod_{j=1}^{s} 2^{m_j(q-1)} a^q_{2^{m_1},\dots,2^{m_s}}(f) \right]^{\frac{\lambda}{q}} . \tag{8}$$

По условию теоремы $0 \leq \beta_j < \frac{1}{q'}$, $j = 1,\dots,s.$ Следовательно

$$\sum_{m=0}^{\nu} 2^{m(\frac{1}{q}-\beta_j)\lambda} \leq C \cdot 2^{\nu(\frac{1}{q}-\beta_j)\lambda}, \quad \nu = 0,1,\dots$$

Известно следующее неравенство Йоханссона [9]: если $\alpha_n \geq 0$ и $\sum_{m=0}^{n} \alpha_m \leq C \cdot \alpha_n$, то $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \left(\sum_{k=n}^{+\infty} b_k \right)^{\theta} \leq C \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \cdot b_n^{\theta}$, $\theta > 0$. Теперь, пользуясь этим неравенством, получим

$$\sum_{\nu_1=1}^{+\infty} \dots \sum_{\nu_s=1}^{+\infty} \prod_{j=1}^{s} 2^{\nu_j(\frac{1}{q}-\beta_j)\lambda} \left[\sum_{m_1=\nu_1}^{+\infty} \dots \sum_{m_s=\nu_s}^{+\infty} \prod_{j=1}^{s} 2^{m_j(q-1)} a^q_{2^{m_1},\dots,2^{m_s}}(f) \right]^{\frac{\lambda}{q}} \leq$$

$$\leq C \cdot \sum_{n_1=1}^{+\infty} \dots \sum_{n_s=1}^{+\infty} a^{\lambda}_{\overline{n}}(f) \cdot \prod_{j=1}^{s} n_j^{\lambda(1-\beta_j)-1} . \tag{9}$$

В силу (6) из неравенств (7)–(9) следует, что

$$\sum_{n_1=2}^{+\infty} \dots \sum_{n_s=2}^{+\infty} \prod_{j=1}^{s} n_j^{(\frac{1}{q}-\beta_j)\lambda-1} \cdot Y^{\lambda}_{n_1,\dots,n_s}(f)_q < +\infty .$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 1 анонсирована в [10].

Теорема 2. Пусть $1 < q \leq 2$, $1 \leq \lambda_s \leq \lambda_{s-1} \leq \dots \leq \lambda_1 \leq q$, $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$. Тогда для $|C;\overline{\beta}|_{\overline{\lambda}}$ -суммируемости п.в. на I_s ряда (1) достаточно, чтобы

1) в случае $\dfrac{1}{q'} < \beta_j < +\infty$, $j = 1,\dots,s$ выполнялось условие

$$\sum_{n_s=0}^{+\infty} \left[\sum_{n_{s-1}=0}^{+\infty} \cdots \left[\sum_{n_1=0}^{+\infty} \left(\sum_{k_1=2^{n_1}}^{2^{n_1+1}-1} \cdots \sum_{k_s=2^{n_s}}^{2^{n_s+1}-1} \rho^q_{k_1,\dots,k_s} \right)^{\frac{\lambda_1}{q}} \right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \cdots \right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}} < +\infty ;$$

2) в случае $\beta_1 = ... = \beta_s = \dfrac{1}{q'}$ выполнялось условие

$$\sum_{n_s=0}^{+\infty}\left[\sum_{n_{s-1}=0}^{+\infty}\cdots\left[\sum_{n_1=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_1=2^{n_1}}^{2^{n_1+1}-1}\cdots\sum_{k_s=2^{n_s}}^{2^{n_s+1}-1}\rho_{k_1,\dots,k_s}^{q}\prod_{j=1}^{s}\ln k_j\right)^{\frac{\lambda_1}{q}}\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\cdots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}} < +\infty\,;$$

3) в случае $-1 < \beta_j < \dfrac{1}{q'}$, $j = 1,...,s$ выполнялось условие

$$\sum_{n_s=0}^{+\infty}\left[\sum_{n_{s-1}=0}^{+\infty}\cdots\left[\sum_{n_1=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_1=2^{n_1}}^{2^{n_1+1}-1}\cdots\sum_{k_s=2^{n_s}}^{2^{n_s+1}-1}\rho_{k_1,\dots,k_s}^{q}\prod_{j=1}^{s}k_j^{q(1-\beta_j)-1}\right)^{\frac{\lambda_1}{q}}\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\cdots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}} < +\infty\,.$$

Доказательство. Докажем пункт 3. Рассмотрим следующий ряд:

$$J = \sum_{n_s=1}^{+\infty}\frac{1}{n_s}\int_{I_s}\left[\sum_{n_{s-1}=1}^{+\infty}\frac{1}{n_{s-1}}\cdots\left[\sum_{n_1=1}^{+\infty}\frac{1}{n_1}\left|\tau_{\bar n}^{\bar\beta}(\bar x)\right|^{\lambda_1}\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\cdots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}} d\bar x\,.$$

Последовательно применяя неравенство Гельдера для интеграла с показателями $\theta_s = \dfrac{\lambda_{s-1}}{\lambda_s}$,…, $\theta_2 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$, теорему Хаусдорфа-Юнга [11] и соотношение $A_n^{(\beta)} \succ\prec n^{\beta}$, получим

$$J \le C\sum_{n_s=1}^{+\infty}n_s^{-1-\lambda_s\beta_s}\left[\sum_{n_{s-1}=1}^{+\infty}n_{s-1}^{-1-\lambda_{s-1}\beta_{s-1}}\cdots\left[\sum_{n_1=1}^{+\infty}n_1^{-1-\lambda_1\beta_1}\left(\sum_{k_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{k_s=1}^{n_s}\rho_{k_1,\dots,k_s}^{q}\cdot\prod_{j=1}^{s}(n_j-k_j+1)^{q(\beta_j-1)}k_j^{q}\right)^{\frac{\lambda_1}{q}}\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\cdots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}}.$$

Теперь по n_1, рассуждая как в одномерном случае [5], так как $-1 < \beta_1 < \dfrac{1}{q'}$, отсюда получим

$$J \le C\sum_{n_s=1}^{+\infty}n_s^{-1-\lambda_s\beta_s}\left[\sum_{n_{s-1}=1}^{+\infty}n_{s-1}^{-1-\lambda_{s-1}\beta_{s-1}}\cdots\left[\sum_{i_1=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{k_s=1}^{n_s}\prod_{j=2}^{s}(n_j-k_j+1)^{q(\beta_j-1)}k_j^{q}\,\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\sum_{k_1=2^{i_1}}^{2^{i_1+1}-1}k_1^{q(1-\beta_1)-1}\cdot\rho_{\bar k}^{q}\right)^{\frac{\lambda_1}{q}}\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\cdots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}} =$$

$$= C\sum_{n_s=1}^{+\infty}n_s^{-1-\lambda_s\beta_s}\left[\sum_{n_{s-1}=1}^{+\infty}n_{s-1}^{-1-\lambda_{s-1}\beta_{s-1}}\cdots\left[\sum_{n_2=0}^{+\infty}\sum_{\mu_2=2^{n_2}}^{2^{n_2+1}-1}\mu_2^{-1-\lambda_2\beta_2}\left[\sum_{i_1=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_3=1}^{n_3}\cdots\sum_{k_s=1}^{n_s}\prod_{j=3}^{s}k_j^{q}\,\times\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\times\prod_{j=3}^{s}(n_j-k_j+1)^{q(\beta_j-1)}\cdot\sum_{k_2=1}^{\mu_2}(\mu_2-k_2+1)^{q(\beta_2-1)}k_2^{q}\sum_{k_1=2^{i_1}}^{2^{i_1+1}-1}k_1^{q(1-\beta_1)-1}\cdot\rho_{\bar k}^{q}\right)^{\frac{\lambda_1}{q}}\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\right]^{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}\cdots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}}. \qquad (10)$$

Далее, применяя неравенство Гельдера для суммы по μ_2 сначала с показателем $\theta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, потом с показателем $\theta = \frac{q}{\lambda_1}$, из (10) получим

$$J \le C \sum_{n_s=1}^{+\infty} n_s^{-1-\lambda_s\beta_s} \Biggl[\sum_{n_{s-1}=1}^{+\infty} n_{s-1}^{-1-\lambda_{s-1}\beta_{s-1}} \ldots \Biggl[\sum_{n_2=0}^{+\infty} 2^{-n_2\lambda_2(\beta_2+\frac{1}{q})} \Biggl[\sum_{i_1=0}^{+\infty} \Biggl(\sum_{k_3=1}^{n_3} \ldots \sum_{k_s=1}^{n_s} \prod_{j=3}^{s} k_j^q \times$$

$$\times \prod_{j=3}^{s} (n_j - k_j + 1)^{q(\beta_j - 1)} \cdot \sum_{\mu_2=2^{n_2}}^{2^{n_2+1}-1} \sum_{k_2=1}^{\mu_2} (\mu_2 - k_2 + 1)^{q(\beta_2-1)} k_2^q \cdot \sum_{k_1=2^{i_1}}^{2^{i_1+1}-1} k_1^{q(1-\beta_1)-1} \cdot \rho_{\overline{k}}^q \Biggr)^{\frac{\lambda_1}{q}} \Biggr]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \Biggr]^{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}} \ldots \Biggr]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}} . \qquad (11)$$

Теперь, если $-1 < \beta_2 < \frac{1}{q'}$, то по n_2, сначала рассуждая как в одномерном случае [5], потом так как по условию теоремы $\frac{\lambda_1}{q} \le 1$ и $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \le 1$, то, дважды применяя неравенство Иенсена и меняя порядок суммирования из (11), имеем

$$J \le C \sum_{n_s=1}^{+\infty} n_s^{-1-\lambda_s\beta_s} \Biggl[\sum_{n_{s-1}=1}^{+\infty} n_{s-1}^{-1-\lambda_{s-1}\beta_{s-1}} \ldots \Biggl[\sum_{i_2=0}^{+\infty} \Biggl[\sum_{i_1=0}^{+\infty} \Biggl(\sum_{k_3=1}^{n_3} \ldots \sum_{k_s=1}^{n_s} k_3^q \cdots k_s^q \times$$

$$\times \prod_{j=3}^{s} (n_j - k_j + 1)^{q(\beta_j - 1)} \cdot \sum_{k_2=2^{i_2}}^{2^{i_2+1}-1} k_2^{q(1-\beta_2)-1} \sum_{k_1=2^{i_1}}^{2^{i_1+1}-1} k_1^{q(1-\beta_1)-1} \cdot \rho_{\overline{k}}^q \Biggr)^{\frac{\lambda_1}{q}} \Biggr]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \Biggr]^{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}} \ldots \Biggr]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}} .$$

Далее, последовательно применяя вышеприведенный метод по n_3, n_4, …, n_s, получим

$$J \le C \sum_{n_s=0}^{+\infty} \Biggl[\sum_{n_{s-1}=0}^{+\infty} \ldots \Biggl[\sum_{n_1=0}^{+\infty} \Biggl(\sum_{k_1=2^{n_1}}^{2^{n_1+1}-1} \ldots \sum_{k_s=2^{n_s}}^{2^{n_s+1}-1} \rho_{k_1,\ldots,k_s}^q \prod_{j=1}^{s} k_j^{q(1-\beta_j)-1} \Biggr)^{\frac{\lambda_1}{q}} \Biggr]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \ldots \Biggr]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}} .$$

Наконец, применяя теорему Леви, получим $|C;\overline{\beta}|_{\overline{\lambda}}$-суммируемость ряда (1) п.в. на I_s, в случае $-1 < \beta_j < \frac{1}{q'}$, $j = 1,\ldots,s$.

Остальные пункты теоремы доказываются аналогично.

Замечание 2. В случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_s = \lambda$ из теоремы 2 следует теорема 1 работы [1].

Теорема 3. Пусть $1 < q \le 2$, $1 \le \lambda_s \le \lambda_{s-1} \le \ldots \le \lambda_1 \le q$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Тогда для $|C;\overline{\beta}|_{\overline{\lambda}}$-суммируемости п.в. на I_s ряда Фурье функции $f \in L_q(I_s)$ достаточно, чтобы

1) в случае $\frac{1}{q'} < \beta_j < +\infty$, $j = 1,\ldots,s$ выполнялось условие

$$\sum_{n_s=1}^{+\infty} n_s^{\lambda_s(\frac{2}{q}-1)-1} \Biggl[\sum_{n_{s-1}=1}^{+\infty} n_{s-1}^{\lambda_{s-1}(\frac{2}{q}-1)-1} \ldots \Biggl[\sum_{n_1=1}^{+\infty} n_1^{\lambda_1(\frac{2}{q}-1)-1} \cdot Y_{\overline{n}}^{\lambda_1}(f)_q \Biggr]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \ldots \Biggr]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}} < +\infty ;$$

2) в случае $\beta_1=\ldots=\beta_s=\frac{1}{q'}$ выполнялось условие

$$\sum_{n_s=2}^{+\infty}(\ln n_s)^{\frac{\lambda_s}{q}}\cdot n_s^{\lambda_s(\frac{2}{q}-1)-1}\left[\sum_{n_{s-1}=2}^{+\infty}(\ln n_{s-1})^{\frac{\lambda_{s-1}}{q}}\cdot n_{s-1}^{\lambda_{s-1}(\frac{2}{q}-1)-1}\ldots\left[\sum_{n_1=2}^{+\infty}(\ln n_1)^{\frac{\lambda_1}{q}}\cdot n_1^{\lambda_1(\frac{2}{q}-1)-1}\cdot Y_{\bar{n}}^{\lambda_1}(f)_q\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\ldots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}}<+\infty\,;$$

3) в случае $-1<\beta_j<\frac{1}{q'}$, $j=1,\ldots,s$ выполнялось условие

$$\sum_{n_s=1}^{+\infty}n_s^{\lambda_s(\frac{1}{q}-\beta_s)-1}\left[\sum_{n_{s-1}=1}^{+\infty}n_{s-1}^{\lambda_{s-1}(\frac{1}{q}-\beta_{s-1})-1}\ldots\left[\sum_{n_1=1}^{+\infty}n_1^{\lambda_1(\frac{1}{q}-\beta_1)-1}\cdot Y_{\bar{n}}^{\lambda_1}(f)_q\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\ldots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}}<+\infty\,.$$

Доказательство. Докажем пункт 2. Пусть $\beta_1=\ldots=\beta_s=\frac{1}{q'}$. Тогда из теоремы 2 (пункт 2), пользуясь теоремой Харди-Литтлвуда [11], получим

$$P=\sum_{n_s=0}^{+\infty}\left[\sum_{n_{s-1}=0}^{+\infty}\ldots\left[\sum_{n_1=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_1=2^{n_1}}^{2^{n_1+1}-1}\ldots\sum_{k_s=2^{n_s}}^{2^{n_s+1}-1}\rho_{k_1,\ldots,k_s}^{q}\prod_{j=1}^{s}\ln k_j\right)^{\frac{\lambda_1}{q}}\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\ldots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}}\le$$

$$\le C\sum_{n_s=1}^{+\infty}(\ln 2^{n_s})^{\frac{\lambda_s}{q}}\cdot 2^{n_s(2-q)\frac{\lambda_s}{q}}\left[\sum_{n_{s-1}=1}^{+\infty}(\ln 2^{n_{s-1}})^{\frac{\lambda_{s-1}}{q}}\cdot 2^{n_{s-1}(2-q)\frac{\lambda_{s-1}}{q}}\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\left[\sum_{n_1=2}^{+\infty}(\ln 2^{n_1})^{\frac{\lambda_1}{q}}2^{n_1(2-q)\frac{\lambda_1}{q}}\cdot\left(\sum_{k_1=2^{n_1}}^{2^{n_1+1}-1}\ldots\sum_{k_s=2^{n_s}}^{2^{n_s+1}-1}\rho_{\bar{k}}^{q}\cdot\prod_{j=1}^{s}k_j^{q-2}\right)^{\frac{\lambda_1}{q}}\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\ldots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}}\le$$

$$\le C\sum_{n_s=1}^{+\infty}(\ln 2^{n_s})^{\frac{\lambda_s}{q}}\cdot 2^{n_s(2-q)\frac{\lambda_s}{q}}\left[\sum_{n_{s-1}=1}^{+\infty}(\ln 2^{n_{s-1}})^{\frac{\lambda_{s-1}}{q}}\cdot 2^{n_{s-1}(2-q)\frac{\lambda_{s-1}}{q}}\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\left[\sum_{n_1=2}^{+\infty}(\ln 2^{n_1})^{\frac{\lambda_1}{q}}2^{n_1(2-q)\frac{\lambda_1}{q}}\cdot\left\|\sum_{k_1=2^{n_1}}^{2^{n_1+1}-1}\ldots\sum_{k_s=2^{n_s}}^{2^{n_s+1}-1}B_{\bar{k}}(\cdot)\right\|_q^{\lambda_1}\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\ldots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}}. \qquad (12)$$

Теперь, пользуясь неравенством [2]

$$\left\|\sum_{k_1=2^{n_1}}^{2^{n_1+1}-1}\ldots\sum_{k_s=2^{n_s}}^{2^{n_s+1}-1}B_{\bar{k}}(\cdot)\right\|_q\le C\cdot Y_{2^{n_1}-1,\ldots,2^{n_s}-1}(f)_q\,,$$

в силу монотонности наилучшего приближения «углом» из (12), имеем

$$P\le C\cdot\sum_{n_s=2}^{+\infty}(\ln n_s)^{\frac{\lambda_s}{q}}\cdot n_s^{\lambda_s(\frac{2}{q}-1)-1}\left[\sum_{n_{s-1}=2}^{+\infty}(\ln n_{s-1})^{\frac{\lambda_{s-1}}{q}}\cdot n_{s-1}^{\lambda_{s-1}(\frac{2}{q}-1)-1}\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\left[\sum_{n_1=2}^{+\infty}(\ln n_1)^{\frac{\lambda_1}{q}}\cdot n_1^{\lambda_1(\frac{2}{q}-1)-1}\cdot Y_{\bar{n}}^{\lambda_1}(f)_q\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\ldots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}}<+\infty\,.$$

Остальные пункты теоремы доказываются аналогично.

Замечание 3. В случае $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_s=\lambda$ из теоремы 3 следует теорема 4 работы [1].

Теорема 4. Пусть $1<q\le 2,\ 1\le\lambda_s\le\lambda_{s-1}\le\ldots\le\lambda_1\le q,\ \frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$ и r — натуральное число. Тогда для $|C;\bar{\beta}|_{\bar{\lambda}}$-суммируемости п.в. на I_s ряда Фурье функции $f\in L_q(I_s)$ достаточно, чтобы

1) в случае $\frac{1}{q'}<\beta_j<+\infty,\ j=1,\ldots,s$ выполнялось условие

$$\sum_{n_s=1}^{+\infty} n_s^{\lambda_s(\frac{2}{q}-1)-1}\left[\sum_{n_{s-1}=1}^{+\infty} n_{s-1}^{\lambda_{s-1}(\frac{2}{q}-1)-1}\ldots\left[\sum_{n_1=1}^{+\infty} n_1^{\lambda_1(\frac{2}{q}-1)-1}\cdot\Omega_r^{\lambda_1}(f;\frac{1}{n_1},\ldots,\frac{1}{n_s})_q\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\ldots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}}<+\infty\,;$$

2) в случае $\beta_1=\ldots=\beta_s=\frac{1}{q'}$ выполнялось условие

$$\sum_{n_s=2}^{+\infty}(\ln n_s)^{\frac{\lambda_s}{q}}\cdot n_s^{\lambda_s(\frac{2}{q}-1)-1}\left[\sum_{n_{s-1}=2}^{+\infty}(\ln n_{s-1})^{\frac{\lambda_{s-1}}{q}}\cdot n_{s-1}^{\lambda_{s-1}(\frac{2}{q}-1)-1}\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\left[\sum_{n_1=2}^{+\infty}(\ln n_1)^{\frac{\lambda_1}{q}}\cdot n_1^{\lambda_1(\frac{2}{q}-1)-1}\cdot\Omega_r^{\lambda_1}(f;\frac{1}{n_1},\ldots,\frac{1}{n_s})_q\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\ldots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}}<+\infty\,;$$

3) в случае $-1<\beta_j<\frac{1}{q'},\ j=1,\ldots,s$ и $r>\frac{1}{q}-\beta_j,\ j=1,\ldots,s$ выполнялось условие

$$\sum_{n_s=1}^{+\infty} n_s^{\lambda_s(\frac{1}{q}-\beta_s)-1}\left[\sum_{n_{s-1}=1}^{+\infty} n_{s-1}^{\lambda_{s-1}(\frac{1}{q}-\beta_{s-1})-1}\ldots\left[\sum_{n_1=1}^{+\infty} n_1^{\lambda_1(\frac{1}{q}-\beta_1)-1}\Omega_r^{\lambda_1}(f;\frac{1}{n_1},\ldots,\frac{1}{n_s})_q\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\ldots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}}<+\infty\,.$$

Доказательство. Справедливость теоремы следует из теоремы 3 и следующего неравенства [2]:

$$Y_{n_1,\ldots,n_s}(f)_q\le C\cdot\Omega_r(f;\frac{1}{n_1+1},\ldots,\frac{1}{n_s+1})_q\,.$$

Если функция одной переменной f монотонно убывает, то справедлива следующая теорема.

Теорема 5. Пусть $1<q\le 2,\ \ 1\le\lambda\le q,\ \ 0\le\beta<\frac{1}{q'}$ и пусть функция $f\in L_q(I_1)$ монотонно убывает и неотрицательна. Тогда, для того чтобы ряд Фурье этой функции был $|C;\beta|_\lambda$-суммируем почти всюду на I_1, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\lambda(\frac{1}{q}-\beta)-1}\cdot\omega^\lambda(f;\frac{1}{n})_q<+\infty\,.$$

Доказательство. Необходимость. Применяя неравенство Харди [12], получим

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\lambda(\frac{1}{q}-\beta)-1}\cdot\omega^\lambda(f;\frac{1}{n})_q\le\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\lambda(\frac{1}{q}-\beta)-1}\left(\int_0^{\frac{1}{n}} f^q(x)dx\right)^{\frac{\lambda}{q}}\le$$

$$\le\sum_{n=0}^{+\infty}2^{n\lambda(\frac{1}{q}-\beta)}\left(\sum_{k=n}^{+\infty}\int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} f^q(x)dx\right)^{\frac{\lambda}{q}}\le C\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}2^{n\lambda(\frac{1}{q}-\beta)}\left(2^{-n}f^q(2^{-n-1})\right)^{\frac{\lambda}{q}}=$$

$$=C\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}2^{-n\lambda\beta}f^\lambda(2^{-n-1})\le C\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}2^{-n\lambda\beta}\left(\sum_{k=1}^{2^n}|a_k(f)|\right)^\lambda\succ\prec$$

$$\succ\prec\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1-\lambda\beta}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k(f)|\right)^\lambda\le C\cdot\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1-\lambda\beta}\left(n\,|a_n(f)|\right)^\lambda=C\cdot\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\lambda(1-\beta)-1}\,|a_n(f)|^\lambda\quad.$$

Если предположить, что ряд Фурье функции $f\in L_q(I_1)$ почти всюду $|C;\beta|_\lambda$-суммируем на множестве положительной меры, то в силу теоремы 1 работы [4] из предыдущего неравенства следует, что

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\lambda(\frac{1}{q}-\beta)-1}\cdot\omega^{\lambda}(f;\frac{1}{n})_q<+\infty$$

для функции $f\in L_q(I_1),\ \ f\downarrow$.

Достаточность следует из теоремы 3 работы [13] при $s=1$.

Теорема доказана.

Замечание 4. Теорема 5 анонсирована в [14].

Список литературы

1 *Битимханулы С.* Условие абсолютной суммируемости кратных тригонометрических рядов // Вестн. КазГУ. Сер. мат., мех., инф. — Алматы, 2001. — №1(24).

2 *Потапов М.К.* Теоремы Харди-Литтлвуда, Марцинкевича-Литтлвуда-Пэли, приближение «углом» и вложение некоторых классов функций // Math. — 1972. — Vol. 14(37). — № 2.

3 *Жак И.Е., Тиман М.Ф.* О суммировании двойных рядов // Мат. сб. — 1954. — Т. 35 (77). — № 1. — С. 21–56.

4 *Тиман М.Ф., Пономаренко Ю.А.* Об абсолютной суммируемости кратных рядов Фурье // Укр. мат. журн. — 1971. — Т. 23. — № 3. — С. 346–361.

5 *Салаи И.* Об абсолютной суммируемости тригонометрических рядов // Мат. заметки. — 1981. — Т. 39. — № 6. — С. 823–837.

6 *Дьяченко М.И.* Коэффициенты Фурье кусочно-монотонных функций многих переменных // Изв. РАН. — 1998. — Т. 62. — № 2. — С. 35–48.

7 *Дьяченко М.И.* Нормы ядер Дирихле и некоторых тригонометрических полиномов в пространствах L_p. // Мат. сб. — 1993. — Т. 184. — № 3. — С. 3–20.

8 *Жижиашвили Л.В.* Некоторые вопросы многомерного гармонического анализа. — Тбилиси, 1983. — 113 с.

9 *Акишев Г.А.* Об условиях вложения классов функций многих переменных в пространство Лоренца и их приложения: Дис. … канд. физ.-мат. наук. — Алматы, 1983.

10 *Битимхан С., Акишев Г.А.* Об абсолютной суммируемости кратных тригонометрических рядов // Тез. докл. 2 Междунар. симп. (27 мая–2 июня 2002 г.). — Ростов-н/Д., 2002. — С. 15.

11 *Бугров Я.С.* Суммируемость преобразований Фурье и абсолютная сходимость кратных рядов Фурье // Тр. МИАН СССР. — 1989. — Т. 187. — С. 22–30.

12 *Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Полиа Г.* Неравенства. — М.: ИЛ, 1948.

13 *Битимхан С., Акишев Г.А.* Модули гладкости и абсолютная суммируемость кратных тригонометрических рядов // Мат. журн. — Алматы, 2003. — Т. 3. — № 1(17). — С. 5–14.

14 *Bitimkhan S.* Absolute summability of Fourier series of monotonously decreasing function // Abstracts of the third congress of the world mathematical society of Turkic countries. June 30–July 4, 2009. — Vol. 1. — P. 95.

С.Бітімхан, М.Бітімхан

Монотондық коэффициенттерімен еселік қатарлардың абсолюттік қосындылауы туралы

Мақалада $f\in L_q(I_s)$ функциясының коэффициенттері монотонды еселі тригонометриялық Фурье қатарының абсолютті қосындылануының ең жақсы «бұрышпен» жуықтаулар терминіндегі қажетті және жеткілікті шарты алынған. Сонымен бірге монотонды функцияның Фурье қатарының абсолютті қосындылануының қажетті және жеткілікті шарты функцияның үзіліссіздік модулі терминінде дәлелденген.

S.Bitimhan, M.Bitimhan

On absolute summability of multiple series with monotonous coefficients

In this work the necessary and sufficient condition of absolute summability multiple trigonometric series of Fourier of function $f \in L_q(I_s)$ with monotonous coefficients in terms of the best approximation by «corner» is received. Also the necessary and sufficient condition absolute summability of Fourier series of monotonous function in terms of the module of a continuity of this function is proved.

ӘОЖ 517.9+51:53

М.Т.Дженалиев[1], Б.А.Шалдықова[2], Б.С.Құсайынова[3]

[1]ҚР БҒМ «Математика институты», Алматы;
[2]Рудный индустриалдық институты;
[3]Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті

Жылу өткізгіштіктің спектралды-жүктелген операторы үшін шекаралық есебі

Мақалада $Lu+\lambda Bu$ түрлі функционалды-дифференциалдық класына қарасты ширек жазықтықта жататын жүктелген жылуөткізгіштік операторы үшін арналған шекаралық есептер қарастырылды. Мұндағы оператордың, сәйкесінше, L — дифференциалдық, ал B — жүктелген бөлігі. Бұл оператордың ерекшелігі болып, біріншіден, жүктелген қосындының коэффициенті λ спектралды параметрі табылады, екіншіден, жүктелген қосындысының туындысының реті оператордың дифференциалдық бөлігінің ретіне тең, үшіншіден, $\overline{x}(t)$ функциясымен анықталған жүктеуші нүкте айнымалы жылдамдықпен қозғалады, яғни, $\overline{x}'(t)$ туындысы нөлге тең болмауы мүмкін.

Кілтті сөздер: спектралды-жүктелген оператор, спектралдық параметр, екінші ретті Вольтер интегралдық теңдеуі, сипаттамалық интегралдық теңдеулер.

Мақалада $Lu+\lambda Bu$, мұндағы L — дифференциалдық, ал B — жүктелген бөлік, түріне ие болатын, функционалды-дифференциалдық операторлар класынан алынған, ширек жазықтықтағы жылуөткізгіштіктің жүктелген операторы (кеңістік айнымалысы бойынша бірөлшемді) үшін шекаралық есеп қарастырылады. Оның ерекшелігі, біріншіден, λ спектралдық параметрі жүктелген қосылғыш үшін коэффициент болып табылады, екіншіден, жүктелген қосылғыштағы туындының реті оператордың дифференциалдық бөлігінің ретіне тең, үшіншіден, $\overline{x}(t)$ функциясымен анықталатын жүктелу нүктесі айнымалы жылдамдықпен қозғалады, яғни $\overline{x}'(t)$ туындысы әрқашанда нөлге тең емес. Оның үстіне берілген жұмыста зерттеліп отырған $Lu+\lambda Bu=0$ жалпыланған спектралдық есебінде B жүктемесінің операторы қайтымсыз. (Әдетте B^{-1} операторының бар болу талабы ұйғарылады [1, 2]). Мұндай оператор спектралды-жүктелген оператор деп аталады. Бұл жағдайда бұрынғы қарастырылған жүктелген дифференциалдық теңдеулерден айырмашылығы, теңдеудегі жүктелген қосылғыш оның дифференциалдық бөлігінің әлсіз ауытқуы болып табылмайды. Мұнда әлсіз ауытқуы бар операторға тән емес, жүктелген дифференциалдық оператордың жаңа қасиеттері көрсетіледі. Жұмыста қарастырылып отырған шекаралық есеп нетерлік есеп болып табылады және кейбір комплекстік жазықтығы қатаң түрде сипатталған λ спектралдық параметрінің мәні үшін есеп ақырлы оң индекске ие болады. Сонымен бірге жүктелген бөлігі қарастырылып отырған теңдеудің кіші қосылғышының коэффициентіне енетін параболалық теңдеу үшін қойылған, шекаралық есептің шешіміне арналған жұмысты ескереміз.

1. Есептің қойылымы. $R_+=(0,\infty)$, $R_-=(-\infty,0)$, $R=(-\infty,\infty)$ болсын. $Q=\{x\in R_+,\ t\in R_+\}$ облысында параболалық типті спектралды-жүктелген теңдеу үшін келесі шекаралық есептер қарастырылады:

$$L_\lambda u=f\Leftrightarrow\begin{cases}u_t-u_{xx}+\lambda u_{xx}(x,t)_{x=\alpha(t)}=f;\\ u(x,0)=0,\quad u(0,t)=0;\end{cases}\tag{1}$$

$$L_\lambda^*\upsilon=g\Leftrightarrow\begin{cases}-\upsilon_t-\upsilon_{xx}+\lambda\cdot\delta''(x-\alpha(t))\otimes\int\limits_0^\infty\upsilon(\xi,t)d\xi=g;\\ \upsilon(x,\infty)=0,\ \upsilon(0,t)=\upsilon(\infty,t)=\upsilon_x(\infty,t)=0.\end{cases}\tag{2}$$

Сонымен бірге келесі спектралдық есептерді қарастырамыз:

$$L_1u=-\lambda u_{xx}(x,t)_{|x=\alpha(t)}\Leftrightarrow\begin{cases}u_t-u_{xx}=-\lambda u_{xx}(x,t)_{|x=\alpha(t)};\\ u(x,0)=0,\ u(0,t)=0;\end{cases}\tag{3}$$

$$L_1^*\upsilon=-\lambda\cdot\delta''(x-\alpha(t))\otimes\int\limits_0^\infty\upsilon(\xi,t)d\xi\Leftrightarrow\begin{cases}-\upsilon_t-\upsilon_{xx}=-\lambda\cdot\delta''(x-\alpha(t))\otimes\int\limits_0^\infty\upsilon(\xi,t)d\xi;\\ \upsilon(x,\infty)=0,\ \upsilon(0,t)=\upsilon(\infty,t)=\upsilon_x(\infty,t)=0,\end{cases}\tag{4}$$

мұндағы $\lambda\in C$ — спектралдық параметр;

$$\begin{gathered}\left[\alpha(t)\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\ f\in M(Q),\left[\alpha(t)\right]^{\frac{1-\omega}{\omega}}\left(x+\sqrt{t}\right)g\in L_1(Q),\\ \left[\alpha(t)\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_0^1\int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right)_{|x=t^\omega}\in M(R_+)—\end{gathered}\tag{5}$$

берілген функциялар; $M(Q)=L_\infty(Q)\cap C(Q)$, $M(R_+)=L_\infty(R_+)\cap C(R_+)$ — $\delta(x-t)\in E'(Q)$ Q облысындағы $x=\alpha(t)$ ашық сызығында шоғырланған дельта-функция; $E'(Q)$ — Q облысындағы жинақы тасымалдаушысы бар жалпыланған функциялар кеңістігі; $erfz=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z\exp(-\xi^2)d\xi$ $G(x,\xi,t-\tau)$ — формуламен анықталған Грин функциясы.

(1)–(4) есептерде жүктеме нүктесінің қозғалысы $\bar{x}(t)=\alpha(t),\lim\limits_{t\to0}\frac{\alpha(t)}{\sqrt{t}}=0$.

Ескерту 1. Егер f функциясы x-тан тәуелді болмаса, онда (5)-тегі f функциясы үшін екінші шарт біріншіден шығады $\left[\alpha(t)\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}f\in M(Q)$.

Сәйкесінше (1) және (2) шекаралық есептерін шешу үшін, U және V функционалдық кластарын, сонымен қатар L және L^* $D(L)$ және $D(L^*)$ операторларының анықталу облыстарын келесі түрде анықтаймыз:

$$U=\left\{u\left|\left[\alpha(t)\right]^{\frac{1-\omega}{\omega}}\left(x+\sqrt{t}\right)^{-1}u,\left[\alpha(t)\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}(u_t-u_{xx})\in M(Q,)\left[\alpha(t)\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}u_{xx}(x,t)_{|x=\alpha(t)}\in M(R_+)\right.\right\};\tag{6}$$

$$V=\left\{v\left|\left[\alpha(t)\right]^{\frac{\omega-3/2}{\omega}}v,\left[\alpha(t)\right]^{\frac{\omega-1}{\omega}}\left(x+\sqrt{t}\right)(v_t+v_{xx})\in L_1(Q),\left[\alpha(t)\right]^{\frac{\omega-3/2}{\omega}}\int\limits_0^\infty v(\xi,t)d\xi\in L_1(R_+)\right.\right\};\tag{7}$$

$$D(L_\lambda)\equiv D(L_1)=\left\{u\left|u\in U,u(x,0)=0,u(0,t)=0\right.\right\};\tag{8}$$

$$D(L_\lambda^*)\equiv D(L_1^*)=\left\{v\left|v\in V,v(x,\infty)=0,v(0,t)=0,v(\infty,t)=0,v_x(\infty,t)=0\right.\right\}.\tag{9}$$

(2) шекаралық есебі (1) есепке түйіндес болып табылады. Шынымен, (1)–(9)-ға сәйкес

$$\langle Lu,v\rangle=\langle u,L^*v\rangle\forall u\in D(L),\forall v\in D(L^*)\tag{10}$$

теңдікті аламыз.

1-есеп (1) және (2) шекаралық есептерінің шешілгіштік шарттарын зерттеуді талап етеді.

2-есеп (3) және (4) спектралдық есептерін (5)-(9) шарттары орындалған жағдайда $\left\{\lambda, u_\lambda(x,t)\right\} u \left\{\lambda, v_\lambda(x,t)\right\}$ парларының анықтамасы бойынша зерттеуді талап етеді.

2. Интегралдық теңдеулерге келтіру. (1) және (2) шекаралық есептерін екінші ретті ерекше одақтас Вольтер интегралдық теңдеулеріне келтіруге болатынын көрсетейік. (1) шекаралық есепте дифференциалдық бөлігін қайтару арқылы алатынымыз

$$u(x,t) = -\lambda\int_0^t K_0(x,t-\tau)u_{\eta\eta}(\eta,\tau)\big|_{\eta=\alpha(\tau)}d\tau + \int_0^t\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{11}$$

мұндағы

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left\{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4t}\right)\right\}; \tag{12}$$

$$K_0(x,t-\tau) = \int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)d\xi = erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right). \tag{13}$$

(1) есептің шешімін табу үшін $u_{xx}(x,t)\big|_{x=\alpha(t)}$ жүктелген қосылғышты анықтау жеткілікті екендігі (11) интегралдық арақатынастан шығады. Бұл үшін (11)-ді x бойынша 2-рет дифференциалдап және белгілеу енгізіп

$$\mu(t) = (\alpha(t))^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} u_{xx}(x,t)_{x=\alpha(t)}; \tag{14}$$

$$K_2(t,\tau) = -\left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \frac{\partial^2 K_0(x,t-\tau)}{\partial x^2}\bigg|_{x=\alpha(t)} = \left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \frac{\alpha(t)}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{\alpha^2(t)}{4(t-\tau)}\right); \tag{15}$$

$$f_1(t) = (\alpha(t))^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^t\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right)_{\big|x=\alpha(t)}, \tag{16}$$

(11) теңдіктен келесі интегралдық теңдеуді аламыз:

$$K_{2\lambda\mu} \equiv (I-\lambda K_2)\mu \equiv \mu(t) - \lambda\int_0^t K_2(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = f_1(t), \quad t\in R_+. \tag{17}$$

Ескерту 2. (16)-шы теңдіктегі $f_1(t)$ функциясының R_+-облысында шектелген функция екендігі f-та берілген (5)-ші шарттан шығады.

$K_2(t,\tau)$ ядросы келесі қасиеттерге ие болатынын айта кетейік:

1. $K_2(t,\tau)$ ядросы үзіліссіз, мұндағы $0<\tau<t<\infty$.
2. $K_2(t,\tau)$ ядросы $0<\tau<t<\infty$.
3. Әрбір $t_0 \geq \varepsilon > 0$ үшін $\lim\limits_{t\to+t_0}\int_{t_0}^t K_2(t,\tau)d\tau = 0$.
4. Келесі шектік қатыс орындалады: $\lim\limits_{t\to+0}\int_0^t K_2(t,\tau)d\tau = 1$. (18)

$K_2(t,\tau)$ ядросымен анықталған үзіліссіз-шектелген функциялар кеңістігіне әсер етуші интегралдық оператордың нормасының бірге тең екендігі ($K_2(t,\tau)$ ядросы интегралданатын ерекшелікке ие) (18) шеттік арақатынастан шығады. Бұл (17) теңдеуді шешімі бар және жалғыз болатын екінші ретті Вольтер теңдеуінен принципті түрде ерекше етіп көрсетеді. Біздің жағдайда сәйкес біртекті теңдеулердің шешімі

$$K_{2\lambda}\mu \equiv (I-\lambda K_2)\mu \equiv \mu(t) - \lambda\int_0^t K_2(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = 0, \quad t\in R_+. \tag{19}$$

Кейбір $\lambda\in C$ мәндері үшін нетривиалдық (нөлден өзгеше) болуы мүмкін. Бұл төменде көрсетілетін болады. Енді (1) есебіне ұқсас түрде (2)-ші есепте дифференциалдық бөлікті қайтара отырып келесі теңдікті аламыз:

$$v(x,t)=-\lambda\int_t^{\infty}\int_0^{\infty}G(x,\xi,\tau-t)\delta^n\left(\xi-\alpha(\tau)\right)\otimes\int_0^{\infty}v(\eta,\tau)d\eta d\xi d\tau+\int_t^{\infty}\int_0^{\infty}G(x,\xi,\tau-t)g(\xi,\tau)d\xi d\tau. \qquad (20)$$

(20)-шы арақатынасты x бойынша 0-ден ∞-ке дейін интегралдап,

$$v(t)=\left(\alpha(t)\right)^{\frac{\omega-3/2}{\omega}}\cdot\int_0^{\infty}v(\eta,t)d\eta \qquad (21)$$

белгілеуін енгізе отырып, келесі интегралдық теңдеуді аламыз:

$$K_{2\lambda}^{*}v\equiv\left(I-\overline{\lambda}K_2^{*}\right)v\equiv v(t)-\overline{\lambda}\int_t^{\infty}K_2(\tau,t)v(\tau)d\tau=g_1(t),\qquad t\in R_+, \qquad (22)$$

мұндағы

$$K_2(\tau,t)=-\left(\frac{\alpha(\tau)}{\alpha(t)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\cdot\int_0^{\infty}\delta^n\left(\xi-\alpha(\tau)\right)\otimes erf\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau-t}}\right)d\xi=\left(\frac{\alpha(\tau)}{\alpha(t)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{\alpha(t)}{2\sqrt{\pi}(\tau-t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{\alpha^2(\tau)}{4(\tau-t)}\right); \qquad (23)$$

$$g_1(t)=\left(\alpha(t)\right)^{\frac{\omega-3/2}{\omega}}\cdot\int_t^{\infty}\int_0^{\infty}erf\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau-t}}\right)g(\xi,\tau)d\xi d\tau. \qquad (24)$$

Ескерту 3. (24) теңдіктегі $g_1(t)$ функциясының R_+ облысында интегралдануы g-да берілген (5) шартынан шығады. Мұнда келесі арақатынастар есепке алынған:

$$\delta'(\xi)\otimes\rho(\xi,\tau)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{\delta(\xi+\varepsilon)}{2\varepsilon}\otimes\rho(\xi,\tau)-\frac{\delta(\xi-\varepsilon)}{2\varepsilon}\otimes\rho(\xi,\tau)\right],E'(Q). \qquad (25)$$

(22) теңдеуі (17) үшін одақтас интегралдық теңдеу екені анық. Сонымен, түйіндес (1) және (2) шекаралық есептерінің шешімі одақтас (17) және (22) интегралдық теңдеулер жұптарын зерттеу есебіне келтіріледі.

Ескерту 4. (17) және (22) одақтас интегралдық теңдеулерін жеткілікті кіші t мәні үшін зерттейміз, өйткені екінші ретті Вольтер интегралдық теңдеуі үшін шешімінің жалғасу мүмкіндігі ерекше.

Шынында да, Вольтер операторы үшін

$$K\mu(t)\equiv\int_0^t k(t,\tau)\mu(\tau)d\tau$$

$K\mu(t)$ функциясының мәндері кез келген уақытта $\tau\le t$ болғанда $\mu(t)$ функциясының мәндерімен анықталады, яғни бұл оператор процестің «алдыңғы тарихын» есепке алады. Шынында, егер ол бар болса, онда уақыттың әрбір моменті $f(t)$ сыртқы әсер шамасы тек қана алдында өткен $\tau\le t$ моментімен анықталады.

Бізге интегралдық теңдеудің шешімі белгілі болсын

$$\mu(t)-\lambda\int_0^t k(t,\tau)\mu(\tau)d\tau=f(t). \qquad (26)$$

$(0,\varepsilon)$ аралығынан t кіші мәндері үшін алынған, мұндағы $\varepsilon>0$ — бекітілген сан. Бұл шешімді $\mu_\varepsilon(t)$ арқылы белгілеп және $t\ge\varepsilon$ үшін шешімін іздейміз. (26) теңдеуін келесі түрде жазамыз:

$$\mu(t)-\lambda\int_\varepsilon^t k(t,\tau)\mu(\tau)d\tau=f_\varepsilon(t), \qquad (27)$$

мұндағы

$$f_\varepsilon(t)=f(t)+\lambda\int_0^\varepsilon k(t,\tau)\mu(\tau)d\tau.$$

Егер $t\ge\varepsilon\ge0$ болғанда $k(t,\tau)$ ядросы шектелген екендігі анық, бұдан (27) интегралдық теңдеу шешімділігінен тізбектеп жуықтау әдісі шығады. Сонымен, егер (26) теңдеудің аз шешімі белгілі болса, онда бүтін шешімі Пикара әдісімен табылады.

3. Сипаттамалық интегралдық теңдеулер. (17) және (22) теңдеулері үшін сипаттамалық интегралдық теңдеулер болып келесі одақтас теңдеулер жұбы есептеледі:

$$K_\lambda\mu\equiv(I-\lambda K)\mu\equiv\mu(t)-\lambda\int_0^t k(t,\tau)\mu(\tau)d\tau=f_1(t),t\in R_+; \qquad (28)$$

$$K_\lambda^* v \equiv \left(I - \lambda K^*\right) v \equiv v(t) - \lambda \int_t^\infty k(\tau, t) v(\tau) d\tau = g_1(t), t \in R_+; \tag{29}$$

$$k(t,\tau) = \left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \frac{(2\omega-1)^{3/2}\left(\alpha(t)\right)^{\frac{4\omega-3}{\omega}}\left(\left(\alpha(\tau)\right)^{1/\omega}\right)'}{2\sqrt{\pi}\left(\left(\alpha(t)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}} - \left(\alpha(\tau)\right)\frac{2\omega-1}{\omega}\right)3/2} \exp\left(\frac{(2\omega-1)\left(\alpha(t)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}\left(\alpha(\tau)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}}{4\left(\alpha(t)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}} - 1\left(\alpha(\tau)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}}\right). \tag{30}$$

$k(t,\tau)$ ядросы қандай қасиеттерді қанағаттандырса, сипаттамалық теңдеудің $k_2(t,\tau)$ ядросы да сондай қасиеттерге ие және

$$\int_0^t k(t,\tau) d\tau = 1, \forall t \in (0, \infty) \tag{31}$$

болғандықтан, (18) шектік арақатынас орынды.

(23) және (30) интегралдық оперторлардың түрінде $k_2(t,\tau)$ және $k(t,\tau)$ ядроларын келесі түрде жазамыз:

$$k_2(t,\tau) = P_2(t,\tau)\exp\left\{-Q_2(t,\tau)\right\}, k(t,\tau) = P(t,\tau)\exp\left\{-Q(t,\tau)\right\},$$

мұндағы

$$P_2(t,\tau) = \left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \frac{\alpha(t)}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}, Q_2(t,\tau) = \frac{\alpha^2(t)}{4(t-\tau)};$$

$$P(t,\tau) = \left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \frac{(2\omega-1)^{3/2}\left(\alpha(t)\right)^{\frac{4\omega-3}{\omega}}\left(\left(\alpha(\tau)\right)^{1/\omega}\right)'}{2\sqrt{\pi}\left(\left(\alpha(t)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}\right)^{3/2}};$$

$$Q(t,\tau) = (2\omega-1)\frac{\left(\alpha(t)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}\left(\alpha(\tau)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}}{4\left(\left(\alpha(t)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}\left(\alpha(\tau)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}\right)}.$$

Теорема 1. Егер $\alpha(t) = \left[t\left(1 + \alpha_0(t)\right)\right]^\omega$, мұндағы $\alpha_0(t) = t^\beta \sigma(t), \beta \ge 0$, ал $0 \le t \le \infty, u\left|\sigma(t)\right| \le C, \sigma(t) \ne 0$ үшін $\sigma(t)$ екі рет үзіліссіз дифференциалданатын болса, онда келесі теңсіздік орындалады:

$$\left|k_2(t,\tau) - k(t,\tau)\right| \le C(\omega)\left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \frac{t^{\omega-1}}{\sqrt{t-\tau}}\left[\exp\left(-Q(t,\tau)/2\right) + \exp\left(-Q_2(t,\tau)/2\right)\right], \tag{32}$$

және шектік қатыс дұрыс

$$\lim_{t \to +0} \int_0^t \left[k_2(t,\tau) - k(t,\tau)\right] d\tau = 0. \tag{33}$$

Алдын ала бірнеше леммалар дәлелдейміз.

Лемма 1. Егер $\alpha_0(t)$ бірсарынды өспелі функция болса, онда келесі теңсіздік орындалады:

$$2\omega - 1 \le \frac{\left[t\left(1+\alpha_0(t)\right)\right]^{2\omega-1} - \left[\tau\left(1+\alpha_0(\tau)\right)\right]^{2\omega-1}}{\left[t\left(1+\alpha_0(t)\right)\right]^{2\omega-2}\left(1 + \alpha_0(t_1) + t_1\alpha_0'(t_1)\right)(t-\tau)} \le 1, \quad \frac{1}{2} \le \omega \le 1 \text{ үшін;}$$

$$1 \le \frac{\left[t\left(1+\alpha_0(t)\right)\right]^{2\omega-1} - \left[t\left(1+\alpha_0(\tau)\right]^{2\omega-1}\right.}{\left[t\left(1+\alpha_0(t)\right)\right]^{2\omega-2}\left(1 + \alpha_0(t_1) + t_1\alpha_0'(t_1)\right)(t-\tau)} \le 2\omega - 1, \quad \omega \ge 1 \text{ үшін,}$$

мұндағы $t_1 = \tau + \theta_1(t-\tau), 0 \le \theta_1 \le 1$.

Лемма 1-дің дәлелденуі.

$$2\omega-1\le\frac{1-x^{2\omega-1}}{1-x}\le 1,\text{ егер }\frac{1}{2}\le\omega\le 1,0\le x\le 1.$$

$$1\le\frac{1-x^{2\omega-1}}{1-x}\le 2\omega-1,\text{ егер }\omega\ge 1,0\le x\le 1.$$

$\omega\ge 1$ болсын, онда $0\le\tau\le t$ үшін аламыз

$$\left[t\left(1+\alpha_0\left(t\right)\right)\right]^{2\omega-1}\left(t-\tau+t\alpha_0\left(t\right)-\tau\alpha_0\left(\tau\right)\right)\le\left[t\left(1+\alpha_0\left(t\right)\right)\right]^{2\omega-1}-\left[t\left(1+\alpha_0\left(\tau\right)\right)\right]^{2\omega-1}\le$$

$$\le\left(2\omega-1\right)\left[t\left(1+\alpha_0\left(t\right)\right)\right]^{2\omega-1}\left(t-\tau+t\alpha_0\left(t-\tau\alpha_0\left(\tau\right)\right)\right).$$

Лагранж формуласының көмегімен

$$t\alpha_0\left(t\right)-\tau\alpha_0\left(\tau\right)=\left(\alpha_0\left(t_1\right)+t_1\alpha_0{}'\left(t_1\right)\right)\left(t-\tau\right),$$

мұндағы $t_1=\tau+\theta_1\left(t-\tau\right),0\le\theta_1\le 1.$

$\frac{1}{2}\le\omega\le 1$ жағдайы да осыған ұқсас.

Лемма 2. Егер $\alpha\left(t\right)=\left[t\left(1+\alpha_0\left(t\right)\right)\right]^{\omega}$ функциясы, мұндағы $\alpha_0\left(t\right)=t^{\beta}\sigma\left(t\right),\beta\ge 0$ және $0\le t\le\infty$, и $\left|\sigma\left(t\right)\right|\le C$ үшін $\alpha_0\left(t\right)$ бірсарынды өспелі болса, онда келесі теңсіздік орындалады:

$$\left|P_2\left(t,\tau\right)-P\left(t,\tau\right)\right|\le M\left(\frac{\alpha\left(t\right)}{\alpha\left(\tau\right)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{t^{\omega+\beta}}{\left(t-\tau\right)^{3/2}}.$$

Лемма 2-нің дәлелденуі.

$$\left|P_2\left(t,\tau\right)-P\left(t,\tau\right)\right|=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{\alpha\left(t\right)}{\alpha\left(\tau\right)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\left|\frac{\left(2\omega-1\right)^{3/2}\left(\alpha\left(t\right)\right)^{\frac{4\omega-3}{\omega}}\left(\left(\alpha\left(\tau\right)\right)^{1/\omega}\right)'}{\left(\left(\alpha\left(t\right)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}-\left(\alpha\left(\tau\right)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}\right)^{3/2}}-\frac{\alpha\left(t\right)}{\left(t-\tau\right)^{3/2}}\right|=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{\alpha\left(t\right)}{\alpha\left(\tau\right)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{1}{\left(\left(\alpha\left(t\right)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}\right)^{3/2}}\left|\left(2\omega-1\right)^{3/2}\left(\alpha\left(t\right)\right)^{\frac{4\omega-3}{\omega}}\left(\left(\alpha\left(\tau\right)\right)^{1/\omega}\right)'-\alpha\left(t\right)\left[\frac{\left(\alpha\left(t\right)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}-\left(\alpha\left(\tau\right)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}}{t-\tau}\right]^{3/2}\right|=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{\left(\frac{\alpha\left(t\right)}{\alpha\left(\tau\right)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}}{\left(\left(\alpha\left(t\right)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}-\left(\alpha\left(\tau\right)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}\right)^{3/2}}\left|\begin{array}{l}\left(2\omega-1\right)^{3/2}\left[t\left(1+\alpha_0\left(t\right)\right)\right]^{4\omega-3}\left(1+\alpha_0\left(\tau\right)+\tau\alpha_0{}'\left(\tau\right)\right)-\left[t\left(1+\alpha_0\left(t\right)\right)\right]^{\omega}\\ \left\{\left(\left(\alpha\left(\tau\right)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}\right)'_{|\tau=t}-\frac{1}{2}\left(\left(\alpha\left(\tau\right)\right)^{\frac{2\omega-1}{\omega}}\right)''_{|\tau=t_2}\left(t-\tau\right)\right\}^{3/2}\end{array}\right|,$$

мұндағы $t_2=\tau+\theta_2\left(t-\tau\right),0\le\theta\le 1.$ Сол сияқты $\alpha\left(t\right)=\left(t\left(1+\alpha_0\left(t\right)\right)\right)^{\omega}$ болғандықтан, 1-лемманы ескере отырып, келесі теңсіздікті аламыз:

$$\left|P_2\left(t,\tau\right)-P\left(t,\tau\right)\right|=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{\alpha\left(t\right)}{\alpha\left(\tau\right)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{1}{\left(\left(t\left(1+\alpha_0\left(t\right)\right)\right)^{2\omega-1}-\left(\tau\left(1+\alpha_0\left(\tau\right)\right)\right)^{2\omega-1}\right)^{3/2}}\times$$

$$\times\left|\begin{array}{l}\left(2\omega-1\right)^{3/2}\left[t\left(1+\alpha_0\left(t\right)\right)\right]^{4\omega-3}\left(1+\alpha_0\left(\tau\right)+\tau\alpha_0{}'\left(\tau\right)\right)-\\ -\left[t\left(1+\alpha_0\left(t\right)\right)\right]^{\omega}\left\{\left(\left(t\left(1+\alpha_0\left(t\right)\right)\right)^{2\omega-1}\right)'-\frac{1}{2}\left(\left(t_2\left(1+\alpha_0\left(t_2\right)\right)\right)^{2\omega-1}\right)''\left(t-\tau\right)\right\}^{3/2}\end{array}\right|\le$$

$$\le \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \left| \begin{array}{l} \dfrac{(2\omega-1)^{3/2}\left[t(1+\alpha_0(t))\right]^{4\omega-3}\left(1+\alpha_0(\tau)+\tau\alpha_0{}'(\tau)\right)}{\delta^{3/2}(\omega)\left[t(1+\alpha_0(t))\right]^{3\omega-3}\left(1+\alpha_0(t)+t\alpha_0{}'(t)\right)^{3/2}(t-\tau)^{3/2}} - \\ -\dfrac{\left[t(1+\alpha_0(t))\right]^{\omega}}{\delta^{3/2}(\omega)\left[t(1+\alpha_0(t))\right]^{3\omega-3}\left(1+\alpha_0(t)+t\alpha_0{}'(t)\right)^{3/2}(t-\tau)^{3/2}} \\ 1/2(2\omega-1)(2\omega-2)\left[t_2(1+\alpha_0(t_2))\right]^{2\omega-3}\left(1+\alpha_0(t_2)+t_2\alpha_0{}'(t_2)\right)^{2}(t-\tau)- \\ -1/2(2\omega-1)\left[t_2(1+\alpha_0(t_2))\right]^{2\omega-2}\left[2\alpha_0(t_2)+t_2\alpha_0{}''(t_2)\right](t-\tau)^{3/2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \left| \begin{array}{l} \dfrac{(2\omega-1)^{3/2}\left[t(1+\alpha_0(t))\right]^{4\omega-3}\left(1+\alpha_0(\tau)+\tau\alpha_0'(\tau)\right)}{\delta^{3/2}(\omega)\left[t(1+\alpha_0(t))\right]^{3\omega-3}\left(1+\alpha_0(t)+t\alpha_0'(t)\right)^{3/2}(t-\tau\ )^{3/2}} - \\ -\dfrac{(2\omega-1)^{3/2}\left[t(1+\alpha_0(t))\right]^{4^{\omega-3}}\left(1+\alpha_0(t)+t\alpha_0'(t)\right)^{3/2}}{\delta^{3/2}(\omega)\left[t(1+\alpha_0(t))\right]^{3\omega-3}\left(1+\alpha_0(t)\right)+t\alpha_0'(t)^{3/2}(t-\tau)^{3/2}}\left\{1-\frac{1}{2}(2\omega-2)\right. \end{array} \right| \times$$

$$\times\left[t(1+\alpha_0(t))\right]^{2-2\omega}\left(1+\alpha_0(t)\right)+t\alpha_0'(t)^{-1}\left[t_2(1+\alpha_0(t_2))\right]^{2\omega-3}\left(1+\alpha_0(t_2)+t_2\alpha_0{}'(t_2)\right)^{2}(t-\tau)-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \left| \begin{array}{l} \dfrac{(2\omega-1)^{3/2}\left[t(1+\alpha_0(t))\right]^{4\omega-3}\left(1+\alpha_0(\tau)+\tau\alpha_0{}'(\tau)\right)}{\delta^{3/2}(\omega)\left[t(1+\alpha_0(t))\right]^{3\omega-3}\left(1+\alpha_0(t)+t\alpha_0{}'(t)\right)^{3/2}(t-\tau)^{3/2}} - \\ \dfrac{(2\omega-1)^{3/2}\left[t(1+\alpha_0(t))\right]^{4\omega-3}\left(1+\alpha_0(t)+t\alpha_0{}'(t)\right)}{\delta^{3/2}(\omega)\left[t(1+\alpha_0(t))\right]^{3\omega-3}\left(1+\alpha_0(t)+t\alpha_0{}'(t)\right)^{3/2}(t-\tau)^{3/2}} - \end{array} \right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \frac{(2\omega-1)^{3/2}\left[t(1+\alpha_0(t))\right]^{4\omega-3}\left(\alpha_0(\tau)+\tau\alpha_0'(\tau)\right)-\alpha_0(t)-t\alpha_0{}'(t)^{3/2}}{\delta^{3/2}(\omega)\left[t(1+\alpha_0(t))\right]^{3\omega-3}\left(1+\alpha_0(t)+t\alpha_0{}'(t)\right)^{3/2}(t-\tau)^{3/2}},$$

мұнда

$$\delta(\omega)=\begin{cases}2\omega-1, 1/2\le\omega\le 1;\\ 1, \omega\ge 1.\end{cases}$$

t жеткілікті аз деп есептеп, яғни

$$\alpha_0(t)+t\alpha_0(t)\le 1 \tag{34}$$

шарты орындалатындай деп есептесек,

$$\left|P_2(t,\tau)-P(t,\tau)\right|\le\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{(2\omega-1)^{3/2}2^{\omega}t^{\omega}\alpha_0(t)}{\delta^{3/2}(\omega)(t-\tau)^{3/2}}\le\bar{M}\left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{t^{\omega+\beta}}{(t-\tau)^{3/2}}$$

орындалады. Сонымен, лемма 2 дәлелденді.

Әдебиеттер тізімі

1 *Дженалиев М.Т.* О нагруженных уравнениях с периодическими граничными условиями // Дифф. уравнения. — М., 2001. — Т. 37. — № 1. — С. 48–54.

2 *Рамазанов М.И.* О краевой задаче для «существенно» нагруженного параболического уравнения в неограниченных областях // Докл. АМАН. — Нальчик, 2004. — Т. 7. — № 1. — С. 84–91.

М.Т.Дженалиев, Б.А.Шалдыкова, Б.С.Кусайынова

Краевая задача для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности

В статье рассматриваются граничные задачи для нагруженного оператора теплопроводности в четверти плоскости, относящегося к классу функционально-дифференциальных операторов и имеющего вид: $Lu+\lambda Bu$, где соответственно L — дифференциальная, а B — нагруженная части. Особенностью рассматриваемого оператора является то, что, во-первых, спектральный параметр λ является коэффициентом при нагруженном слагаемом, во-вторых, порядок производной в нагруженном слагаемом равен порядку дифференциальной части оператора и, в-третьих, точка нагрузки, определяемая функцией $\overline{x}(t)$, движется с переменной скоростью, т.е. производная $\overline{x}'(t)$ не всегда равна нулю.

M.T.Dzhenaliyev, B.A.Shaldykova, B.S.Kusaiynova

Boundary problem for spectrally loaded operator of heat conduction

Border problems are considered In work for loaded operator heat conduction in fourth planes, referring to class function-differential operator and being of the form of: $Lu+\lambda Bu$, where accordingly L — differential, but B — loaded part. The Particularity of the considered operator is that, first, spectral parameter λ is a factor under loaded composed, secondly, order derived in loaded composed is an order of the differential part of operator and a third, point of the load, $\overline{x}(t)$ definied function, moves with variable velocity i.e. derivative $\overline{x}'(t)$ not always is a zero.

ӘОЖ 517.2

Қ.Жетпісов, Д.Т.Әбдыкешова

Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті

Алгебралық амалдарды оқып-үйренудің кейбір проблемалары жайлы

Мақалада ақырлы жиындарда анықталған басты және туынды амалдардың қасиеттері қарастырылды. Берілген амалдарға қатысты ерекше элементтердің (нейтралды, симметриялы, регулярлы) қасиеттерін оқытудың кейбір әдістемелері көрсетілген.

Кілтті сөздер: алгебралық жүйе, амалдарға қатысты ерекше элементтер, бинарлық бейтарап, симметриялы, регулярлы, алгебралық амалдар.

«Алгебралық амал» ұғымы «алгебралық жүйе» ұғымының негізгі құраушысы ретінде өзінің маңыздылығын жан-жақты пропедевтивтік ұғынуды талап етеді. Сонымен қатар бұл мақалада «амал» ұғымының тура индуктивті мағыналық көрінісінен аксиомалар жүйесі түрінде абстракциялы берілу жолының кезеңдеріне тоқталамыз.

Басты назар бинарлық және унарлық (бірорынды және екіорынды) амалдарға аударылады. Бұл амалдар классикалық алгебралық жүйелердің негізгі амалдарының санына енеді. Сандық жиындарды анықталған арифметикалық (рационал) амалдарға пропедевтивтік саяхаттан бастап, абстракциялық жиында берілген алгебралық амалдар концепциясына байланысты анықтамалар мен ұғымдар жүйесін оқып-зерттеу айтылады.

Жеке жағдайда бинарлық амалдардың аксиомалық берілуі мектептен белгілі, формалдық әріптік теңдіктердің арифметикалық амалдардың заңдылықтары ретінде өрнектелуі түрінен шыққандығын айта кетуге болады. «Бинарлық алгебралық амал» ұғымын анықтауға жетелеуші, көптеген анықтамалардың мағыналық кері бейнесінің баламалары болып кәдімгі қосу, көбейту, алу, бөліктік амал (бөлу) және олардың қарапайым қасиеттері болып табылады.

Алгебралық жүйелер класын абстрактілі сипаттауға байланысты қойылатын мақсаттың бірі — қарастырылатын класта анықталған жүйенің негізгі амалдары мен қатынастардың басқа қасиеттерін беруші тиімді аксиомалар жиынтығын таңдау. Бұл жағдайда амалдар мен қатынастардың басқа қасиеттері сол сияқты жүйенің құрылымдық қасиеттері толығымен осы таңдалып алынған аксиоматика негізінде анықталады, яғни олардың салдары ретінде алынады.

Амалдарды Кэли кестесінің көмегімен беру оның қасиеттері туралы маңызды мағлұматтарды тереңірек зерттеуге көмектеседі.

Табиғаттары әр түрлі n-элементті жиындарда анықталған әр түрлі алгебралық амалдардың Кэли кестесін салыстыру белгілі бір деңгейде бұл амалдардың «ұқсастығын», белгілі бір жағдайда олардың қасиеттерінің бірдей екендігін анықтауға және оларды алгебралық жүйелерді изоморфизмге дейінгі дәлдікпен оқып-зерттеу концепциясын орындауға көмегін тигізеді [1].

n-элементті жиындарда анықталған екіорынды амалдарды салыстыруды талқыласақ, амалдардың тікелей берілуіне қарағанда, олардың арасында ортақ ештеңе жоқ сияқты. Осыған қарамастан, бұл айырмашылықтың таза сыртқы екендігін, яғни белгілі бір мағынада қарастырып отырған алгебралардың бір-бірінің тура көшірмесі екендігін түсінеміз.

1. Амалдарға қатысты ерекше элементтер (нейтралды, симметриялы, регулярлы)

Мектептегі математикадан кейбір сандық емес табиғаттағы элементтерден тұратын жиындарда анықталған амалдардың белгілі бір заңдылықтарға бағынатынын білеміз.

Мысалы, жазықтықтағы барлық векторлар жиыны векторларды қосу және алу, векторларды скаляр шамаға көбейту және қарама-қарсы векторларды алу амалдарына қатысты.

Z, Q және R бүтін, рационал, нақты сандар жиындарында әрбір a саны үшін қарама-қарсы ($-a$) саны бірмәнді анықталған.

Q және R жиындарында кез келген $a \neq 0$ саны үшін a^{-1} саны бірмәнді анықталған, яғни Z, Q және R жиындарында «қарама-қарсы элементті алу» туралы айтуға болса, ал Q және R жиындарында «кері элементті алу» туралы айтуға тура келеді. Осының арқасында Z, Q және R жиындарындағы алу амалын және Q және R жиындарындағы (бөліктік) бөлу амалын қосу және көбейту амалдарын ғана қолданып анықтауға болады. Яғни, $\forall\ a,b \in Z(Q,R)$ үшін $a-b=a+(-b)$, ал $\forall\ a,b \in Q(R)$, $(b \neq 0)$, үшін $a \div b = a \cdot b^{-1}$.

«–» және «$\div$» амалдарының осындай түрде анықталуы қосу және көбейту амалдары, кері және қарама-қарсы элементтерді алу туралы айтуға болатындықтан, пропедевтивтік деңгейінде қызығушылық тудырады. Яғни қарама-қарсы және кері элементті алу негізгі болса, онда алу мен бөлу амалдары — туынды амалдар, олар негізгілерден кейбіреулердің суперпозициясының көмегімен алынған. a және b нақты сандарына арифметикалық амалдарды қолдану салдарында қайтадан нақты сан аламыз. Осы типті амалдарды *алгебралық* деп атаймыз.

Жазықтықтағы барлық векторлар жиынында анықталған векторларды скаляр көбейту амалы алгебралық емес амалға мысал болады.

Арифметикалық амалдардың заңдылықтары нақты сандарға қолданылған мыңдаған ғасырлық практикалық жұмыстардың нәтижесінде анықталған. Тек соңғы ғасырларда олар өздерінің формал әріптің теңдіктер түріндегі өрнектелуін тапты. Сондықтан нақты сандардың табиғаты осы заңдардың қалыптасуының бастау көзі болып табылады.

Кез келген табиғаттағы математикалық объектілермен көп уақыттың практика нәтижесінде алынған тәжірибе абстрактілі жиында анықталған алгебралық амалдардың жалпы концепциясын анықтауға көмегін тигізді.

Алгебралық амалдар және олардың қасиеттеріне тоқталайық.

Анықтама 1 [2]. *Егер* M *кез келген бос емес жиын және* $n \in N$ *болса, онда* $M^n = \{\langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle \mid a_i \in M; i = 1,2,...,n\}$ *арқылы* M *жиынының декарттық* n *дәрежесін белгілейміз.* M *жиынында анықталған* n***-орынды алгебралық амал*** *деп* $f : M^n \to M$ *бірмәнді (іштей) бейнелеуін айтады.*

M жиынының декарттық n дәрежесінің элементтерін n-орынды кортеж деп атайды.

Кортеж индуктивті анықталады.

$\langle a_1 \rangle = \{a_1\}$

$\langle a_1, a_2 \rangle = \{a_1; \{a_1, a_2\}\}$

– – – – – – – – – – – –

$\langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle = \langle \langle a_1, ..., a_{n-1} \rangle; a_n \rangle$

Кортеж — реттелген элементтер тізбегі.

$\langle a_1, a_2 \rangle \neq \langle a_2, a_1 \rangle$

Себебі, $\langle a_1, a_2 \rangle = \{a_1; \{a_1, a_2\}\}$; $\langle a_2, a_1 \rangle = \{a_2; \{a_2, a_1\}\}$

f бейнелеуіндегі $(a_1, a_2, ..., a_n) \in M^n$ n-орынды кортеждің бейнесін $f(a_1, a_2, ..., a_n)$ арқылы белгілейміз және ол $a_1, a_2, ..., a_n$ реттелген элементтер тізбегіне f амалын қолдану нәтижесі деп аталады.

Анықтама 2 [3]. *Егер $n = 1$ болса, f —* ***унарлық*** *(бірорынды), ал егер $n = 2$ болса, f* ***бинарлық*** *(екіорынды) амал деп аталады.* ***Нөл орынды*** *алгебралық амал деп M жиынының нақты (бөлініп алынған) элементін айтамыз.*

Екіорынды амал болған жағдайда $f(x, y)$ жазуын және f таңбасының орнына

$*$ $(\bullet$ немесе $\circ)$ таңбаларын қолданамыз.

M жиынында анықталған $*$ екіорынды амалы:

а) коммутативті деп аталады, егер $(\forall x, y \in M)$ $(x * y = y * x)$ болса;

ә) ассоциативті деп аталады, егер $\forall x, y, z \in M$ $((x * y) * z = x * (y * z))$ болса;

б) $e \in M$ элементі $*$ амалына қатысты сол (оң) нейтралды деп аталады, егер $(\forall x \in M)(e * x = x)$ $((\forall x \in M)(x * e = x))$ болса.

Бір уақытта сол және оң нейтралды болатын элемент осы амалға қатысты **нейтралды элемент** деп аталады.

в) $x \in M$ элементі $*$ амалына қатысты сол (оң) жағынан **симметрияланады** деп аталады, егер $(\exists x' \in M)$ $(x' * x = e)$ $((\exists x' \in M)$ $(x' * x = e))$ болса. Бір уақытта сол және оң жағынан симметрияланатын элемент **симметрияланатын элемент** деп аталады. M жиынында нейтралды e элементі бар деп саналады.

г) Егер a элементі $*$ амалына қатысты симметрияланатын болса, онда $a' \in M$ және $(a' * a = a * a' = e)$ орындалатын a' элементі a элементіне симметриялы деп аталады.

M жиынында анықталған $*$ алгебралық амалы үшін индуктивтік өріс анықтамасын (n–натурал саны бойынша) пайдаланып, кез келген $(a_1, a_2, ..., a_n) \in M$ үшін $a_1 * a_2 * ... * a_n$ өрнегін анықтауға болады.

Индуктивтік қадамда $(n = k + 1)$

$a_1 * a_2 * .... * a_k * a_{k+1} = (a_1 * a_2 * .... * a_k) * a_{k+1}$ деп аламыз.

$*$ амалы ассоциативті болған жағдайда кез келген $m, n \in N$, $1 \leq m \leq n - 1$ үшін

$a_1 * a_2 * .... * a_m * a_{m+1} * a_{m+2} * ... * a_n = (a_1 * a_2 * .... * a_m) * (a_{m+1} * a_{m+2} * ... * a_n)$ теңдігінің орындалатынын дәлелдеу қиын емес.

Егер $*$ ассоциативті екі орынды амалы M жиынында анықталған және осы амалға қатысты нейтралды элемент e болса, онда $a \in M$ элементінің ретін

$$\underbrace{a * a * .... * a = e}_{k\ \text{рет}}$$

теңдігі орындалатын ең кіші k саны ретінде анықтаймыз.

Сандық жиындарда екі орынды амалдардың дәстүрлі мысалдары кәдімгі «+» және «$\bullet$» амалдары болады.

1-кесте

Екіорынды амалдардың жазылуының аддитивті және мультипликативті түрлері

Амал $*$	Элементтер $a;b$	Нәтиже $a*b$	Нейтралды элемент e	Симметриялы a'	$\underbrace{a*a*....*a=e}_{k\ рет}$
Қосу $+$	Қосылғыштар $a;b$	Қосынды $a+b$	Нөл 0	Қарама-қарсы $-a$	n-еселік $n\bullet a$
Көбейту $\bullet$	Көбейткіштер $a;b$	Көбейтінді $a\bullet b$	Бір 1	Кері a^{-1}	n-дәреже a^n

Көп жағдайларда абстракциялық жиындардың өздеріне де екі орынды амалдарды белгілеу үшін осы таңбаларды пайдаланады.

Кәдімгі қосу және көбейту амалдары анықталған $M=Z(Q,\ R)$ жиындарында кез келген $a,\ b,\ c\in M$ элементтері үшін $a+c=b+c$ теңдігінен $a=b$ қатынасы алынады. $c\neq 0$ болғанда $a\cdot c=b\cdot c$ теңдігінен $a=b$ қатынасы алынады.

Анықтама 3. $\circ$ — *екіорынды алгебралық амалы M жиынында анықталған болсын, $c\in M$ элементі $\circ$-амалына қатысты сол жағынан (оң жағынан) регулярлы деп аталады, егер сәйкесінше кез келген $a,\ b\in M$ үшін $c\circ a=c\circ b$ $(a\circ c=b\circ c)$ болғандықтан, $a=b$ болса.*

Бір уақытта сол және оң жағынан (берілген амалға қатысты) регулярлы болатын элемент осы амалға қатысты ***регулярлы*** *деп аталады.*

Анықтамадан шығатын қорытынды: c элементі регулярлы болған жағдайда

$c\circ a=c\circ b,\quad a\circ c=b\circ c$ теңдіктерінен c-ға «қысқарту» орынды.

«+»–амалын кез келген $c\in M=Z(Q,\ R)$ элементінің осы амалға қатысты регулярлы болатындығын тексеру қиын емес.

Шынында, егер $a,\ b\in M$ элементтері үшін $a\oplus c=b\oplus c$ теңдігі орынды болса, $c\in M$ элементінің «+» амалына қатысты симметриялатындығын ескеріп, $(a\oplus c)\oplus(-c)=(b\oplus c)\oplus(-c)$ теңдігін аламыз.

$\oplus$ амалының ассоциативтілігінен $a\oplus(c\oplus(-c))=b\oplus(c\oplus(-c))$, немесе $a=b,$ себебі $c\oplus(-c)$ $\oplus$ амалына қатысты нейтралды элементті береді. Осыған ұқсас c-элементінің оң жағынан регулярлы болатындығы дәлелденеді.

2. Негізгі және туынды амалдар

Туынды амалдармен байланысты алгебралық амалдар мен ұғымдарды оқып-зерттемес бұрын өзімізге таныс $Z,\ Q,\ R$ сәйкесінше бүтін, рационал, нақты сандық жиындарында анықталған қосу, көбейту, қарама-қарсы және кері элементті алу сияқты амалдардан бастаған дұрыс.

Негізгі амалдарға қатысты, айта кетсек, қосу және көбейту екі орынды амалдар болса, қарама-қарсы элементті алу — біорынды амал, ал кері элементті алу амалы — бөліктік біорынды амал. Z жиынында тек қана 1 және (-1) өзара кері элементтер болса, ал Q және R жиындарында 0-ден басқа элементтердің кері элементтері бар.

Мектептегі алгебрадан таныс, арифметикалық амалдардың суперпозициясы негізінде алынған туынды амалдардың мысалдарына талдау осы амалдардың қарапайым заңдарына негізделген.

Мысалы: M жиыны $Z,\ Q,\ R$ жиындарының бірі болсын.

$\oplus$ және $\otimes$ амалдарын M жиынында келесі ережемен анықтайық:

$$(\forall x,y\in M)\ \ (x\oplus y=x+y+1),\quad (\forall x,y\in M)\ \ (x\otimes y=x+y+x\cdot y),$$

мұндағы $+$ және $\bullet$ — сәйкесінше M жиынындағы қосу және көбейту (табиғи) амалдары.

Анықтамадан $\oplus$ және $\otimes$ амалдарының M жиынындағы екі орынды амалдар екендігін көреміз. Бұл амалдардың коммутативтілік, ассоциативтілік қасиеттерін тексеру өте оңай.

Мысалы:

$$a\oplus b=b\oplus a\qquad \forall a,b\in M.$$

$$a\oplus b=a+b+1\qquad b\oplus a=b+a+1.$$

M жиынында $a+b=b+a$ болғандықтан, $a\oplus b=b\oplus a$.

$\oplus$ және $\otimes$ амалына қатысты дистрибутивтілік қасиетін көрсетейік. Яғни $(\forall x,y,z\in M)((x\oplus y)\otimes z=(x\otimes z)\oplus(y\otimes z))$.

Сонымен, M жиынының кез келген a, b, c элементтері алынып, ондағы негізгі $+$ және $\bullet$ амалдарының қасиеттеріне сүйеніп, $(a\oplus(b\otimes c)=(a\otimes c)\oplus(b\otimes c))$ теңдігі дәлелденеді. Ол үшін теңдіктің кез келген бір бөлігін (оң немесе сол) алып, түрлендірулер жасай отырып, екінші бөлігін аламыз немесе ыңғайлы түрлендірудің көмегімен теңдіктің оң және сол жақ бөліктерінен өзара тең өрнектер аламыз

А) $(a\oplus b)\otimes c=(a+b+1)\otimes c=a+b+1+c+(a+b+1)\cdot c=a+b+1+c+a\cdot c+b\cdot c+c=$
$=a+b+2c+a\cdot c+b\cdot c+1;$

Ә) $(a\otimes c)\oplus(b\otimes c)=(a\otimes c)+(b\otimes c)+1=a+c+a\cdot c+b+c+b\cdot c+1=$
$=a+b+2c+a\cdot c+b\cdot c+1.$

3. Ақырлы жиындарда анықталған амалдар. Кэли кестесінің ерекшелігі

Егер ақырлы $M(M=\{a_1,...a_n\},n\in N)$ жиынында $*$ екі орынды алгебралық амал анықталған болса, онда n жолдан, n бағанадан тұратын квадраттық (шаршылық) кесте құруға болады.

Кестенің жолдары мен бағаналары M жиынының элементтері арқылы нөмірленеді және a_i-ші жол мен a_j-ші бағананың қиылысуына осы a_i және a_j элементтеріне $*$ амалын қолданудың нәтижесі жазылады, яғни онда $a_i * a_j \in M(i,j\in\{1,2,...,n\})$ элементі тұрады. Осындай кестелерді математикада **Кэли кестесі** [4] (ағылшын математигі Кэлидің атымен) деп атайды. Кэли кестесінің құрылымын зерттеу арқылы * амалы мен қасиеттері туралы маңызды мағлұматтар алуға болады.

Мысалы, бұл кестенің бас диагоналға қатысты симметриялылығы, * амалының коммутативтілігі туралы айтады. Егер кестеде a_i нөмірлі бағана бар болып, ал жолдардың нөмірлерінің бағанасымен сәйкес келсе, онда a_i элементі $*$ амалына қатысты оң нейтралды элементі болады. Осыған ұқсас, жолдарды талдау арқылы сол нейтралды элементтің бар (жоқ) болуы туралы айта аламыз.

Егер Кэли кестесінде $(a_i * a_j)* a_k$ және $a_i *(a_j * a_k)$ элементтерінің орындарында $M(i,j,k\in\{1,2,...,n\})$ жиынының бірдей элементтері тұрса, онда $*$ амалы ассоциативті болады. Нейтралды элементтің бар болатындығы анықталған соң осы амалға қатысты симметрияланатын барлық элементтер табылады.

2-кесте

Кэли кестесі

a_j a_i	a_1	a_2	…	a_j	…	a_n
a_1	$a_1 * a_1$	$a_1 * a_2$	...	$a_1 * a_j$	...	$a_1 * a_n$
a_2	$a_2 * a_1$	$a_2 * a_2$	...	$a_2 * a_j$	...	$a_2 * a_n$
…	...	...	...	...	...	
a_i	$a_i * a_1$	$a_i * a_2$	...	$a_i * a_j$	...	$a_i * a_n$
…	...	...	...	...	...	...
a_n	$a_n * a_1$	$a_n * a_2$	...	$a_n * a_j$	...	$a_n * a_n$

Нейтралды элемент бар болған жағдайда, егер әрбір жолдағы және әрбір бағанадағы әрбір элементтер болса (M жиынының барлық элементтері барлық жолдарда және бағаналарда бар болса), онда M жиынының әрбір элементі $*$ амалына қатысты бірмәнді симметрияланатын болады. Сонымен қатар M жиынының әрбір нақты ішкі жиыны M_1 бойынша $(\forall x,y\in M_1)(x * y\in M)$ шартын тексеру арқылы $*$ амалына қатысты осы ішкі жиынның тұйықталған болатындығын; M жиынының әрбір элементі бойынша ($*$амалы ассоциативті болғанда) оның ретін анықтауға болады.

n элементі жиында берілген әр түрлі табиғатты $*$ және $\bullet$ екіорынды алгебралық амалдардың Кэли кестесін салыстыру осы амалдардың белгілі бір деңгейдегі қасиеттерінің «ұқсастығын», ал кейбір жағдайларда бұл қасиеттердің бірдей екендігін көреміз.

Изоморфизмді анықтаушы концепциялардың негізгі қарарларын аргументті түрде айқындау үшін математиканың әр түрлі салаларынан алынған алгебралық жүйелердің (алгебралардың) қарапайым мысалын, яғни негізгі жиынды жүйе мен онда анықталған әр түрлі табиғатты амалды, қарастырайық.

Мысалы: Айталық, $\varphi_0 = x;\ \varphi_1 = \frac{1}{x};\ \varphi_2 = 1 - x;\ \varphi_3 = \frac{x}{x-1};\ \varphi_4 = \frac{x-1}{x};\ \varphi_5 = \frac{1}{1-x}$ — $R - \{\ 0,\ 1\ \}$ жиынындағы бір ғана x айнымалысының функциялары болсын. Осы $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$ функциялар жиынтығында $*$ амалын келесі ережемен анықтайық:

$$\left(\forall\varphi_i;\varphi_j \in \Phi\right)\left(\varphi_i * \varphi_j = \varphi_i\left(\varphi_j\right)\right);\quad \left(i, j = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\right).$$

Яғни φ_i және φ_j функцияларына $*$ амалын қолданудың нәтижесі φ_i функциясындағы x айнымалысының орнына φ_j функциясын қойғанда шыққан күрделі функция $\varphi_i\left(\varphi_j\right)$, φ_i және φ_j функцияларына $*$ амалын қолданудың нәтижесі — $\varphi_i * \varphi_j$.

Жеке жағдайда

$$\varphi_4 * \varphi_3 = \frac{\left(\dfrac{x}{x-1} - 1\right)}{\left(\dfrac{x}{x-1}\right)} = \frac{x - x + 1}{x} = \frac{1}{x} = \varphi_1;$$

$$\varphi_3 * \varphi_4 = \frac{\left(\dfrac{x-1}{x}\right)}{\left(\dfrac{x-1}{x} - 1\right)} = \frac{x-1}{-1} = 1 - x = \varphi_2.$$

Тікелей есептеудің көмегімен $*$ амалына Φ жиында анықталған екіорынды амал болатындығын көреміз, яғни Φ жиыны $*$ амалына қатысты тұйықталған. 3-кестеден алатынымыз:

- φ_0 элементі $*$ амалына қатысты нейтралды элемент;
- Φ жиынының әрбір элементі симметрияланады;
- $*$ амалы коммутативті;
- φ_1, φ_2, φ_3 — 2-ші ретті, φ_4, φ_5 — 3-ші ретті элементтер;
- $*$ амалына қатысты $\{\varphi_0\}$; $\{\varphi_0;\varphi_1\}$; $\{\varphi_0;\varphi_2\}$; $\{\varphi_0;\varphi_3\}$; $\{\varphi_0;\varphi_4;\varphi_5\}$ ішкі жиындары тұйықталған. Тұйықталған ішкі жиындардың элементтерінің саны Φ жиынының элементтерінің санының бөлгіші болады.

3-кесте

$*$ –амалының Кэли кестесі

φ_j φ_i	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
φ_0	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
φ_1	φ_1	φ_0	φ_5	φ_4	φ_3	φ_2
φ_2	φ_2	φ_4	φ_0	φ_5	φ_1	φ_3
φ_3	φ_3	φ_5	φ_4	φ_0	φ_2	φ_1
φ_4	φ_4	φ_2	φ_3	φ_1	φ_5	φ_0
φ_5	φ_5	φ_3	φ_1	φ_2	φ_0	φ_4

Қорытынды

«Алгебралық амал» ұғымын енгізу мен оқып-зерттеу мысалы арқылы оның интуитивті мағыналық көрінісінен бастап қазіргі заманғы абстрактілі берілу әдісіне дейінгі қалыптасу жолдары сараланып, ұғымдардың спиралды тармақталу принципі жүйелі орындалды.

Сандық жиындардағы нақты екіорынды амалдардың қасиеттерін анықтаудан аксиомалық берілген амалдар үшін осы қасиеттердің формал баламасын дәлелдеуде, нақтыдан абстрактілікке диалектикалық өрлеудің қорытындысы болатын, танымның фундаменталды принципін көруге болады. Екіорынды алгебралық амалды беру үшін құрылған Кэли кестесін пайдалану негізінде «алгебралық жүйе» ұғымын түсінудің пропедевтивтік әдістемесін, алгебралық жүйелерді изоморфизмге дейінгі дәлдікпен оқып-зерттеу концепциясының негіздік қарарларын пропедевтивтік тұрғыдан іске асыруды қалыптастыруға болады.

Әдебиеттер тізімі

1 *Жетпісов Қ.* Алгебралық жүйелердегі конгруэнция қатынасы және оны оқып–зерттеудің әдістемелік тұрғылары // Қарағанды университетінің хабаршысы. — 2009. — № 3(55). — 12–18-б.

2 *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. — 392 с.

3 *Гончаров С.С., Ершов Ю.Л., Самохвалов К.Ф.* Введение в логику и методологию науки. — М.: Интерпракс, 1994. — 255 с.

4 *Курош А.Г.* Теория групп. — М.: Наука, 1967. — 648 с.

К.Жетписов, Д.Т.Абдыкешова

О некоторых проблемах обучения алгебраичным операциям

В статье рассматриваются свойства основных и производных операций, определенные в конечных множествах. Показана некоторая методика изучения свойств особых элементов (нейтральные, симметричные, регулярные) относительно данных операций.

K.Zhetpisov, D.T.Abdykeshova

Some problems in learning of algebraic operations

In given articled properties of main and derived operations defined in finite sets are considered. Some techniques of studying of properties of singular elements (identity elements, symmetrical elements, regular elements) concerning the given operations is shown.

УДК 517.95

А.Ж.Жакупбекова, Б.С.Кошкарова

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

О свойствах некоторых интегральных операторов в весовых пространствах Гельдера

В статье рассмотрены сингулярные интегральные операторы, определенные в ограниченной области плоскости годографа. Исследуются свойства операторов в весовых пространствах Гельдера. Доказаны теоремы об их ограничении в данном пространстве.

Ключевые слова: линейный ограниченный оператор, весовое пространство, Гельдер, аналитическая функция, принцип максимума, норма.

В области $K = K\{z : |z| < 1\}$ комплекснозначной плоскости $z = x + iy$ рассмотрим операторы

$$\Pi_1\rho = -\frac{\overline{w}}{\pi}\iint_K \frac{\bar{\zeta}\overline{\rho(\zeta)}}{(1-\bar{\zeta}w)^2}d\xi d\eta\,,\ \zeta = \xi + i\eta\,; \tag{1}$$

$$T_1\rho = -\frac{1}{\pi}\iint_K \frac{\overline{\rho(\zeta)}}{1-\bar{\zeta}z}d\xi d\eta\,. \tag{2}$$

Подобного рода операторы возникают при исследовании некоторых задач математической физики, гидродинамики, решение которых сводится к решению интегральных уравнений, содержащих различные интегральные операторы. Свойства операторов (1) и (2) ранее были исследованы в весовом классе Гельдера $C^{0,\mu}_{-1,0}(K)$, $0 < \mu < 1$ [1]. В данной работе мы хотим обобщить полученные ранее результаты на весовое пространство $C^{0,\mu}_{k,\lambda}(K)$, $0 < \mu < 1$, $0 \le \lambda \le 1$, k — целое число, $k + \lambda < 0$, где норма задается равенством [2]

$$\|\rho\|_{C^{0,\mu}_{k,\lambda}} = r^{\mu-k-\lambda}_{w\cup\zeta}\frac{|\rho(w)-\rho(\zeta)|}{|w-\zeta|^{\mu}} + \sup_{w\in G}|\rho(w)|\cdot r_w^{-(k+\lambda)}\,, \tag{3}$$

а весовую функцию $r_{w\cup\zeta}$ возьмем как минимальное расстояние от точек $w, \zeta \in K$ до точек единичной окружности $\Gamma = \partial K$: $t^* = \{-1,1\}$, т.е.

$$r_{w\cup\zeta} = \min\{|w-t^*|, |\zeta-t^*|\}\,.$$

Теорема 1. *Пусть* $\rho \in C^{0,\mu}_{k,\lambda}(K)$, $0 < \mu < 1$, $0 \le \lambda \le 1, \mu - k - \lambda < 2$. *Тогда* $\Pi_1\rho$ *является линейным ограниченным оператором в* $C^{0,\mu}_{k,\lambda}(K)$, *отображающим его в себя.*

Доказательство.

Запишем оператор (1), обозначив через функцию $g(w) = \Pi_1\rho(w)$, в виде

$$g_1(w) = \frac{\overline{w}}{\pi}\iint_K \frac{\bar{\zeta}\left(\overline{\rho(\zeta)} - \overline{\rho(w)}\right)}{\left(1-\bar{\zeta}w\right)^2}d\xi d\eta + \frac{\overline{w}\overline{\rho(w)}}{\pi}\iint_K \frac{\bar{\zeta}}{\left(1-\bar{\zeta}w\right)^2}d\xi d\eta\,. \tag{4}$$

Поскольку (см. [3])

$$\frac{1}{\pi}\iint_K \frac{d\xi d\eta}{1-\bar{\zeta}w} = 1\,,\ w \in K\,, \tag{5}$$

то

$$\frac{1}{\pi}\iint_K \frac{\bar{\zeta}d\xi d\eta}{(1-\bar{\zeta}w)^2} = \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{\pi}\iint_K \frac{d\xi d\eta}{1-\bar{\zeta}w}\right) = 0\,,\ w \in K\,. \tag{6}$$

Тогда для $|\zeta| < 1$ и $|w| < 1$ из (4) на основании (6) имеем

$$|g_1(w)| \le \frac{|\overline{w}|}{\pi}\iint_K \frac{|\bar{\zeta}|\left|\overline{\rho(\zeta)} - \overline{\rho(w)}\right|}{|\zeta-w|^{\mu}} r^{\mu-k-\lambda}_{\zeta\cup w} \cdot \frac{|\zeta-w|^{\mu}\, r^{-(\mu-k-\lambda)}_{\zeta\cup w}}{\left|1-\bar{\zeta}w\right|^2}d\xi d\eta \le \frac{\|\rho\|}{\pi}\iint_K \frac{|\zeta-w|^{\mu}\, r^{-(\mu-k-\lambda)}_{\zeta\cup w}}{\left|1-\bar{\zeta}w\right|^2}d\xi d\eta. \tag{7}$$

Здесь нам понадобится оценить интеграл вида

$$J_1 = \frac{1}{\pi}\iint\limits_K \frac{\left|\zeta - w\right|^{\mu} r_{\zeta\cup w}^{-(\mu-k-\lambda)}}{\left|1-\overline{\zeta}w\right|^2} d\xi d\eta.$$

Рассмотрим два случая

1. Пусть $\left|w\right| \le \frac{1}{2}$, тогда $\left|1-\overline{\zeta}w\right| \ge 1-\left|\zeta\right|\left|w\right| \ge \frac{1}{2}$, значит,

$$J_1 \le \frac{2^{\mu+2}}{\pi}\iint\limits_K \frac{d\xi d\eta}{r_{\zeta\cup w}^{\mu-k-\lambda}} \le 2^{\mu+2}\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{K_i\bigcap K}\frac{d\xi d\eta}{r_{\zeta\cup w}^{\mu-k-\lambda}} + \frac{1}{\pi}\iint\limits_{K\setminus\bigcup K_i}\frac{d\xi d\eta}{r_{\zeta\cup w}^{\mu-k-\lambda}}\right).$$

Здесь и далее через K_i, $i=\overline{1,2}$, обозначим круг радиуса $\frac{r_w}{2}$ с центром в точке $t^* = \{-1,1\}$. Для $\zeta \in K_i \bigcap K$, $\forall i = \overline{1,2}$ имеем $r_{\zeta\cup w} = r_{\zeta}$, а для $\zeta \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{2} K_i$ выполняется неравенство $r_{\zeta\cup w} \ge \frac{r_w}{2}$. Тогда

$$J_1 \le 2^{\mu+2}\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{K_i}\frac{d\xi d\eta}{r_{\zeta}^{\mu-k-\lambda}} + \left(\frac{2}{r_w}\right)^{\mu-k-\lambda}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\tilde{K}} d\xi d\eta\right) \le 2^{\mu+1}\left(\frac{4}{\pi}\iint\limits_{K_i}\frac{d\xi d\eta}{|\zeta - t_i|^{\mu-k-\lambda}} + \left(\frac{2}{r_w}\right)^{\mu-k-\lambda}\cdot 2^{2n} r_w^2\right) \le$$

$$\le 4\cdot\frac{2^{2+\lambda+k-\mu}}{1+\lambda+k-\mu}\left(\frac{r_w}{2}\right)^{2+\lambda+k-\mu} + 2^{2n+\mu-k-\lambda+1} r_w^{2+k+\lambda-\mu} \le r_w^{2+k+\lambda-\mu}\left(\frac{8}{1+k+\lambda-\mu} + 2^{2n+\mu-k-\lambda+1}\right) \le C_1, \qquad (8)$$

где $\tilde{K}$ — круг радиуса $2^n r_w < 2$: $K \subset \tilde{K}$, а через C_i будем обозначать постоянные величины.

2. В случае, когда $\left|w\right| > \frac{1}{2}$, поступим следующим образом:

$$J_1 = \frac{1}{\pi}\iint\limits_K \frac{\left|\zeta - w\right|^{\mu} r_{\zeta\cup w}^{-(\mu-k-\lambda)}}{\left|w\right|^2\left|\zeta - \frac{1}{\overline{w}}\right|^2} d\xi d\eta.$$

Если $w \in K$, то $w^* = \frac{1}{\overline{w}}$ будет лежать вне круга K и $\left|w^*\right| = \frac{1}{\left|\overline{w}\right|} \ge \left|w\right|$, поскольку $1 \ge \left|w\right|^2$. Заметим, что всегда для любого $w \in K$ имеет место неравенство $1-\left|w\right| \le \left|w^*\right| - 1$. Геометрически это означает, что точка w расположена всегда ближе к окружности Γ, чем ее отражение w^* относительно той же окружности. Поэтому всегда выполняется неравенство

$$\left|\zeta - w\right| \le \left|\zeta - w^*\right|. \qquad (9)$$

Тогда

$$J_1 \le \frac{4}{\pi}\iint\limits_K \frac{d\xi d\eta}{r_{\zeta\cup w}^{\mu-k-\lambda}\left|\zeta - w\right|^{2-\mu}} \le \sum_{i=1}^{2}\ \frac{4}{\pi}\iint\limits_{K_i\bigcap K}\frac{d\xi d\eta}{r_{\zeta\cup w}^{\mu-k-\lambda}\,|\zeta - w|^{2-\mu}} + \frac{4}{\pi}\iint\limits_{K\setminus\bigcup K_i}\frac{d\xi d\eta}{r_{\zeta\cup w}^{\mu-k-\lambda}\,|\zeta - w|^{2-\mu}} \le$$

$$\le \left(\frac{2}{r_w}\right)^{2-\mu}\sum_{i=1}^{2}\frac{4}{\pi}\iint\limits_{K_i\bigcap K}\frac{d\xi d\eta}{r_{\zeta}^{\mu-k-\lambda}} + \left(\frac{2}{r_w}\right)^{\mu-k-\lambda}\frac{4}{\pi}\iint\limits_{\tilde{K}}\frac{d\xi d\eta}{|\zeta - w|^{2-\mu}} \le$$

$$\le \left(\frac{2}{r_w}\right)^{2-\mu}\frac{8}{\pi}\iint\limits_{K_i}\frac{d\xi d\eta}{|\zeta - t_i|^{\mu-k-\lambda}} + \left(\frac{2}{r_w}\right)^{\mu-k-\lambda}\frac{2^{\mu+1}}{\mu}(2^n r_w)^{\mu} \le$$

$$\le \left(\frac{2}{r_w}\right)^{2-\mu}\frac{2^{6-(\mu-k-\lambda)}}{2-\mu+k+\lambda}\left(\frac{r_w}{2}\right)^{2-(\mu-k-\lambda)} + \frac{2^{\mu(n+2)+2}}{\mu} r_w^{\,k+\lambda} \le$$

$$\le r_w^{\,k+\lambda}\left(\frac{2^{6-\mu}}{2-\mu+k+\lambda} + \frac{2^{\mu(n+2)+2}}{\mu}\right) \le C_2\cdot r_w^{\,k+\lambda}. \qquad (10)$$

Сравнив коэффициенты оценок (8) и (10), находим

$$J_1 \le M_1 \cdot r_w^{\,k+\lambda}. \qquad (11)$$

Следовательно, из (7) на основании (11) имеем, что при выполнении условия $\mu - k - \lambda < 2$

$$\left|g_1(w)\right| r_w^{-(k+\lambda)} \le \frac{\|\rho\| r_w^{-(k+\lambda)}}{\pi} \iint\limits_K \frac{\left|\zeta - w\right|^{\mu} r_{\zeta\cup w}^{-(\mu-k-\lambda)}}{\left|1-\overline{\zeta}w\right|^2} d\xi d\eta \le M_1 \|\rho\|_{C_{k,\lambda}^{0,\mu}(K)}, \tag{12}$$

где $M_1 = const$, не зависящая от функции ρ.

Для двух различных точек w, $w_1 \in K$ имеем

$$g_1(w_1) - g_1(w) = \frac{\overline{w}_1(w_1 - w)}{\pi} \iint\limits_K \frac{\overline{\zeta}^2\left(\overline{\rho(\zeta)} - \overline{\rho(w_1)}\right)}{\left(1-\overline{\zeta}w_1\right)^2\left(1-\overline{\zeta}w\right)} d\xi d\eta + \frac{\overline{w}(w_1 - w)}{\pi} \iint\limits_K \frac{\overline{\zeta}^2\left(\overline{\rho(\zeta)} - \overline{\rho(w)}\right)}{\left(1-\overline{\zeta}w\right)^2\left(1-\overline{\zeta}w_1\right)} d\xi d\eta +$$

$$+\frac{\overline{w}_1 - \overline{w}}{\pi} \iint\limits_K \frac{\overline{\zeta}\left(\overline{\rho(\zeta)} - \overline{\rho(w)}\right)}{\left(1-\overline{\zeta}w_1\right)\left(1-\overline{\zeta}w\right)} d\xi d\eta + \frac{\overline{w}_1(w_1 - w)\overline{\rho(w_1)}}{\pi} \iint\limits_K \frac{\overline{\zeta}^2}{\left(1-\overline{\zeta}w_1\right)^2\left(1-\overline{\zeta}w\right)} d\xi d\eta +$$

$$+\frac{\overline{w}(w_1 - w)\overline{\rho(w)}}{\pi} \iint\limits_K \frac{\overline{\zeta}^2}{\left(1-\overline{\zeta}w_1\right)\left(1-\overline{\zeta}w\right)^2} d\xi d\eta + \frac{(\overline{w}_1 - \overline{w})\overline{\rho(w)}}{\pi} \iint\limits_K \frac{\overline{\zeta}}{\left(1-\overline{\zeta}w_1\right)\left(1-\overline{\zeta}w\right)} d\xi d.\eta. \tag{13}$$

Так как в силу (5)

$$\frac{1}{\pi} \iint\limits_K \frac{\overline{\zeta}}{\left(1-\overline{\zeta}w_1\right)\left(1-\overline{\zeta}w\right)} d\xi d\eta = \frac{1}{w_1 - w}\left(-\frac{1}{\pi} \iint\limits_K \frac{d\xi d\eta}{1-\overline{\zeta}w} + \frac{1}{\pi} \iint\limits_K \frac{d\xi d\eta}{1-\overline{\zeta}w_1} \right) = 0 \quad \forall w, w_1 \in K, \tag{14}$$

то

$$\frac{1}{\pi} \iint\limits_K \frac{\overline{\zeta}^2}{\left(1-\overline{\zeta}w_1\right)\left(1-\overline{\zeta}w\right)^2} d\xi d\eta = \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{\pi} \iint\limits_K \frac{\overline{\zeta}}{\left(1-\overline{\zeta}w_1\right)\left(1-\overline{\zeta}w\right)} d\xi d\eta \right) = 0 \quad \forall w, w_1 \in K.$$

Тогда для $\forall w, w_1 \in K : \left|w\right| < 1, \left|w_1\right| < 1$ из равенства (13) имеем

$$\left|g_1(w_1) - g_1(w)\right| \le \frac{|w_1 - w|}{\pi} \iint\limits_K \frac{\left|\rho(\zeta) - \rho(w_1)\right|}{\left|\zeta - w_1\right|^{\mu}} r_{\zeta\cup w_1}^{\mu-k-\lambda} \cdot \frac{\left|\zeta - w_1\right|^{\mu} r_{\zeta\cup w_1}^{-(\mu-k-\lambda)}}{\left|1-\overline{\zeta}w_1\right|^2 \left|1-\overline{\zeta}w\right|} d\xi d\eta +$$

$$+\frac{|w_1 - w|}{\pi} \iint\limits_K \frac{\left|\rho(\zeta) - \rho(w)\right|}{\left|\zeta - w\right|^{\mu}} r_{\zeta\cup w}^{\mu-k-\lambda} \cdot \frac{\left|\zeta - w\right|^{\mu} r_{\zeta\cup w}^{-(\mu-k-\lambda)}}{\left|1-\overline{\zeta}w\right|^2 \left|1-\overline{\zeta}w_1\right|} d\xi d\eta +$$

$$+\frac{|w_1 - w|}{\pi} \iint\limits_K \frac{\left|\rho(\zeta) - \rho(w)\right|}{\left|\zeta - w\right|^{\mu}} r_{\zeta\cup w}^{\mu-k-\lambda} \cdot \frac{\left|\zeta - w\right|^{\mu} r_{\zeta\cup w}^{-(\mu-k-\lambda)}}{\left|1-\overline{\zeta}w\right| \left|1-\overline{\zeta}w_1\right|} d\xi d\eta \le |w_1 - w|^{\mu} \|\rho\| \left(2J_2(2) + J_2(1)\right), \tag{15}$$

где

$$J_2(\alpha) = \frac{|w_1 - w|^{1-\mu}}{\pi} \iint\limits_K \frac{\left|\zeta - w\right|^{\mu} r_{\zeta\cup w}^{-(\mu-k-\lambda)}}{\left|1-\overline{\zeta}w\right|^{\alpha} \left|1-\overline{\zeta}w_1\right|} d\xi d\eta, \quad \alpha = 1, 2.$$

Данный интеграл при выполнении условия $\mu - k - \lambda < 2$ имеет следующую оценку [4]:

$$J_2(\alpha) \le \frac{C_3}{r_{w\cup w_1}^{\mu-k-\lambda}}, \quad \alpha = 1, 2. \tag{16}$$

Тогда на основании полученной оценки (16) из (15) будем иметь

$$\frac{\left|g_1(w_1) - g_1(w)\right|}{|w_1 - w|^{\mu}} \cdot r_{w_1\cup w}^{\mu-k-\lambda} \le M_2 \|\rho\|_{C_{k,\lambda}^{0,\mu}(K)}. \tag{17}$$

Таким образом, на основании равенства (3) с учетом оценок (12) и (17) получим

$$\left\|\Pi_1\rho(w)\right\|_{C_{k,\lambda}^{0,\mu}(K)} = \left\|g_1(w)\right\|_{C_{k,\lambda}^{0,\mu}(K)} = \frac{\left|g_1(w_1) - g_1(w)\right|}{|w_1 - w|^{\mu}} \cdot r_{w_1\cup w}^{\mu-k-\lambda} + \left|g_1(w)\right| r_w^{-(k+\lambda)} \le (M_1 + M_2)\|\rho\|_{C_{k,\lambda}^{0,\mu}(K)},$$

что и требовалось доказать. ■

Теперь исследуем свойства оператора $\mathrm{T}_1\rho$ вида (2) в весовом классе Гельдера $C_{k,\lambda}^{0,\mu}(K)$. Оператор $\mathrm{T}_1\rho$ можно представить в виде

$$\mathrm{T}_1\rho = -\frac{1}{\overline{w}}\int_0^w \left(-\frac{\overline{w}}{\pi}\iint_K \frac{\overline{\zeta\rho(\zeta)}}{\left(1-\overline{\zeta}w\right)^2} d\xi d\eta \right) dw = \frac{1}{\overline{w}}\int_0^w \Pi_1\rho dw.$$

Заметим, что $\mathrm{T}_1\rho$ представляет собой аналитическую в K, непрерывную в $\overline{K}$ функцию, следовательно, по принципу максимума модуля для аналитической функции, учитывая оценку (12), находим

$$\left|\mathrm{T}_1\rho\right| \le \max\left|\Pi_1\rho(w)\right| \le M_1\left\|\rho\right\|_{C^{0,\mu}_{k,\lambda}(K)}. \tag{18}$$

Для двух различных точек w, $w_1 \in K$ разность значений оператора с учетом (14) запишем так:

$$\mathrm{T}_1(w_1) - \mathrm{T}_1(w) = -\frac{w-w_1}{\pi}\iint_K \frac{\overline{\zeta}\left(\overline{\rho(\zeta)}-\overline{\rho(w)}\right)}{\left(1-\overline{\zeta}w\right)\left(1-\overline{\zeta}w_1\right)} d\xi d\eta .$$

Отсюда в силу оценки (16) при $\left|\zeta\right|<1$ получим

$$\left|\mathrm{T}_1(w_1) - \mathrm{T}_1(w)\right| \le \frac{\left|w-w_1\right|}{\pi}\iint_K \frac{\left|\overline{\zeta}\right|\left|\overline{\rho(\zeta)}-\overline{\rho(w)}\right|}{\left|\zeta-w\right|^{\mu}} \frac{\left|\zeta-w\right|^{\mu} r_{\zeta\cup w}^{-(\mu-k-\lambda)}}{\left|1-\overline{\zeta}w\right|\left|1-\overline{\zeta}w_1\right|} d\xi d\eta \le$$

$$\le \left|w-w_1\right|^{\mu} J_2(1)\left\|\rho\right\| \le \frac{\left|w-w_1\right|^{\mu}}{r_{w_1\cup w}^{\mu-k-\lambda}} C_3\left\|\rho\right\|_{C^{0,\mu}_{k,\lambda}(K)}. \tag{19}$$

Следовательно, на основании (18) и (19) имеем

$$\left\|\mathrm{T}_1\rho(w)\right\|_{C^{0,\mu}_{k,\lambda}(K)} = \frac{\left|\mathrm{T}_1(w_1) - \mathrm{T}_1(w)\right|}{\left|w_1-w\right|^{\mu}} \cdot r_{w_1\cup w}^{\mu-k-\lambda} + \left|\mathrm{T}_1(w)\right| r_w^{\beta} \le (C_3+M_1)\left\|\rho\right\|_{C^{0,\mu}_{k,\lambda}(K)} \le M_3\left\|\rho\right\|_{C^{0,\mu}_{k,\lambda}(K)}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\rho \in C^{0,\mu}_{k,\lambda}(K)$, $0<\mu<1$, $0\le\lambda\le1, \mu-k-\lambda<2$, *тогда* $\mathrm{T}_1\rho$ *является линейным ограниченным оператором, действующим из* $C^{0,\mu}_{k,\lambda}(K)$ *в* $C^{0,\mu}_{k,\lambda}(K)$.

Список литературы

1 *Кошкарова Б.С.* Краевая задача со свободной границей для вырождающейся эллиптической системы уравнений гидродинамики: Дис. … канд. физ.-мат. наук. — Караганда, 2004. — 95 с.

2 *Волков Е.А.* О границах подобластей, весовых классах Гельдера и решении в этих классах уравнения Пуассона // Тр. МИАН СССР. — М., 1972. — Т. 117. — С. 75–99.

3 *Игликов А.* Краевые задачи со свободной границей для систем уравнений движения несжимаемой идеальной жидкости. Вихревые кольца. — Алматы: Ғылым, 1995. — С. 61.

4 *Кошкарова Б.С.* О свойствах двух интегральных операторов в весовом пространстве Гельдера $C^{0,\mu}_{-1,0}(K)$ // Вестн. Карагандинского ун-та. — 2002. — № 1(25). — С. 60–69.

А.Ж.Жақыпбекова, Б.С.Қошқарова

Гельдердің салмақты кеңістіктегі кейбір интегралдық операторлардың қасиеттері туралы

Мақалада годограф жазықтықтың шектелген облысында анықталған кейбір сингулярлық операторлар қарастырылады. Олардың Гельдер салмақты кеңістіктегі қасиеттері қарастырылады және шектелігі туралы теоремалар дәлелденеді.

A.Zh.Zhakupbekova, B.S.Koshkarova

About the properties of certain integral operators in weighted Holder spaces

This article are considered the singular integral operators, defined in a limited area of the hodograph plane. Properties of operators in a weighted Holder space are investigated. Theorems about their limitation in the given space are proved.

УДК 519. 85.316

С.А.Искаков

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

Двусторонние оценки решения задачи о поперечном изгибе пластинки с зажатым краем

В статье приведены двусторонние оценки для решения бигармонического уравнения. Использовано разложение приближенного решения по степеням малого параметра.

Ключевые слова: поперечный изгиб, тонкая пластина, зажатый край, бигармоническое уравнение, ряд, оператор, экстраполяция.

Рассмотрим задачу о поперечном изгибе тонкой пластины с зажатым краем, математическая постановка которой приводит к решению бигармонического уравнения

$$Au \equiv P\Delta\Delta u = f(x)\,,\ x \in D \subset R^2 \tag{1}$$

с краевым условием на $\gamma = \partial D$

$$B_0 u\Big|_\gamma \equiv u\Big|_\gamma = 0\,,\ B_1 u\Big|_\gamma \equiv \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\gamma = 0\,, \tag{2}$$

здесь $u = u(x)$ — поперечный прогиб серединной плоскости пластинки; $f(x)$ — интенсивность внешней нагрузки; P — цилиндрическая жесткость пластинки; $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по внутренней нормали к γ.

Пусть $f \in L_2(D),\ \ \gamma \in C^4(D)$. Тогда решение задачи (1), (2) существует, единственно, $u \in W_2^4(D)$ и выполнена априорная оценка

$$\|u\|_{W_2^4(D)} \le c_1 \|f\|_{L_2(D)}\,. \tag{3}$$

В соответствии с методом фиктивных областей [1–4] в составной области $D_0 = D \cup D_1$ с границей $Г = \partial D_0 \in C^4$ рассмотрим вспомогательную задачу для задачи (1), (2).

$$\begin{cases} Au_\varepsilon = f, x \in D; \\ B_i u_\varepsilon\Big|_{\gamma^+} = B_i u_\varepsilon\Big|_{\gamma^-}, i = 1,2; \\ B_j u_\varepsilon\Big|_{\gamma^+} = \dfrac{Q}{\varepsilon} B_j u_\varepsilon\Big|_{\gamma^-}, j = 2,3; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{Q}{\varepsilon} Au_\varepsilon = 0, x \in D_1 \\ B_i u_\varepsilon\big|_\Gamma = 0, i = 0,1 \end{cases}. \tag{4}$$

Через $B_j v, j = 2,3$ обозначены выражения

$$B_2 v \equiv P\left[\frac{\partial^2 v}{\partial n^2} + \sigma\left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial n}\right)\right];$$

$$B_3 v \equiv P\left[\frac{\partial}{\partial n}\Delta v + (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial^2 v}{\partial n \partial s}\right],$$

в которых $\frac{\partial}{\partial s}$ обозначает дифференцирование по длине дуги γ; σ — постоянная Пуассона, такая, что $0 < \sigma < 1$; $\rho = \rho(x)$ — радиус кривизны γ в точке $x \in \gamma$; Q — параметр, принимающий значения 1 и –1.

Условия согласования на γ в задаче (4) имеют простой физический смысл: при переходе через γ непрерывны поперечный прогиб пластинки и угол поворота элемента контура γ, а усилия и моменты, действующие на элементы контура γ, равны по величине и противоположны по направлению. При этом вспомогательная задача — задача о поперечном изгибе тонкой пластинки с кусочнопостоянным коэффициентом цилиндрической жесткости, опертой в фиктивной области D_1 на твердое упругое основание с коэффициентом податливости $\varepsilon^{-1} \times Q$.

Решение задачи (4) будем искать в виде рядов

$$\Omega_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k, x \in D;\ \Omega_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k y_k, x \in D_1. \tag{5}$$

Для определения членов v_k, y_k подставим (5) в уравнение (4). Приравнивая выражения при одинаковых степенях ε, получим системы задач для нахождения v_k, y_k

$$\begin{cases} Av_0 = f, x \in D; \\ B_i v_0 \big|_\gamma = 0, i = 0,1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ay_1 = 0, x \in D_1; \\ Q\varepsilon^{-1} B_j y_1 \big|_\gamma = B_j v \big|_\gamma ; j = 2,3; \\ B_i y_1 \big|_\Gamma = 0; i = 0,1; \end{cases}$$

для $k \geq 1$ (6)

$$\begin{cases} Av_k = 0, x \in D; \\ B_i v_k = B_i y_k \big|_\gamma , i = 0,1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ay_{k+1} = 0, x \in D_1; \\ Q\varepsilon^{-1} B_j y_{k+1} \big|_\gamma = B_j v \big|_\gamma ; j = 2,3; \\ B_i y_{k+1} \big|_\Gamma = 0; i = 0,1. \end{cases}$$

Теорема 1. Существует ε_0, что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ряды Ω_1, Ω_2, определенные формулой (5), абсолютно сходятся в $W_2^4(D)$, $W_2^4(D_1)$, соответственно, и имеет место равенство

$$u_\varepsilon = \Omega_1, x \in D;\ u_\varepsilon = \Omega_2, x \in D_1, \tag{7}$$

где u_ε — решение (4).

Доказательство. Из теории эллиптических уравнений известно, что при сделанных выше предположениях уравнения из системы (6) имеют единственные решения и справедливы оценки, доставляемые теорией неоднородных граничных задач [5]

$$c_2 \left\| v_k \right\|_{w_2^4(D)} \leq \sum_{i=0}^{1} \left\| B_i v_k \right\|_{w_2^{4-i-\frac{1}{2}}(\gamma)} \leq c_3 \left\| v_k \right\|_{w_2^4(D)}, k \geq 1; \tag{8}$$

$$c_4 \left\| y_k \right\|_{w_2^4(D_1)} \leq \sum_{i=0}^{1} \left\| B_i y_k \right\|_{w_2^{4-i-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \sum_{i=2}^{3} \left\| B_i y_k \right\|_{w_2^{4-i-\frac{1}{2}}(\gamma)} \leq c_5 \left\| y_k \right\|_{w_2^4(D_1)}. \tag{9}$$

Используя (9) к граничным условиям для задачи относительно y_k, находим, что

$$c_4 \left\| y_k \right\|_{w_2^4(D_1)} \leq \sum_{i=2}^{3} \left\| B_i y_k \right\|_{w_2^{4-i-\frac{1}{2}}(\gamma)} = \sum_{i=2}^{3} \left\| B_i v_{k-1} \right\|_{w_2^{4-i-\frac{1}{2}}(\gamma)}.$$

Оценим правую часть неравенства (5), тогда

$$\left\| y_k \right\|_{w_2^4(D_1)} \leq c_6 \left\| v_{k-1} \right\|_{w_2^4(D)}. \tag{10}$$

Совершенно аналогично поступаем для $v_k, k \geq 1$

$$c_2 \left\| v_k \right\|_{w_2^4(D)} \leq \sum_{i=0}^{1} \left\| B_i v_k \right\|_{w_2^{4-i-\frac{1}{2}}(\gamma)} = \sum_{i=0}^{1} \left\| B_i y_k \right\|_{w_2^{4-i-\frac{1}{2}}(\gamma)} \leq c_7 \left\| y_k \right\|_{w_2^4(D_1)}.$$

Принимая во внимание (10), окончательно получаем

$$\left\| v_k \right\|_{w_2^4(D)} \leq c_8 \left\| v_{k-1} \right\|_{w_2^4(D)}, k \geq 1. \tag{11}$$

При $\varepsilon < \varepsilon_0 = c_8^{-1}$ с помощью оценок (10), (11) устанавливаем абсолютную сходимость рядов Ω_1, Ω_2 в нормах пространств $W_2^4(D),\ W_2^4(D_1)$.

Умножим уравнения из системы (6) относительно v_k, y_k на ε^k и просуммируем по всем k. Учитывая ограниченность оператора A, действующего из $W_2^4(D)$ в $L_2(D)$ и из $W_2^4(D_1)$ в $L_2(D_1)$, находим, что полученная задача

$$A\Omega_1 = f, x \in D;$$
$$B_i\Omega_1\Big|_\gamma = B_i\Omega_2\Big|_\gamma;$$
$$B_j\Omega_1\Big|_\gamma = Q\varepsilon^{-1}B_j\Omega_2\Big|_\gamma, j = 2,3;$$
$$Q\varepsilon^{-1}A\Omega_2 = 0, x \in D;$$
$$B_i\Omega_2\Big|_\Gamma = 0, i = 0,1$$

совпадает с (4). Поэтому при всех $\varepsilon < \varepsilon_0$ имеет место равенство (7), теорема 1 доказана.

Обозначим через u_ε^+ решение вспомогательной задачи (4), с параметром $Q = 1$, для которого, в силу теоремы 1, имеют место следующие разложения:

$$u_\varepsilon^+ = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k^+, x \in D;$$
$$u_\varepsilon^+ = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k y_k^+, x \in D_1, \tag{12}$$

где v_k^+, y_k^+ — решение из системы (6) при $Q = 1$. Точно также для решения u_ε^- задачи (4) при $Q = -1$ справедливы равенства

$$u_\varepsilon^- = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k^-, x \in D; \quad u_\varepsilon^- = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k y_k^-, x \in D_1, \tag{13}$$

через v_k^-, y_k^- обозначены решения (6) $Q = -1$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$v_k^+ = v_k^-,\ k \text{ — четное;}$$
$$v_k^+ = -v_k^-,\ k \text{ — нечетное.} \tag{14}$$

Используя (14), перепишем разложения (12), (13) в исходной области D в следующем виде:

$$u_\varepsilon^+ = u + \varepsilon v_1^+ + 0(\varepsilon^2);\ u_\varepsilon^- = u - \varepsilon v_1^+ + 0(\varepsilon^2), \tag{15}$$

где u — решение задачи (1), (2).

Поскольку главные члены погрешностей в разложениях (15) имеют разные знаки, то справедлива

Теорема 2. Пусть $f \in C(D)$, u — решение (1), (2), $u_\varepsilon^+, u_\varepsilon^-$ — решения (4), соответствующие выбору $Q = 1$ и $Q = -1$. Тогда для всех $x \in D$ и $\varepsilon < \varepsilon_0$ имеют место асимптотические поточечные двусторонние неравенства

$$o(\varepsilon^2) + \min\left\{u_\varepsilon^+(x), u_\varepsilon^-(x)\right\} \le u(x) \le \max\left\{u_\varepsilon^+(x), u_\varepsilon^-(x)\right\} + o(\varepsilon^2)$$

и оценки точности

$$\max\left|u(x) - u_\varepsilon^\pm(x)\right| \le c_9\varepsilon. \tag{16}$$

Точность получаемых двусторонних приближений в данном случае ограничена оценкой (16). Для того, чтобы получить двусторонние оценки решения $u(x)$ с заданной точностью ε^s, применим идею экстраполяции Ричардсона. Построим экстраполированные решения $U_s^\pm$, являющиеся линейной комбинацией $u_{\varepsilon_k}^\pm$ с некоторыми весами

$$U_s^+ = \sum_{k=1}^{s} \gamma_k u_{\varepsilon_k}^+;\ U_s^- = \sum_{k=1}^{s} \gamma_k u_{\varepsilon_k}^-, x \in D. \tag{17}$$

Конкретный вид коэффициентов γ_k зависит от выбора последовательностей $\varepsilon > \varepsilon_1 > ... > \varepsilon_s > 0$ и показателя точности s. Наиболее распространенным является выбор

$$\varepsilon_л = \frac{\varepsilon}{k}, k = 1,...,s, \tag{18}$$

при котором коэффициент γ_k находится в явной форме

$$\gamma_k = \frac{(-1)^{s-k}k^s}{k!(s-k)!},\ k = 1,...,s \tag{19}$$

и удовлетворяет условиям

$$\sum_{k=1}^{s}\gamma_k = 1;\quad \sum_{k=1}^{s}\frac{\gamma_k}{k^j} = 0, j = 1,...,s-1.$$

При таком способе задания ε_k, γ_k находим, что

$$U_s^+ = \sum_{k=1}^{s}\gamma_k u_{\varepsilon_k}^+ = \sum_{k=1}^{s}\gamma_k u + \sum_{k=1}^{s-1}\sum_{j=1}^{s}\gamma_j\left(\frac{\varepsilon}{j}\right)^k v_k + \sum_{k=1}^{s}\gamma_k\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^s v_s^+ + o\left(\varepsilon^{s+1}\right) =$$

$$= u\sum_{k=1}^{s}\gamma_k + \sum_{k=1}^{s-1}\varepsilon^k v_k + \sum_{j=1}^{s}\gamma_j\left(\frac{1}{j}\right)^k + \varepsilon^s v_s^+\sum_{j=1}^{s}\gamma_j\left(\frac{1}{j}\right)^s + o\left(\varepsilon^{s+1}\right) = u + c_{11}\varepsilon^s v_s^+ + o\left(\varepsilon^{s+1}\right).$$

Совершенно аналогично

$$U_s^- = u + c_{11}\varepsilon^s v_s^- + o\left(\varepsilon^{s+1}\right).$$

Пусть s — нечетное, тогда $v_s^+ = -v_s^-$ и, значит,

$$U_s^+ = u + c_{11}\varepsilon^s v_s^+ + o\left(\varepsilon^{s+1}\right);$$

$$U_s^- = u - c_{11}\varepsilon^s v_s^+ + o\left(\varepsilon^{s+1}\right). \tag{20}$$

С помощью этого представления доказывается следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $f \in C(D)$, u *— решение (4),* u_ε^+, u_ε^- *— решения (4), соответствующие выбору* $Q = 1$, $Q = -1$. *Тогда для всех* $x \in D$ *и* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *имеют место асимптотические поточечные двусторонние неравенства*

$$o(\varepsilon^{s+1}) + \min\left\{U_s^+(x), U_s^-(x)\right\} \le u(x) \le \max\left\{U_s^+(x), U_s^-(x)\right\} + o(\varepsilon^{s+1}) \tag{21}$$

и оценки близости

$$\max_{x\in\bar{D}}\left|u(x) - U^{\pm}(x)\right| \le c_{12}\varepsilon^s;\quad \max_{x\in\bar{D}}\left|u(x) - \frac{1}{2}(U_s^+(x) + U_s^-(x))\right| \le c_{13}\varepsilon^{s+1}, \tag{22}$$

где s *— нечетное, а* U_s^+, U_s^- *определяются по формуле (20).*

Список литературы

1 *Коновалов А.Н.* Метод фиктивных областей в задачах кручения // Численные методы механики сплошной среды: Сб. — Новосибирск, 1972. — Т. 3. — № 5. — С. 52–67.

2 *Букенов М.М.* Малые параметры в алгоритмах решения задач теории упругости: Дис. … канд. физ.-мат. наук. — Новосибирск, 1986. — 123 с.

3 *Chertova E.* Locally two-sided approximate solutions in parabolic problems // Bull. Nov. Comp. Center, Num. Anal. — 1994. — Vol. 6. — P. 37–42.

4 *Букенов М.М.* Двусторонние оценки для сеточной задачи в методе фиктивных областей // Вестн. Карагандинского ун-та. — 2008. — № 4(48). — С. 6–11.

5 *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М., 1964.

С.А.Ысқақов

Бекітілген шекарасы бар пластинканың көлденең иілу туралы есепті шешудің екіжақты бағалары

Бигармоникалық теңдеудің шешімі үшін екі жақты бағалары келтіріліп, негізделген. Жуық шешімнің дәрежелік қатарға аз параметрі бойынша жіктелуі қолданылған.

S.A.Iskakov

Two-way estimates of solution to the problem of the transverse bending of a plating with clamped border set

In the article bilateral estimations for the decision of the biharmonic equation are resulted and explaineded. Decomposition of the approached decision in degree row by small parametre is used.

УДК 517.51

С.Т.Махашев

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

Абсолютная сходимость рядов по обобщенной системе Хаара

Исследованы необходимые и достаточные условия равномерной сходимости рядов с коэффициентами Фурье по обобщенной системе Хаара.

Ключевые слова: обобщенная система Хаара, ряд Фурье, равномерная сходимость, последовательность, теорема Абеля, класс.

Через $L_q\left[0,1\right]$ обозначим пространство всех измеримых по Лебегу на [0,1] функций $f(x)$, для которых

$$\left\|f\right\|_q=\left\{\int_0^1\left|f(x)\right|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}}<+\infty,\ 1\le q<+\infty .$$

Пусть дана последовательность $\left\{p_n\right\}$ натуральных чисел таких, что $p_n\ge 2$, $n=1,2,...$. Определим на отрезке [0,1] обобщенную систему Хаара (см. [1]).

Положим $\chi_1(t)\equiv 1$ на [0,1]. Если же $k\ge 2$, то $k=m_n+r(p_{n+1}-1)+s$, где $m_n=p_1p_2...p_n$, $n=0,1,2,...$, $r=0,1,2,...,m_n-1$, $s=1,2,...,p_{n+1}-1$, причем такое представление числа k единственно. Обозначим через A множество точек вида $\frac{i}{m_n}$ на отрезке [0,1]. Если $t\in[0,1]\setminus A\equiv B$, то разложение

$$t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n(t)}{m_n},\ \alpha_n(t)=0,1,...,p_n-1$$

единственно. Теперь определим функцию $\chi_k(t)\equiv\chi_{n,r}^{(s)}(t)$ следующим образом:

$$\chi_{n,r}^{(s)}(t)=\begin{cases}\sqrt{m_n}\exp 2\pi i s\dfrac{\alpha_{n+1}(t)}{p_{n+1}}, t\in\left(\dfrac{r}{m_n},\dfrac{r+1}{m_n}\right)\bigcap B;\\ 0,\ при\quad t\notin\left[\dfrac{r}{m_n},\dfrac{r+1}{m_n}\right]\end{cases}$$

$(n=0,1,2,...,r=0,1,2,...,m_n-1,s=1,2,...,p_{n+1}-1)$. На множестве B функция $\chi_{n,r}^{(s)}(t)$ является ступенчатой. Воспользуемся тем, что множество B всюду плотно на [0,1], и продолжим функцию $\chi_{n,r}^{(s)}(t)$ по непрерывности на интервале $\left(\frac{r}{m_n},\frac{r+1}{m_n}\right)$. После этого в точках разрыва функцию $\chi_{n,r}^{(s)}(t)$ положим равной полусумме ее предельных значений справа и слева, а на концах отрезка [0,1] — ее предельным значениям изнутри отрезка. Таким образом, система $\chi_{n,r}^{(s)}(t)$ полностью определена. Если $p_n=2$, $n=1,2,...$, то система $\chi\left\{p_n\right\}$ будет классической системой Хаара (см. [1]).

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями: $a_n(f)=\int_0^1 f(x)\overline{\chi_n}(x)dx$ — коэффициенты Фурье по обобщенной системе Хаара. Величина $\omega(f,\delta)_{L_q}=\sup\limits_{0\le h\le\delta}\left\{\int_0^{1-h}\left|f(x+h)-f(x)\right|^q dx\right\}^{1/q}$ называется модулем непрерывности функции $f\in L_q\left[0,1\right]$.

Рассмотрим функциональный класс

$$H_q^{\omega}=\left\{f\in L_q\left[0,1\right]:\omega\left(f,\delta\right)_{L_q}\le\omega\left(\delta\right),\delta\in\left[0,1\right]\right\},$$

где $\omega\left(\delta\right)$ — заданный модуль непрерывности $1\le q<+\infty$.

Условие абсолютной и равномерной сходимости ряда Фурье-Хаара в терминах модуля непрерывности и наилучшего приближения исследовано в [2, 3], для обобщенной системы Хаара изучено в [4–6].

В настоящей работе установлены необходимые и достаточные условия равномерной сходимости ряда Фурье по обобщенной системе Хаара $\chi\{p_n\}$ функции из класса H_q^{ω}.

Лемма 1 (см. [4]). Пусть $X(\phi)$ — максимальное симметричное пространство, $0<\underline{\gamma}_X \le \overline{\gamma}_X <1$. Тогда для любой функции $f \in X(\phi)$ выполняется неравенство

$$\left|a_n\left(f\right)\right| \le \frac{C}{\sqrt{m_\nu}\cdot\phi\left(m_{\nu+1}^{-1}\right)}\omega\left(f,m_{\nu+1}^{-1}\right)_X \cdot \frac{1}{\sin^2\dfrac{\pi s}{p_{\nu+1}}}$$

при $n=m_\nu+r\left(p_{\nu+1}-1\right)+s,\ r=0,1,\ldots,m_\nu-1;\ s=1,2,\ldots,p_{\nu+1}-1$.

Теорема 1. Пусть обобщенная система Хаара $\chi\{p_n\}$ определена ограниченной последовательностью $\{p_n\}$. Если $f\in L_q\left[0,1\right]$, $1\le q<+\infty$, $\beta\le\theta\left(1-\dfrac{1}{q}\right)$, $\theta>0$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta+\frac{\theta}{q}-1}\omega^{\theta}\left(f,\frac{1}{n}\right)_{L_q}<+\infty, \tag{1}$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta}\left|a_n\left(f\right)\chi_n\left(t\right)\right|^{\theta} \tag{2}$$

равномерно сходится на $\left[0,1\right]$.

Доказательство. Так как $\{p_n\}$ — ограниченная последовательность, то условие (1) эквивалентно условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n^{\beta+\frac{\theta}{q}}\omega^{\theta}\left(f,m_n^{-1}\right)_{L_q}<+\infty. \tag{3}$$

Пусть l,j — произвольные натуральные числа. Для этих чисел существуют натуральные числа s и r такие, что $m_s<l\le m_{s+1}$, $m_r<j\le m_{r+1}$.

Тогда

$$\sum_{m=l+1}^{j} m^{\beta}\left|a_m\left(f\right)\cdot\chi_m\left(t\right)\right|^{\theta} \le \sum_{n=s}^{r}\sum_{\nu=m_n+1}^{m_{n+1}}\nu^{\beta}\left|a_\nu\left(f\right)\cdot\chi_\nu\left(t\right)\right|^{\theta} \tag{4}$$

для любого $t\in\left[0,1\right]$.

Для любого числа $t\in\left[0,1\right]$ могут быть отличны от нуля не более чем p_n функции из $\chi_{m_n+1}\left(t\right),\ldots,\chi_{m_{n+1}}\left(t\right)$ при каждом фиксированном $n=1,2,\ldots$ Тогда, пользуясь леммой 1 при $X(\phi)=L_q,\phi(t)=t^{1/q}$ и оценкой

$$\sum_{s=1}^{p_{n+1}-1}\frac{1}{\sin^2\dfrac{\pi s}{p_{n+1}}}\le C \qquad \forall n=0,1,\ldots,$$

получим

$$\sum_{\nu=m_n+1}^{m_{n+1}}\left|a_\nu\left(f\right)\cdot\chi_\nu\left(t\right)\right|^{\theta}\cdot\nu^{\beta}\succ\prec m_n^{\beta}\sum_{\nu=m_n+1}^{m_{n+1}}\left|a_\nu\left(f\right)\cdot\chi_\nu\left(t\right)\right|^{\theta}=m_n^{\beta}\sum_{r=0}^{m_n-1}\sum_{s=1}^{p_{n+1}-1}\left|a_{n,r}^{(s)}\left(f\right)\cdot\chi_{n,r}^{(s)}\left(t\right)\right|^{\theta}=$$

$$=m_n^{\beta}\sum_{s_j<p_{n+1}}\left|a_{n,r}^{(s_j)}\left(f\right)\cdot\chi_{n,r}^{(s_j)}\left(t\right)\right|^{\theta}=m_n^{\beta}\cdot\left(\sqrt{m_n}\right)^{\theta}\sum_{s_j<p_{n+1}}\left|a_{n,r}^{(s_j)}\left(f\right)\right|^{\theta}\le$$

$$\le C\cdot m_n^{\beta+\frac{\theta}{2}}\cdot m_{n+1}^{\frac{\theta}{q}-\frac{\theta}{2}}\cdot\omega^{\theta}\left(f,\frac{1}{m_{n+1}}\right)_{L_q}\cdot\sum_{s=1}^{p_{n+1}-1}\frac{1}{\sin^2\dfrac{\pi s}{p_{n+1}}}\le C\cdot m_n^{\beta+\frac{\theta}{q}}\cdot\omega^{\theta}\left(f,\frac{1}{m_{n+1}}\right)_{L_q}.$$

Следовательно,

$$\sum_{\nu=l+1}^{j} \left|a_\nu(f)\cdot\chi_\nu(t)\right|^\theta \cdot \nu^\beta \le C\cdot\sum_{n=s}^{r} m_n^{\beta+\frac{\theta}{q}} \omega^\theta\left(f,\frac{1}{m_{n+1}}\right)_{L_q}$$

для любого $t\in[0,1]$.

В силу (3) отсюда $\forall\varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon\in N$

$$\sum_{\nu=l+1}^{j} \nu^\beta\left|a_\nu(f)\cdot\chi_\nu(t)\right|^\theta<\varepsilon\quad\forall j>n_\varepsilon,\ \forall t\in[0,1].$$

Следовательно, ряд (2) равномерно сходится на $[0,1]$. Теорема 1 доказана.

Следующая теорема показывает неулучшаемость условий (1) на классах H_q^ω.

Теорема 2. Пусть дан модуль непрерывности $\omega(\delta),\ \delta\in[0,1]$ и $1\le q<+\infty$, $0<\theta<+\infty,\ \beta<\theta\left(1-\frac{1}{q}\right)$. Тогда, для того чтобы для любой функции $f\in H_q^\omega$ ряд (2) равномерно сходился на $[0,1]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta+\frac{\theta}{q}-1}\omega^\theta\left(\frac{1}{n}\right)<+\infty. \tag{5}$$

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 1. Докажем необходимость. Пусть $\forall f\in H_q^\omega$ ряд (2) равномерно сходится на $[0,1]$, допустим условие (5) не выполняется, то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta+\frac{\theta}{q}-1}\omega^\theta\left(\frac{1}{n}\right)=+\infty. \tag{6}$$

Тогда (см. [7]) можно построить числовую последовательность $\{B(n)\}$, обладающую следующими свойствами:

1. $B(n)\downarrow 0$ при $n\to+\infty$; $B(n)\le\omega\left(n^{-1}\right)$, $n=1,2,\ldots$
2. $\sum_{k=1}^{n} B(k)=\underline{\underline{O}}\left(n\omega\left(n^{-1}\right)\right)$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta+\frac{\theta}{q}-1}B^\theta(n)=+\infty$.

Учитывая, что $B(n)\downarrow 0$, $n\to+\infty$ и $\{p_n\}$ — ограниченная последовательность, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k^{\beta+\frac{\theta}{q}}B^\theta(m_k)=+\infty. \tag{7}$$

Теперь построим возрастающую последовательность номеров n_j такую, что

$$\sum_{j=k}^{\infty} B\left(m_{n_j}\right)=\underline{\underline{O}}\left(B\left(m_{n_k}\right)\right); \tag{8}$$

$$\sum_{j+1}^{\infty} m_{n_j}^{\beta+\frac{\theta}{q}}\cdot B^\theta\left(m_{n_j}\right)=+\infty. \tag{9}$$

Для этого положим $k_0=0,\ k_1=1$ и $k_{i+1}=\min\left\{k: B(m_k)\le\frac{1}{2}B\left(m_{k_i}\right)\right\}$.

Тогда

$$B\left(m_{k_{i+1}}\right)\le\frac{1}{2}B\left(m_{k_i}\right); \tag{10}$$

$$B(m_k)>\frac{1}{2}B\left(m_{k_i}\right),\ k=k_i,k_i+1,\ldots,k_{i+1}-1. \tag{11}$$

Так как $B(m)\downarrow$, то из (7) следует, что

$$\sum_{i=2}^{\infty} m_{k_i-1}^{\beta+\frac{\theta}{q}} B^{\theta}\left(m_{k_i-1}\right)=+\infty .$$

Следовательно, по крайней мере один из рядов

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_{k_{2j+1}-1}^{\beta+\frac{\theta}{q}} B^{\theta}\left(m_{k_{2j+1}-1}\right),\ \sum_{j=1}^{\infty} m_{k_{2j}-1}^{\beta+\frac{\theta}{q}} B^{\theta}\left(m_{k_{2j}-1}\right)$$

расходится.

Если расходится первый из этих рядов, то положим $n_j=k_{2j+1}-1$, а в противном случае полагаем $n_j=k_{2j}-1$. Тогда ясно, что (9) выполняется. Далее из (10) следует $B\left(m_{n_{j+1}}\right)\le\frac{1}{2}B\left(m_{n_j}\right)$. Из этого неравенства следует (8). Положим

$$A_k=\sum_{j=1}^{k} m_{n_j}^{\beta+\frac{\theta}{q}} B^{\theta}\left(m_{n_j}\right);$$

$$D_k=\sum_{j=1}^{k} m_{n_j}^{\beta+\frac{\theta}{q}} \frac{B^{\theta}\left(m_{n_j}\right)}{A_j};$$

$$F_k=m_{n_k}^{\frac{1}{q}}\cdot\frac{B\left(m_{n_k}\right)}{A_k\cdot D_k},\ k=1,2,...$$

Рассмотрим функцию

$$f_0(t)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{j+1}\cdot 2p_{n_j+1}}{p_{n_j+1}-1}\cdot F_j,\ \text{при }\ t=\dfrac{p_{n_j+1}+1}{2m_{n_j+1}},\ j=1,2,...\\ 0,\ \text{при } t=0,\ t\in\left[\dfrac{1}{p_1},1\right],\ t\in\left[\dfrac{1}{m_{k+1}},\dfrac{1}{m_k}\right],\ k\ne n_j\\ \text{линейна на каждом из отрезков }\ \left[\dfrac{1}{m_{n_j+1}},\dfrac{p_{n_j+1}+1}{2m_{n_j+1}}\right],\left[\dfrac{p_{n_j+1}+1}{2m_{n_j+1}},\dfrac{1}{m_{n_j}}\right].\end{cases}$$

В [6] доказано, что $f_0\in L_q[0,1]$ и $f_0\in H_q^{\omega}$, $1\le q<+\infty$. Кроме этого, также доказано

$$\left|a_{m_{n_j}+1}\left(f_0\right)\cdot\chi_{m_{n_j}+1}(0)\right|\ge C_q\cdot F_j,\ j=1,2,\dots .$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta}\left|a_n\left(f_0\right)\cdot\chi_n(0)\right|^{\theta}\ge\sum_{j=1}^{\infty} m_{n_j}^{\beta}\left|a_{m_{n_j}+1}\left(f_0\right)\cdot\chi_{m_{n_j}+1}\right|^{\theta}\ge C_{q,\theta}\cdot\sum_{j=1}^{\infty} m_{n_j}^{\beta}\cdot F_j^{\theta}=C_{q,\theta}\cdot\sum_{j=1}^{\infty} m_{n_j}^{\beta+\frac{\theta}{q}}\cdot\frac{B^{\theta}\left(m_{n_j}\right)}{A_j\cdot D_j}. \qquad (12)$$

В силу соотношения (9) и теоремы Абеля (см. [8]) ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_{n_j}^{\beta+\frac{\theta}{q}}\cdot\frac{B^{\theta}\left(m_{n_j}\right)}{A_j\cdot D_j}$$

расходится. Следовательно, из (12) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta}\left|a_n\left(f_0\right)\cdot\chi_n(0)\right|^{\theta}=+\infty .$$

Это противоречит тому, что $\forall f\in H_q^{\omega}$ ряд (2) сходится равномерно на $[0,1]$.

Замечание. Так как $\omega(f,\delta)_{L_q}\ge C\cdot\delta,$ то

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta+\frac{\theta}{q}-1}\omega^{\theta}(f,\frac{1}{n})_{L_q}\ \ge C\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta+\frac{\theta}{q}-1}(\frac{1}{n})^{\theta}\ =C\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\theta+1-\beta-\theta/q}}.$$

Ряд в правой части при $\beta \geq \theta\left(1-\frac{1}{q}\right)$ расходится. Тогда условие (1) будет выполняться только для постоянных функций, следовательно, ряд (2) равномерно сходится.

Список литературы

1 *Голубов Б.И.* Об одном классе полных ортогональных систем // Сиб. мат. журн. — 1968. — Т. 9. — С. 297–314.

2 *Ульянов П.Л.* Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье // Мат. сб. — 1967. — Т. 72. — С. 193–225.

3 *Ciesielski Z., Musielak J.* On absolute convergence of Haar series // Colloq. math. — 1959. — Vol. 7. — P. 61–65.

4 *Акишев Г.* О сходимости рядов по обобщенной системе Хаара // Математический журн. — 2002. — Т. 2. — № 3.

5 *Голубов Б.И., Рубинштейн А.И.* Об одном классе систем сходимости // Мат. сб. — 1966. — Т. 71. — С. 93–112.

6 *Акишев Г.А., Махашев С.Т.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье по обобщенной системе Хаара // Изв. вузов, матем. — 2000. — № 3. — С. 16–25.

7 *Ульянов П.Л.* Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Мат. сб. — 1970. — Т. 81. — С. 104–131.

8 *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов. — М., 1978. — С. 147.

С.Т.Махашев

Хаар жалпыланған жүйесі бойынша қатарлардың абсолюттік жинақтылығы

Жалпыланған Хаар жүйесі бойынша Фурье қатарларының бірқалыпты жинақтылығының қажетті және жеткілікті шарттары қарастырылған.

S.T.Mahashev

Absolute convergence of series by the generalized Haar system

The necessary and sufficient conditions uniform convergence of a series from coefficients of Fourier on tempered system are researched by generalized system Haar.

УДК 517.956

Н.Т.Орумбаева

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

Об одном приближенном методе решения периодической краевой задачи для системы гиперболических уравнений

Предложен конструктивный алгоритм нахождения решения периодической краевой задачи для системы гиперболических уравнений. Установлены достаточные условия сходимости алгоритма и однозначной разрешимости задачи исследования.

Ключевые слова: периодическая краевая задача, гиперболические уравнения со смешанной производной, функциональный параметр, последовательные приближения.

Пусть $C(\overline{\Omega}, R^n)$ — пространство функций $u:\overline{\Omega}\to R^n$, непрерывных на $\overline{\Omega}$, с нормой $\|u(x,t)\| = \max\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\|u(x,t)\|$. Для функций $u(x,t)\in C(\overline{\Omega},R^n)$ при фиксированном $x\in[0,\omega]$ введем норму

$$\|u(x,\cdot)\|_1 = \max_{t\in[0,T]}\|u(x,t)\|.$$

Постановка задачи. Пусть $u(x,t)\in C(\overline{\Omega},R^n)$ и имеет частные производные $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\in C(\overline{\Omega},R^n)$; $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\partial t}\in C(\Omega,R^n)$. В области $\overline{\Omega}=[0,\omega]\times[0,T]$ требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right),\quad (x,t)\in\overline{\Omega},\quad u\in R^n, \tag{1}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0,t)=u(\omega,t),\quad t\in[0,T]; \tag{2}$$

$$u(x,0)=u(x,T),\quad x\in[0,\omega], \tag{3}$$

где $f:\overline{\Omega}\times R^n\times R^n\to R^n$ непрерывна на $\overline{\Omega}$ и

$$f\left(x,0,u(x,0),\frac{\partial u(x,0)}{\partial x}\right)=f\left(x,T,u(x,T),\frac{\partial u(x,T)}{\partial x}\right).$$

Краевые задачи для систем гиперболических уравнений различными методами были исследованы многими авторами, среди них отметим работы [1–8], где можно найти обзор и библиографию подобного рода задач. В [9] была рассмотрена нелинейная полупериодическая краевая задача для систем гиперболических уравнений со смешанной производной и получены достаточные условия разрешимости поставленной задачи.

В данной работе рассматривается периодическая по двум переменным краевая задача для системы нелинейных гиперболических уравнений со смешанной производной. Для исследования задачи (1)-(3) применяются результаты, установленные в [9]. Здесь получены достаточные условия осуществимости и сходимости предложенного алгоритма, а также существования изолированного решения нелинейной краевой задачи (1)-(3).

Обозначим через $\mu(t)$ значение неизвестной функции $u(x,t)$ при $x=0$ и выполним замену $\tilde{u}(x,t)=u(x,t)-\mu(t)$. Тогда задача (1)-(3) сведется к следующей эквивалентной задаче с функциональным параметром:

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x\partial t}=f\left(x,t,\tilde{u}+\mu(t),\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right),\quad (x,t)\in\overline{\Omega}; \tag{4}$$

$$\tilde{u}(0,t)=0,\quad t\in[0,T]; \tag{5}$$

$$\tilde{u}(x,0)=\tilde{u}(x,T),\quad x\in[0,\omega]; \tag{6}$$

$$\tilde{u}(\omega,t)=0,\quad t\in[0,T]; \tag{7}$$

$$\mu(0)=\mu(T). \tag{8}$$

Последнее равенство следует из соотношений (3), (6). В силу (8) вытекающее из (3) равенство $\tilde{u}(x,0)+\mu(0)=\tilde{u}(x,T)+\mu(T)$ записано в виде (6).

Лемма 1. *Если* $u(x,t)$ *является решением задачи (1)–(3), то пара* $\left(\mu(t)=u(0,t),\tilde{u}(x,t)=u(x,t)-u(0,t)\right)$ *— решение задачи (4)–(8). Наоборот, если пара* $\left(\mu(t),\tilde{u}(x,t)\right)$ *— решение задачи (4)–(8), то функция* $u(x,t)=\tilde{u}(x,t)+\mu(t)$ *является решением задачи (1)–(3).*

Введение функционального параметра $\mu(t)$ позволяет процесс нахождения решения задачи (4)–(8) разбить на два пункта:

1) определение функции $\mu(t)$;

2) определение функции $\tilde{u}(x,t)$.

При найденном $\mu(t)$ функция $\tilde{u}(x,t)$ является решением полупериодической краевой задачи (4)–(6). Поскольку из условий (5), (7) вытекают равенства

$$\frac{\partial\tilde{u}(0,t)}{\partial t}=0;\ \frac{\partial\tilde{u}(\omega,t)}{\partial t}=0$$

для всех $t\in[0,T]$, то, интегрируя обе части (4) по $x\in[0,\omega]$, для определения неизвестной функции $\mu(t)$ получим систему дифференциальных уравнений, не разрешенную относительно производной

$$\int_0^\omega f\left(\xi,t,\tilde{u}(\xi,t)+\mu(t),\frac{\partial\tilde{u}(\xi,t)}{\partial\xi}\right)d\xi=0. \tag{9}$$

Таким образом, для определения неизвестных функций $\tilde{u}(x,t)$, $\mu(t)$ имеем замкнутую систему уравнений (4)–(6) и (9).

Предполагая, что $\tilde{u}(x,t)=0$, из уравнения (9) находим $\mu^{(0)}(t)$. Предположим, что задача (4)–(6) при $\mu(t)=\mu^{(0)}(t)$ имеет решение $\tilde{u}^{(0)}(x,t)\in C(\overline{\Omega},R^n)$. Множество таких $\mu^{(0)}(t)\in C([0,T],R^n)$ обозначим через $G(f,t)$, а соответствующее $\mu^{(0)}(t)$ решение задачи (4)-(6) через $\tilde{u}^{(0)}(x,t)$.

Взяв $\mu^{(0)}(t)\in G(f,t)$, ему соответствующую $\tilde{u}^{(0)}(x,t)$, непрерывные на $[0,\omega]$ функции $R(x)>0$, число $\psi>0$, построим множества

$$S\left(\mu^{(0)}(t),\psi\right)=\left\{\mu(t)\in C\left([0,T],R^n\right):\left\|\mu(\cdot)-\mu^{(0)}(\cdot)\right\|_1<\psi\right\};$$

$$S_1\left(\tilde{u}^{(0)}(x,t),R(x)\psi\right)=\left\{\tilde{u}(x,t)\in C\left(\overline{\Omega},R^n\right):\left\|\tilde{u}(x,\cdot)-\tilde{u}^{(0)}(x,\cdot)\right\|_1<R(x)\psi,\quad \left\|\tilde{u}_x(x,\cdot)-\tilde{u}_x(x,\cdot)\right\|_1<R(x)\psi\right\};$$

$$G_2^0\left(R(x),\psi\right)=\left\{(x,t,u,v):(x,t)\in\overline{\Omega},\left\|u-\tilde{u}^{(0)}(x,\cdot)-\mu^{(0)}(\cdot)\right\|_1<R(x)\psi,\quad \left\|v-\frac{\partial\tilde{u}^{(0)}(x,\cdot)}{\partial x}\right\|_1<R(x)\psi\right\}.$$

За начальное приближение задачи (4)–(8) возьмем пару $\left(\mu^{(0)}(t),\tilde{u}^{(0)}(x,t)\right)$ и последовательные приближения строим по следующему алгоритму:

Шаг 1. Предполагая, что $u(x,t)=u^{(0)}(x,t)$, из уравнения (9) находим $\mu^{(1)}(t)$

$$\int_0^\omega f\left(\xi,t,\tilde{u}^{(0)}(\xi,t)+\mu(t),\frac{\partial\tilde{u}^{(0)}(\xi,t)}{\partial\xi}\right)d\xi=0.$$

Функцию $\tilde{u}^{(1)}(x,t)$ определим как решение полупериодической краевой задачи

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x\partial t}=f\left(x,t,\tilde{u}+\mu^{(1)}(t),\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right),\quad (x,t)\in\overline{\Omega};$$

$$\tilde{u}(0,t)=0,\quad t\in[0,T];$$

$$\tilde{u}(x,0)=\tilde{u}(x,T),\quad x\in[0,\omega],$$

где $\mu(t)=\mu^{(1)}(t)$.

Шаг 2. Предполагая, что $u(x,t)=u^{(1)}(x,t)$, из уравнения (9) находим $\mu^{(2)}(t)$

$$\int_0^\omega f\left(\xi,t,\tilde{u}^{(1)}(\xi,t)+\mu(t),\frac{\partial\tilde{u}^{(1)}(\xi,t)}{\partial\xi}\right)d\xi=0.$$

Функцию $\tilde{u}^{(2)}(x,t)$ определим как решение полупериодической краевой задачи

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x\partial t}=f\left(x,t,\tilde{u}+\mu^{(2)}(t),\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right),\quad (x,t)\in\overline{\Omega};$$

$$\tilde{u}(0,t)=0,\quad t\in[0,T];$$

$$\tilde{u}(x,0)=\tilde{u}(x,T),\quad x\in[0,\omega],$$

где $\mu(t)=\mu^{(2)}(t)$.

Продолжая процесс, на k -ом шаге получаем систему $\left(\mu^{(k)}(t),\tilde{u}^{(k)}(x,t)\right)$.

Достаточные условия осуществимости, сходимости предложенного алгоритма устанавливает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть при выполнении условий теоремы 1 [9] матрица* $f'_\mu\left(x,t,\tilde{u}(x,t)+\mu(t),\frac{\partial\tilde{u}(x,t)}{\partial x}\right)$ *обратима для всех* $\left(x,\mu(t),\tilde{u}(x,t)\right)$, где $x\in[0,\omega]$, $\left(\mu(t),\tilde{u}(x,t)\right)\in S\left(\mu^{(0)}(t),\psi\right)\times S_1\left(\tilde{u}^{(0)}(x,t),R(x)\psi\right)$ *и выполняются следующие неравенства:*

$$1)\ \max_{t\in[0,T]}\left\|\left[\int_0^{\omega} f'_{\mu}\left(x,t,\tilde{u}(x,t)+\mu(t),\frac{\partial\tilde{u}(x,t)}{\partial x}\right)dx\right]^{-1}\right\|\le\gamma;$$

$$2)\ q=\gamma\int_0^{\omega}\left(L_2(\xi)\int_0^{\xi}\left[b_1(\xi_1)e^{\int_0^{\xi_1}b_1(\xi_2)d\xi_2}\int_0^{\xi_1}b_2(\xi_2)d\xi_2+b_2(\xi_1)\right]d\xi_1+L_1(\xi)\left[b_1(\xi)e^{\int_0^{\xi}b_1(\xi_1)d\xi_1}\int_0^{\xi}b_2(\xi_1)d\xi_1+b_2(\xi)\right]\right)d\xi<1;$$

$$3)\ \frac{\gamma}{1-q}\int_0^{\omega}\left[L_2(\xi)\left\|\tilde{u}(\xi,\cdot)-\tilde{u}^{(0)}(\xi,\cdot)\right\|_1+L_1(\xi)\left\|\frac{\partial\tilde{u}(\xi,\cdot)}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{u}^{(0)}(\xi,\cdot)}{\partial\xi}\right\|_1\right]d\xi+$$

$$+\gamma\int_0^{\omega}\max_{t\in[0,T]}\left\|f\left(\xi,t,\tilde{u}^{(0)}(\xi,t)+\mu^{(0)}(t),\frac{\partial\tilde{u}^{(0)}(\xi,t)}{\partial\xi}\right)\right\|d\xi<\psi;$$

$$4)\ \int_0^{x}\left[b_1(\xi)e^{\int_0^{\xi}b_1(\xi_1)d\xi_1}\int_0^{\xi}b_2(\xi_1)d\xi_1+b_2(\xi)\right]d\xi\le R(x),\quad x\in[0,\omega],$$

где

$$b_1(x)=\left[c_0(x)c_1(x)+2c_0(x)+2\right]c_2(x)L_2(x);$$

$$b_2(x)=\left[c_0(x)c_1(x)+c_0(x)+1\right]\gamma(x,h)L_2(x);$$

$$c_0(x)=\frac{1}{1-q_{\nu}(x,h)}\sum_{j=1}^{\nu}\frac{\left(L_1(x)h\right)^j}{j!};$$

$$c_1(x)=\gamma_{\nu}(x,h)\frac{\left(L_1(x)h\right)^{\nu}}{\nu!};$$

$$c_2(x)=\frac{1}{1-q_{\nu}(x,h)}\sum_{j=0}^{\nu}\frac{\left(L_1(x)h\right)^j}{j!}h,$$

μ — *const*, *а обозначение функций* $\gamma(x,h)$ *и* $q_{\nu}(x,h)$ *даны в [9]. Тогда определяемая алгоритмом последовательность функций* $\left(\mu^{(k)}(t),\tilde{u}^{(k)}(x,t)\right)$, $k=1,2,\ldots$, *содержащаяся во множестве* $S\left(\mu^{(0)}(t),\psi\right)\times S_1\left(\tilde{u}^{(0)}(x,t),R(x)\psi\right)$, *сходится к решению задачи (4)-(6)* $\left(\mu^{*}(t),\tilde{u}^{*}(x,t)\right)$ *и справедливы оценки:*

$$а)\ \left\|\mu^{*}(\cdot)-\mu^{(k)}(\cdot)\right\|_1\le\frac{q^k\gamma}{1-q}\max_{t\in[0,T]}\left\|\int_0^{\omega}f\left(\xi,t,\tilde{u}^{(0)}(\xi,t)+\mu^{(0)}(t),\frac{\partial\tilde{u}^{(0)}(\xi,t)}{\partial\xi}\right)d\xi\right\|;$$

$$б)\ \left\|\tilde{u}^{*}(x,\cdot)-\tilde{u}^{(k)}(x,\cdot)\right\|_1\le\int_0^{x}\left[b_1(\xi)e^{\int_0^{\xi}b_1(\xi_1)d\xi_1}\int_0^{\xi}b_2(\xi_1)d\xi_1+b_2(\xi)\right]d\xi\ \left\|\mu^{*}(\cdot)-\mu^{(k)}(\cdot)\right\|_1.$$

Причем любое решение $\left(\mu(t),\tilde{u}(x,t)\right)$ *задачи (4)–(6) в* $S\left(\mu^{(0)}(t),\psi\right)\times S_1\left(\tilde{u}^{(0)}(x,t),R(x)\psi\right)$ *изолировано.*

Функции $u^{(k)}(x,t)$, $k=1,2,\ldots$ определим равенством

$$u^{(k)}(x,t)=\tilde{u}^{(k)}(x,t)-\mu^{(k)}(t)$$

и через $S_1\left(u^{(0)}(x,t),\left[R(x)+1\right]\psi\right)$ обозначим множество кусочно-непрерывно дифференцируемых по x,t функций $u:\overline{\Omega}\to R^n$, удовлетворяющих неравенствам

$$\left\|u(x,\cdot)-u^{(0)}(x,\cdot)\right\|_1<\left[R(x)+1\right]\psi;$$

$$\left\|u_x(x,\cdot)-u_x^{(0)}(x,\cdot)\right\|_1<\left[R(x)+1\right]\psi.$$

В силу эквивалентности задач (1)–(3) и (4)–(6) из теоремы 1 следует следующее утверждение.

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то последовательность функций* $\left\{u^{(k)}\left(x,t\right)\right\}$, $k=1,2,\ldots$ *содержится в* $S_1\left(u^{(0)}\left(x,t\right),\left[R(x)+1\right]\psi\right)$, *сходится к* $u^*\left(x,t\right)$ *— решению задачи* (1)–(3) *в* $S_1\left(u^{(0)}\left(x,t\right),\left[R(x)+1\right]\psi\right)$ *и справедливо неравенство*

$$\left\|u^*\left(x,\cdot\right)-u^{(k)}(x,\cdot)\right\|_1 \leq$$

$$\leq\left\{\int\limits_0^x\left[b_1(\xi)e^{\int\limits_0^{\xi}b_1(\xi_1)d\xi_1}\int\limits_0^{\xi}b_2(\xi_1)d\xi_1+b_2(\xi)\right]d\xi+1\right\}\frac{q^k\gamma}{1-q}\max_{t\in[0,T]}\left\|\int\limits_0^{\omega}f\left(\xi,t,\tilde{u}^{(0)}\left(\xi,t\right)+\mu^{(0)}(t),\frac{\partial\tilde{u}^{(0)}\left(\xi,t\right)}{\partial\xi}\right)d\xi\right\|.$$

Причем любое решение задачи (1)–(3) *в* $S_1\left(u^{(0)}\left(x,t\right),\left[R(x)+1\right]\psi\right)$ *изолировано.*

Таким образом, установлены достаточные условия осуществимости и сходимости предложенного алгоритма, показана разрешимость задачи (1)–(3) в шаре $S_1\left(u^{(0)}\left(x,t\right),\left[R(x)+1\right]\psi\right)$.

Список литературы

1 *Cesari L.* Тр. междунар. симп. по нелинейным колебаниям. — Киев, 1963. — Т. 1. — С. 440–457.

2 *Veivoda O. et. al.* Partial differential equations: Time-periodic solutions. — Alphen aan den Rijn. Sijthoff: Noordhoff, 1981. — 358 p.

3 *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. — Киев, 1984.

4 *Кигурадзе Т.И.* О периодических краевых задач для линейных гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. — 1993. — Т. 29. — № 2. — С. 281–297.

5 *Митропольский Ю.А., Хома Г.П., Громяк М.И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. — Киев: Наук. думка, 1991. — 232 с.

6 *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* Однозначная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т. 39. — № 10. — С. 1343–1354.

7 *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* Однозначная разрешимость краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2002. — Т. 42. — № 11. — С. 1673–1685.

8 *Джумабаев Д.С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1989. — Т. 29. — № 1. — С. 50–66.

9 *Орумбаева Н.Т.* Об одном алгоритме нахождения изолированного решения полупериодической краевой задачи для системы нелинейных гиперболических уравнений // Вестн. Карагандинского ун-та. Сер. Математика. — Караганда, 2008. — № 2(50).

Н.Т.Орымбаева

Гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін периодты шеттік есепті шешудің бір жуық әдісі туралы

Сызықтық емес гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін периодты шеттік есептің шешімін табудың конструктивті алгоритмі ұсынылған. Алгоритмнің жинақтылығының және зерттеліп отырған есептің шешілімдігінің жеткілікті шарттары тағайындалған.

N.T.Orumbaeva

About an approximative method of the periodic boundary value problem’s solution for system of hyperbolic equations

The constructional algorithm of finding periodical boundary value problem’s solution for system of hyperbolic equations is offered. The sufficient conditions of algorithm’s convergence and unique solvability of investigating problem are established.

УДК 517.911

А.Б.Тлеулесова

Жезказганский университет им. О.А.Байконурова

О существовании изолированного решения периодической краевой задачи для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

Установлены условия надежности и сходимости предлагаемого алгоритма, существования изолированного решения периодической двухточечной краевой задачи для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.

Ключевые слова: периодическая краевая задача, импульсное воздействие, метод параметризации, дифференциальное уравнение, задача Коши, итерационный процесс.

Рассматривается нелинейная периодическая краевая задача с импульсным воздействием

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x),\quad t\in[0,T]\setminus\{\theta_1,\theta_2,...,\theta_m\},\quad x\in R^n; \tag{1}$$

$$0=\theta_0<\theta_1<...<\theta_m<\theta_{m+1}=T;$$

$$x(0)=x(T); \tag{2}$$

$$x(\theta_i+0)-x(\theta_i-0)=J_i\left(\lim_{t\to\theta_i-0}x(t)\right),\quad i=\overline{1,m}, \tag{3}$$

где $f:[0,T]\times R^n\to R^n$ — непрерывная по x, кусочно-непрерывная по t с возможным $\left(i=\overline{1,m}\right)$ и разрывами первого рода в точках $t=\theta_i$, $i=\overline{1,m}$, вектор-функция; $J_i:R^n\to R^n$ — непрерывные вектор-функции.

Различные задачи для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, методы их решения и другие вопросы теории импульсных систем были рассмотрены в [1–5].

В данной работе методом параметризации [6] рассматриваются вопросы существования изолированного решения периодической краевой задачи с импульсным воздействием для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Решением задачи (1)–(3) является кусочно-непрерывно дифференцируемая на [0, *T*] вектор-функция $x^*(t)$, удовлетворяющая при всех значениях $t\in[0,T]$, кроме точек $t=\theta_i$, $i=\overline{1,m}$, дифференциальному уравнению (1), граничным условиям (2) и имеющая в точках $t=\theta_i$, $i=\overline{1,m}$ разрыв первого рода, для которых справедлива (3).

Взяв $\theta_0=0$, $\theta_{m+1}=T$, произведем разбиение так, чтобы точки скачка являлись точками разбиения

$$[0,T)=\overset{m+1}{\underset{r=1}{U}}[\theta_{r-1},\theta_r).$$

Через $x_r(t)$ обозначим сужение функции $x(t)$ на r-ый интервал $[\theta_{r-1},\theta_r)$, т.е. $x_r(t)=x(t)$, $[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$, и задачу (1)–(3) сведем к многоточечной краевой задаче с импульсным воздействием

$$\frac{dx_r}{dt}=f(t,x_r),\ t\in[\theta_{r-1},\theta_r),\quad r=\overline{1,m+1}; \tag{4}$$

$$x_1(0)=\lim_{t\to T-0}x_{m+1}(t); \tag{5}$$

$$x_{i+1}(\theta_i+0)-\lim_{t\to\theta_i-0}x_i(t)=J_i\left(\lim_{t\to\theta_i-0}x_i(t)\right),\ i=\overline{1,m}. \tag{6}$$

Значение функции $x_r(t)$ в точках $t=\theta_{r-1}$ обозначим через λ_r и на каждом интервале $t\in[\theta_{r-1},\theta_r)$, произведя замену $u_r(t)=x_r(t)-\lambda_r$, получим эквивалентную задаче (4)–(6) многоточечную краевую задачу с параметром

$$\frac{du_r}{dt}=f(t,u_r+\lambda_r),\ t\in[\theta_{r-1},\theta_r),\quad r=\overline{1,m+1}; \tag{7}$$

$$u_r(\theta_{r-1})=0,\ r=\overline{1,m+1};\tag{8}$$

$$\lambda_1-\lambda_{m+1}-\lim_{t\to T-0}u_{m+1}(t)=0;\tag{9}$$

$$\lambda_{i+1}-\lambda_i-J_i\left(\lambda_i+\lim_{t\to\theta_i-0}u_i(t)\right)=0,\ i=\overline{1,m}.\tag{10}$$

Решением задачи (7)–(10) является пара $(\lambda,u[t])$ с элементами $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{m+1})'\in R^{n(m+1)}$, $u[t]=(u_1(t),u_2(t),...,u_{m+1}(t))'\in C([0,T],\tilde{\theta},R^{n(m+1)})$, $\tilde{\theta}=(\theta_1,\theta_2,...,\theta_{m+1})$, где функции $u_r(t)$ непрерывно дифференцируемы на $t\in[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$, и при $\lambda_r=\lambda_r^*$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений (7) и условиям (8)–(10).

Если $x_r(t)$ — решение задачи (4)–(6), то система пар $(\lambda_r,u_r(t))$, $r=\overline{1,m+1}$, с элементами $\lambda_r=x(\theta_{r-1})$, $u_r(t)=x_r(t)-x_r(\theta_{r-1})$, $t\in[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$, является решением задачи (7)–(10). И, наоборот, если система пар $(\tilde{\lambda}_r,\tilde{u}_r(t))$, $r=\overline{1,m+1}$, — решение задачи (7)–(10), то функция $\tilde{x}(t)$, определяемая равенствами

$$\tilde{x}(t)=\begin{cases}\tilde{\lambda}_r+\tilde{u}_r(t),t\in[\theta_{r-1},\theta_r);\\ \tilde{\lambda}_{m+1}+\lim\limits_{t\to T-0}\tilde{u}_{m+1}(t),t=T,\end{cases}$$

будет решением задачи (4)–(6).

Введение дополнительных параметров λ_r позволяет получить начальные условия (8) для функций $u_r(t)$, определенных на $[\theta_{r-1},\theta_r)$. При фиксированном значении параметров λ_r задача Коши (7), (8) на интервале $[\theta_{r-1},\theta_r)$ эквивалентна нелинейному интегральному уравнению

$$u_r(t)=\int_{\theta_{r-1}}^{t}f(\tau,u_r(\tau)+\lambda_r)d\tau,\ t\in[\theta_{r-1},\theta_r),\ r=\overline{1,m+1}.\tag{11}$$

Вместо $u_r(\tau)$ подставив соответствующую правую часть (11) и повторив этот процесс ν $(\nu=1,2,...)$ раз, получим представление функции $u_r(t)$, отсюда, определив $\lim\limits_{t\to\theta_r-0}u_r(t)$, $r=\overline{1,m+1}$, и подставив соответствующие им выражения в (9), (10), получим систему нелинейных уравнений относительно $\lambda_r\in R^n$

$$Q_{\nu,\tilde{\theta}}(\lambda,u)=0,\ \lambda\in R^{n(m+1)}.\tag{12}$$

Для нахождения пары $(\lambda,u[t])$ имеем замкнутую систему уравнений (11), (12), определяемую через функции $f(t,x)$, $J_i(x)$, точки θ_r и число подстановок ν. Возьмем $\lambda^{(0)}=(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},...,\lambda_{m+1}^{(0)})'\in R^{n(m+1)}$ и предположим, что задача Коши (7), (8) при $\lambda_r=\lambda_r^{(0)}$ имеет решение $u_r^{(0)}(t)$, непрерывные на $[\theta_{r-1},\theta_r)$ и для которых существует конечный левосторонний предел $\lim\limits_{t\to\theta_r-0}u_r^{(0)}(t)$ при всех $r=\overline{1,m+1}$. Множество таких $\lambda^{(0)}\in R^{n(m+1)}$ обозначим $Z^0(f,\tilde{\theta})$.

Взяв $\lambda^{(0)}\in Z^{(0)}(f,\tilde{\theta})$, $u^{(0)}[t]$, непрерывные и неотрицательные на $[\theta_{r-1},\theta_r]$, функции $V_r(t)\geq 0$, число $\sigma>0$, построим множества

$$S(\lambda^{(0)},\sigma)=\left\{(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{m+1})'\in R^{n(m+1)}:\left\|\lambda_r-\lambda_r^{(0)}\right\|<\sigma,r=\overline{1,m+1}\right\};$$

$$S(u^{(0)}[t],V[t]\sigma)=\Big\{(u[t]=u_1(t),u_2(t),...,u_{m+1}(t))'\in R^{n(m+1)}:$$

$$:\left\|u_r(t)-u_r^{(0)}(t)\right\|<V_r(t)\sigma,t\in[\theta_{r-1},\theta_r),r=\overline{1,m+1}\Big\};$$

$$Z_0\left(V[t],\sigma\right)=\Big\{(t,x):t\in[0,T],\left\|x-\lambda_r^{(0)}-u_r^{(0)}(t)\right\|<\left[V_r(t)+1\right]\sigma;$$

$$t\in\left[\theta_{r-1},\theta_r\right),r=\overline{1,m+1};$$

$$\left\|x-\lambda_{m+1}^{(0)}-\lim_{t\to T-0}u_{m+1}^{(0)}(t)\right\|<\left[V_{m+1}(T)+1\right]\sigma,\ t=T\Big\}\ ;$$

$$Z_i\left(V[t],\sigma\right)=\left\{x\in R^n:\left\|x-\lambda_r^{(0)}-\lim_{t\to\theta_i-0}u_i^{(0)}(t)\right\|<\left[V_i(\theta_i)+1\right]\sigma\right\},r=\overline{1,m}\ .$$

Через $W=W\left(f,L(t),\tilde{\theta},J_i,L_i,i=\overline{1,m}\right)$ обозначим совокупность $\left(\lambda^{(0)},u^{(0)}[t],V[t],\sigma\right)$, при которых функции $f(t,x)$, $J_i(x)$ соответственно в $Z_0\left(V[t],\sigma\right)$, $Z_i\left(V[t],\sigma\right)$ имеют равномерно непрерывные частные производные и выполняются неравенства $\left\|f_x'(t,x)\right\|\le L(t)$, $\left\|J_{i,x}'(x)\right\|\le L_i, i=\overline{1,m}$, где $L(t)$ — кусочно-непрерывная функция на $[0,T]$ с возможными разрывами первого рода в точках $t=\theta_i$, $i=\overline{1,m}$, удовлетворяющие соотношениям $\exp\left(\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t}L(\tau)d\tau\right)-1\le V_r(t)$, $t\in\left[\theta_{r-1},\theta_r\right), r=\overline{1,m+1}.$ Предполагая существование $\lambda^{(0)}\in Z^0\left(f,\tilde{\theta}\right)$, за начальное приближение решения задач (7)–(10) возьмем пару $\left(\lambda^{(0)},u^{(0)}[t]\right)$, и последовательные приближения строим по следующему алгоритму:

Шаг 1. а) Параметр $\lambda^{(1)}\in R^{n(m+1)}$ определяем из систем уравнений (12) при $u=u^{(0)}$;

б) Решая задачу Коши (7), (8) при $\lambda_r=\lambda_r^{(1)}$, находим функции $u_r^{(1)}(t)$, $t\in\left[\theta_{r-1},\theta_r\right)$, $r=\overline{1,m+1}.$

Шаг 2. а) Подставляя найденные $u_r^{(1)}$, $r=\overline{1,m+1}$, в (12), определяем $\lambda^{(2)}\in R^{n(m+1)}$;

б) Решая задачу Коши (7), (8) на интервалах $\left[\theta_{r-1},\theta_r\right)$ при $\lambda_r=\lambda_r^{(2)}$, находим функцию $u_r^{(2)}(t), r=\overline{1,m+1}$.

Продолжая процесс на k -ом шаге, получаем пару $\left(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t]\right)$. Для нахождения решения системы уравнений (12) мы воспользуемся теоремой 1 из [7].

Достаточные условия осуществимости, сходимости предложенного алгоритма и существования изолированного решения многоточечной краевой задачи с параметром (7)-(10) устанавливает

Теорема 1. Пусть существуют $\nu\in N$, $\left(\lambda^{(0)},u^{(0)}[t],V[t],\sigma\right)\in W$, при которых матрица Якоби $\dfrac{\partial Q_{\nu,\tilde{\theta}}(\lambda,u)}{\partial\lambda}$ обратима для любых $\left(\lambda,u[t]\right)\in S\left(\lambda^{(0)},\sigma\right)\times S\left(u^{(0)}[t],V[t]\sigma\right)$ и справедливы неравенства

1) $\left\|\left[\dfrac{\partial Q_{\nu,\tilde{\theta}}(\lambda,u)}{\partial\lambda}\right]^{-1}\right\|\le\gamma_\nu\left(\tilde{\theta}\right)$;

2) $q_\nu\left(\tilde{\theta}\right)=\gamma_\nu\left(\tilde{\theta}\right)\max\left(1,\max\limits_{r=\overline{1,m+1}}\left\|L_i\right\|\right)\max\limits_{r=\overline{1,m+1}}\left\{e^{\int\limits_{\theta_{r-1}}^{\theta_r}L(t)dt}-\sum\limits_{i=0}^{\nu}\dfrac{1}{i!}\left(\int\limits_{\theta_{r-1}}^{\theta_r}L(t)dt\right)^i\right\}<1;$

3) $\dfrac{1}{1-q_\nu\left(\tilde{\theta}\right)}\gamma_\nu\left(\tilde{\theta}\right)\left\|Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(0)},u^{(0)}\right)\right\|<\sigma$.

Тогда определяемая алгоритмом последовательность пар $\left(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t]\right)$, $k=0,1,2,\ldots$ содержится в $S\left(\lambda^{(0)},\sigma\right)\times S\left(u^{(0)}[t],V[t]\sigma\right)$ и сходится к решению задачи (7)–(10) — паре $\left(\lambda^*,u^*[t]\right)\in S\left(\lambda^{(0)},\sigma\right)\times S\left(u^{(0)}[t],V[t]\sigma\right)$ и справедливы оценки а) $\left\|\lambda^{*}-\lambda^{(k)}\right\| \le \left[q_{\nu}\left(\tilde{\theta}\right)\right]^{k} \dfrac{\gamma_{\nu}\left(\tilde{\theta}\right)}{1-q_{\nu}\left(\tilde{\theta}\right)}\left\|Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(0)},u^{(0)}\right)\right\|$;

б) $\left\|u_{r}^{*}(t)-u_{r}^{(k)}(t)\right\| \le \left(e^{\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t} L(\tau)d\tau}-1\right)\left\|\lambda_{r}^{*}(t)-\lambda_{r}^{(k)}(t)\right\|$, $t\in\left[\theta_{r-1},\theta_{r}\right)$, $r=\overline{1,m+1}$.

Причем любое решение задачи (7)–(10) в $S\left(\lambda^{(0)},\sigma\right)\times S\left(u^{(0)}[t],V[t]\sigma\right)$ изолировано.

Доказательство. В силу условий теоремы оператор $Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda,u^{(0)}\right)$ в $S\left(\lambda^{(0)},\rho\right)$ удовлетворяет всем предположениям теоремы 1 [7]. Взяв число $\varepsilon_{0}>0$, удовлетворяющее неравенствам $\varepsilon_{0}\gamma_{\nu}\left(\tilde{\theta}\right)\le\frac{1}{2}$; $\gamma_{\nu}\left(\tilde{\theta}\right)\left\|Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\tilde{\lambda},u^{(0)}\right)\right\|<\sigma\left[1-\varepsilon_{0}\gamma_{\nu}\left(\tilde{\theta}\right)\right]$ и используя равномерную $S\left(\lambda^{(0)},\rho\right)$ непрерывность матрицы Якоби $\dfrac{\partial Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda,u^{(0)}\right)}{\partial\lambda}$, найдем $\delta_{0}\in\left(0;\frac{\sigma}{2}\right]$ такое, что $\left\|\dfrac{\partial Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda,u^{(0)}\right)}{\partial\lambda}-\dfrac{\partial Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\tilde{\lambda},u^{(0)}\right)}{\partial\lambda}\right\|<\varepsilon_{0}$ для любых $\lambda,\ \tilde{\lambda}\in S\left(\lambda^{(0)},\rho\right)$ при $\left\|\lambda-\tilde{\lambda}\right\|<\delta_{0}$. Выбрав $\alpha\ge\alpha_{0}=\max\left(\dfrac{1,\gamma_{\nu}\left(\tilde{\theta}\right)\left\|\partial Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda,u^{(0)}\right)\right\|}{\delta_{0}}\right)$, построим итерационный процесс

$$\lambda^{(1,0)}=\lambda^{(0)},\ \lambda^{(1,s+1)}=\lambda^{(1,s)}-\frac{1}{\alpha}\left[\frac{\partial Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(1,s)},u^{(0)}\right)}{\partial\lambda}\right]^{-1}Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(1,s)},u^{(0)}\right),\ m=0,1,... \tag{13}$$

По теореме 1 [7] итерационный процесс (13) сходится к $\lambda^{(1)}\in S\left(\lambda^{(0)},\delta\right)$ — изолированному решению уравнения $Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda,u^{(0)}\right)=0$ и

$$\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|\le\gamma_{\nu}\left(\tilde{\theta}\right)\left\|Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(1,S)},u^{(0)}\right)\right\|<\sigma. \tag{14}$$

При наших предположениях задача Коши (7), (8) при $\lambda_{r}=\lambda_{r}^{(1)}$ на $\left[\theta_{r-1},\theta_{r}\right)$ имеет единственное решение $u_{r}^{(1)}(t)$ и для него справедливо неравенство

$$\left\|u_{r}^{(1)}(t)-u_{r}^{(0)}(t)\right\|\le\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t}\alpha(\tau)\left\|\lambda_{r}^{(1)}-\lambda_{r}^{(0)}\right\|+\left\|u_{r}^{(1)}(\tau)-u_{r}^{(0)}(\tau)\right\|d\tau.$$

Используя лемму Гронуолла-Беллмана, имеем

$$\left\|u_{r}^{(1)}(t)-u_{r}^{(0)}(t)\right\|\le\left(\exp\left[\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t}\alpha(\tau)d\tau\right]-1\right)\left\|\lambda_{r}^{(1)}-\lambda_{r}^{(0)}\right\|,\ t\in\left[\theta_{r-1},\theta_{r}\right),\ r=\overline{1,m+1}. \tag{15}$$

Откуда и из (14) получаем $u^{(1)}[t]\in\overline{S}\left(u^{(0)}[t],\ R[t]\sigma\right)$.

Из структуры оператора $Q_{\nu,\tilde{\theta}}(\lambda,u)$ и равенства $Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(1)},u^{(0)}\right)=0$ следует, что

$$\gamma_{\nu}\left(\tilde{\theta}\right)\left\|Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(1)},u^{(1)}\right)\right\|=\gamma_{\nu}\left(\tilde{\theta}\right)\left\|Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(1)},u^{(1)}\right)-Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(1)},u^{(0)}\right)\right\|\le$$

$$\le\gamma_{\nu}\left(\tilde{\theta}\right)\max\left(1,\max_{i=\overline{1,m}}\left\|L_{i}\right\|\right)\max_{r=\overline{1,m+1}}\int\limits_{\theta_{r-1}}^{\theta_{r}}L(\tau_{1})...\int\limits_{\theta_{r-1}}^{\theta_{r}}L(\tau_{1}).\left\|u_{r}^{(1)}(\tau_{\nu})-u_{r}^{(0)}(\tau_{\nu})\right\|d\tau_{\nu}...d\tau_{1}.$$

Подставив правую часть (15) и вычислив повторные интегралы, получим

$$\gamma_{\nu}\left(\tilde{\theta}\right)\left\|Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(1)},u^{(1)}\right)\right\|\le q_{\nu}\left(\tilde{\theta}\right)\left\|\left(\lambda^{(1)}-\lambda^{0}\right)\right\|. \tag{16}$$

Если $\lambda\in S\left(\lambda^{(1)},\sigma_1+\tilde{\varepsilon}\right)$, $\sigma_1=\gamma_\nu\left(\tilde{\theta}\right)\left\|Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(1)},u^{(1)}\right)\right\|$, число $\tilde{\varepsilon}>0$ удовлетворяет неравенству $\tilde{\varepsilon}+\gamma_\nu\left(\tilde{\theta}\right)\left\|Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(0)},u^{(0)}\right)\right\|/\left[1-q_\nu\left(\tilde{\theta}\right)\right]<\sigma$, то в силу неравенств 2), 3) теоремы 1 и (14), (16) имеет место оценка

$$\left\|\lambda-\lambda^{(0)}\right\|\le\left\|\lambda-\lambda^{(1)}\right\|+\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|<\gamma_\nu\left(\tilde{\theta}\right)\left\|Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(1)}\right),u^{(1)}\right\|+\tilde{\varepsilon}+\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|\le$$

$$\le\left[q_\nu\left(\tilde{\theta}\right)+1\right]\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|+\tilde{\varepsilon}<\frac{\gamma_\nu\left(\tilde{\theta}\right)}{1-q_\nu\left(\tilde{\theta}\right)}\left\|Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(0)},u^{(0)}\right)\right\|+\tilde{\varepsilon}<\sigma,$$

то есть $S\left(\lambda^{(1)},\sigma_1+\tilde{\varepsilon}\right)\subset S\left(\lambda^{(0)},\sigma\right)$. Оператор $Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda,u^{(1)}\right)$ в $S\left(\lambda^{(1)},\sigma_1+\tilde{\varepsilon}\right)$ удовлетворяет всем условиям теоеремы 1 [7], поэтому итерационный процесс

$$\lambda^{(2,0)}=\lambda^{(1)},\ \lambda^{(2,S+1)}=\lambda^{(2,S)}-\frac{1}{\alpha}\left[\frac{\partial Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(2,m)},u^{(0)}\right)}{\partial\lambda}\right]^{-1}Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(2,m)},u^{(0)}\right),m=0,1,...$$

сходится к $\lambda^{(2)}\in S\left(\lambda^{(1)},\sigma_1+\tilde{\varepsilon}\right)$ — изолированному решению уравнения $Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda,u^{(1)}\right)=0$ и $\left\|\lambda^{(2)}-\lambda^{(1)}\right\|\le\gamma_\nu\left(\tilde{\theta}\right)\left\|Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(1)},u^{(1)}\right)\right\|$ отсюда и из (16) вытекает неравенство

$$\left\|\lambda^{(2)}-\lambda^{(1)}\right\|\le q_\nu\left(\tilde{\theta}\right)\left\|\left(\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right)\right\|. \tag{17}$$

Предполагая, что пара $\left\|\lambda^{(2)}-\lambda^{(1)}\right\|\le q_\nu\left(\tilde{\theta}\right)\left\|\left(\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right)\right\|$ определена и установлены оценки

$$\left\|\lambda^{(k-1)}-\lambda^{(k-2)}\right\|\le q_\nu\left(\tilde{\theta}\right)\left\|\left(\lambda^{(k-2)}-\lambda^{(k-3)}\right)\right\|\le\left[q_\nu\left(\tilde{\theta}\right)\right]^{k-2}\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|; \tag{18}$$

$$\gamma_\nu\left(\tilde{\theta}\right)\left\|Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(k-2)},u^{(k-1)}\right)\right\|\le q_\nu\left(\tilde{\theta}\right)\left\|\lambda^{(k-1)},\lambda^{(k-2)}\right\|, \tag{19}$$

k -е приближение по параметру $\lambda^{(k)}$ находим из уравнения $Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda,u^{(k-1)}\right)=0$. Используя (18), (19) и равенство $Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(k-1)},u^{(k-1)}\right)=0$, аналогично (15), устанавливаем справедливость неравенства

$$\gamma_\nu\left(\tilde{\theta}\right)\left\|Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(k-1)},u^{(k-1)}\right)\right\|\le q_\nu\left(\tilde{\theta}\right)\left\|\lambda^{(k-1)},\lambda^{(k-2)}\right\|\le\left[q_\nu\left(\tilde{\theta}\right)\right]^{k-1}\left\|\lambda^{(1)}+\lambda^{(0)}\right\|. \tag{20}$$

Возьмем $\sigma_{k-1}=\gamma_\nu\left(\tilde{\theta}\right)\left\|Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(k-1)},u^{(k-1)}\right)\right\|$ и покажем, что $S\left(\lambda^{(k-1)},\sigma_{k-1}+\tilde{\varepsilon}\right)\subset S\left(\lambda^{(0)},\sigma\right)$. Действительно, в виду (18), (19), (20) и (3)

$$\left\|\left(\lambda-\lambda^{(0)}\right)\right\|\le\left\|\lambda-\lambda^{(k-1)}\right\|+\left\|\lambda^{(k-1)}-\lambda^{(k-2)}\right\|+...+\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|<$$

$$<\sigma_{k-1}+\tilde{\varepsilon}+\left[q_\nu\left(\tilde{\theta}\right)\right]^{k-2}\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|+...+\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|\le \qquad .$$

$$\le\left(\left[q_\nu\left(\tilde{\theta}\right)\right]^{k-1}+...+1\right)\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|+\tilde{\varepsilon}<\frac{\gamma_\nu\left(\tilde{\theta}\right)}{1-q_\nu\left(\tilde{\theta}\right)}\left\|Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(0)},u^{(0)}\right)\right\|+\tilde{\varepsilon}<\sigma.$$

Так как $Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda,u^{(k-1)}\right)$ в $S\left(\lambda^{(k-1)},\sigma_{k-1}+\tilde{\varepsilon}\right)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1[1], то существует $\lambda^{(k)}\in S\left(\lambda^{(k-1)},\sigma_{k-1}+\tilde{\varepsilon}\right)$ — решение уравнения $Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda,u^{(k-1)}\right)=0$ и справедлива оценка

$$\left\|\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)}\right\|\le q_\nu\left(\tilde{\theta}\right)\left\|Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(k-1)},u^{(k-1)}\right)\right\|. \tag{21}$$

Решая задачи Коши (7), (8) при $\lambda_r=\lambda_r^{(k)}$, находим функции $u_r^{(k)}(t)$, $t\in\left[\theta_{r-1},\theta_r\right)$, $r=\overline{1,m+1}$. Если $\sigma_k=\gamma_\nu\left(\tilde{\theta}\right)\left\|Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(k)},u^{(k)}\right)\right\|=0$, то $Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(k)},u^{(k)}\right)=0$. Отсюда, учитывая, что $u_r^{(k)}(t)$ является решением задачи Коши (7), (8) при $\lambda_r=\lambda_r^{(k)}$ на $t\in\left[\theta_{r-1},\theta_r\right)$, $r=\overline{1,m+1}$, получаем равенства

$$\lambda_1^{(k)} - \lambda_{m+1}^{k} - \lim_{t \to T-0} u_1^{(k)}(t) = 0\,;\ \lambda_{i+1}^{(k)} - \lambda_i^{(k)} - J_i\left(\lambda_i^{(k)} + \lim_{t \to \theta_i - 0} u_i^{(k)}(t)\right) = 0\,,$$

то есть пара $\left(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t]\right)$ — решение задачи (7)–(10).

Используя (20), (21) и неравенство Гронуолла-Беллмана [8], устанавливаем оценки

$$\left\|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\right\| \le q_\nu\left(\tilde{\theta}\right)\left\|\left(\lambda^{(k-1)} - \lambda^{(k-2)}\right)\right\|; \tag{22}$$

$$\left\|u_r^{(k)}(t) - u_r^{(k-1)}(t)\right\| \le \left(\exp\left[\int_{\theta_{r-1}}^{t} L(\tau) d\tau\right] - 1\right)\left\|\lambda_r^{(k)} - \lambda_r^{(k-1)}\right\|,\ t \in [\theta_{r-1}, \theta_r),\ r = \overline{1, m+1}\,. \tag{23}$$

Из неравенств (22), (23) и $q_\nu(\tilde{\theta}) < 1$ вытекает, что последовательность пар $\left(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t]\right)$ при $k \to \infty$ сходится к $\left(\lambda^{(*)}, u^{(*)}[t]\right)$ — решению задачи (7)-(10). Причем, в силу неравенств $\exp\left(\int_{\theta_{r-1}}^{t} L(\tau) d\tau\right) - 1 \le V_r(t)$, $t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)$, $r = \overline{1, m+1}$, и 3) теоремы 1, $\left(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t]\right)$, $k = 1, 2, \ldots$ и $\left(\lambda^{(*)}, u^{(*)}[t]\right)$ принадлежат $S\left(\lambda^{(0)}, \sigma\right) \times S\left(u^{(0)}[t], V[t]\sigma\right)$. В неравенствах

$$\left\|\lambda^{(k+p)} - \lambda^{(k)}\right\| < \frac{1}{1 - q_\nu(\tilde{\theta})}[q_\nu\left(\tilde{\theta}\right)]^k \gamma_\nu(\tilde{\theta})\left\|Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(0)}, u^{(0)}\right)\right\|;$$

$$\left\|u_r^{(k+p)}(t) - u_r^{(k)}(t)\right\| \le \left(\exp\left[\int_{\theta_{r-1}}^{t} L(\tau) d\tau\right] - 1\right)\left\|\lambda_r^{(k+p)} - \lambda_r^{(k)}\right\|,\ t \in [\theta_{r-1}, \theta_r),\ r = \overline{1, m+1}\,,$$

переходя к пределу при $p \to \infty$, получаем оценки а), б) теоремы 1.

Покажем изолированность решения. Пусть пара $\left(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t]\right)$ — решение задачи (7)–(10) принадлежащее $S\left(\lambda^{(0)}, \sigma\right) \times S\left(u^{(0)}[t], V[t]\sigma\right)$. Тогда существует число $\tilde{\delta} > 0$ такое, что $\left\|\tilde{\lambda} - \lambda^{(0)}\right\| + \tilde{\delta} < \sigma$.

Учитывая, что функции $\tilde{u}_r(t)$, $u_r^{(0)}(t)$ являются решениями задачи Коши (7), (8) при $\lambda_r = \tilde{\lambda}_r$, $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$ соответственно, и вновь используя неравенство Гронуолла-Беллмана, имеем

$$\left\|\tilde{u}_r(t) - u_r^{(0)}(t)\right\| \le \left(\exp\left[\int_{\theta_{r-1}}^{t} L(\tau) d\tau\right] - 1\right)\left\|\tilde{\lambda}_r - \lambda_r^{(0)}\right\| \le V_r(t)\left\|\tilde{\lambda}_r - \lambda_r^{(0)}\right\|,\ t \in [\theta_{r-1}, \theta_r),\ r = \overline{1, m+1}\,.$$

Теперь, если $\lambda \in S\left(\tilde{\lambda}, \tilde{\delta}\right)$, $u[t] \in S\left(u^{(0)}[t], V[t]\sigma\right)$, то в силу неравенств

$$\left\|\lambda - \lambda^{(0)}\right\| \le \left\|\lambda - \tilde{\lambda}\right\| + \left\|\tilde{\lambda} - \lambda^{(0)}\right\| \le \delta + \left\|\tilde{\lambda} - \lambda^{(0)}\right\| < \sigma\,,\ r = \overline{1, m+1}\,;$$

$$\left\|u_r(t) - u_r^{(0)}(t)\right\| \le \left\|u_r(t) - \tilde{u}_r(t)\right\| + \left\|\tilde{u}_r(t) - u_r^{(0)}(t)\right\| \le V_r(t)\tilde{\delta} + V_r(t)\left\|\tilde{\lambda}_r - \lambda_r^{(0)}\right\| < V_r(t)\sigma\,;$$

$t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)$, $r = \overline{1, m+1}$, имеем $\lambda \in S\left(\lambda^{(0)}, \sigma\right)$, $u[t] \in S\left(u^{(0)}[t], V[t]\sigma\right)$, то есть $S\left(\tilde{\lambda}, \tilde{\delta}\right) \subset S\left(\lambda^{(0)}, \sigma\right)$, $\overline{S}\left(\tilde{u}[t], V[t]\tilde{\delta}\right) \subset \overline{S}\left(u^{(0)}[t], V[t]\sigma\right)$.

Возьмем число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\varepsilon\gamma_\nu(\tilde{\theta}) < 1\,,\ q_\nu(\tilde{\theta}) < 1 - \varepsilon\gamma_\nu(\tilde{\theta})\,. \tag{24}$$

Из равномерной непрерывности $f_x'(t, x)$, $J_{i,x}'(x)$, $i = \overline{1, m}$ соответственно в $Z_0\left(V[t], \sigma\right)$, $Z_i\left(V[t], \sigma\right)$ и из структуры матрицы Якоби $\dfrac{\partial Q_{\nu,\tilde{\theta}}(\lambda, u)}{\partial \lambda}$ вытекает ее равномерная непрерывность в $S\left(\lambda^*, \tilde{\delta}\right) \times S\left(u^*[t], V[t]\tilde{\delta}\right)$. Поэтому существует число $\delta \in \left(0, \tilde{\delta}\right]$, при котором $\left\|\dfrac{\partial Q_{\nu,\tilde{\theta}}(\lambda, u)}{\partial \lambda} - \dfrac{\partial Q_{\nu,\tilde{\theta}}(\lambda^*, u^*)}{\partial \lambda}\right\| \le \varepsilon$ для всех $(\lambda, u) \in S\left(\lambda^*, \delta\right) \times S\left(u^*[t], V[t]\delta\right)$. Заметим, что если $\left(\lambda^*, u^*[t]\right)$ — решение задачи (7)–(10), то $Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^*, u^*\right) = 0$ при любом $\nu \in N$.

Пусть $\left(\tilde{\lambda},\tilde{u}\right)\in S\left(\lambda^*,\delta\right)\times S\left(u^*[t],V[t]\delta\right)$ — другое решение задачи (7)–(10). Тогда из равенств $Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^*,u^*\right)=0;\ Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\tilde{\lambda},\tilde{u}\right)=0$ и

$$\lambda^*=\lambda^*-\left[\frac{\partial Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^*,u^*\right)}{\partial\lambda}\right]^{-1}Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^*,u^*\right),\ \tilde{\lambda}=\tilde{\lambda}-\left[\frac{\partial Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^*,u^*\right)}{\partial\lambda}\right]^{-1}Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\tilde{\lambda},\tilde{u}\right)$$

следует, что $\lambda^*-\tilde{\lambda}=\lambda^*-\tilde{\lambda}-\left[\frac{\partial Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^*,u^*\right)}{\partial\lambda}\right]^{-1}\left[Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^*,u^*\right)-Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\tilde{\lambda},u^*\right)+Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\tilde{\lambda},u^*\right)-Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\tilde{\lambda},\tilde{u}\right)\right].$

По формуле конечных приращений Лагранжа для разности $Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^*,u^*\right)-Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\tilde{\lambda},u^*\right)$ справедливо равенство

$$\lambda^*-\tilde{\lambda}=-\left[\frac{\partial Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^*,u^*\right)}{\partial\lambda}\right]^{-1}\int_0^1\left(\frac{\partial Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\tilde{\lambda}+t(\lambda^*-\tilde{\lambda}),u\right)}{\partial\lambda}-\frac{\partial Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^*,u^*\right)}{\partial\lambda}\right)dt\left(\lambda^*-\tilde{\lambda}\right)-$$

$$-\left[\frac{\partial Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^*,u^*\right)}{\partial\lambda}\right]^{-1}\left[Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\tilde{\lambda},u^*\right)-Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\tilde{\lambda},\tilde{u}\right)\right].$$

Отсюда следует оценка

$$\left\|\lambda^*-\tilde{\lambda}\right\|\le\frac{\gamma_\nu(\tilde{\theta})}{1-\varepsilon\gamma_\nu(\tilde{\theta})}\left\|Q_{\nu,\tilde{\theta}}(\tilde{\lambda},u^*)-Q_{\nu,\tilde{\theta}}(\tilde{\lambda},\tilde{u})\right\|\le\frac{\gamma_\nu(\tilde{\theta})}{1-\varepsilon\gamma_\nu(\tilde{\theta})}\max\left(1,\max_{i=\overline{1,m}}\left\|L_i\right\|\right)\times$$

$$\times\max_{r=\overline{1,m+1}}\left\{\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r}L(\tau_1)\ldots\int_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}L(\tau_\nu)\left\|u_r^*(\tau_\nu)-\tilde{u}_r(\tau_\nu)\right\|d\tau_\nu\ldots d\tau_1\right\}. \tag{25}$$

И так как $\left\|u_r^*(t)-\tilde{u}_r(t)\right\|\le\int_{\theta_{r-1}}^{t}L(\tau)\left(\left\|\lambda_r^*-\tilde{\lambda}_r\right\|+\left\|u_r^*(\tau)-\tilde{u}_r(\tau)\right\|\right)d\tau,$ то в силу неравенства Гронуолла-Беллмана имеют место соотношения

$$\left\|u_r^*(t)-\tilde{u}_r(t)\right\|\le\left(\exp\left(\int_{\theta_{r-1}}^{t}L(\tau)d\tau-1\right)\left\|\lambda_r^*-\tilde{\lambda}_r\right\|;\right. \tag{26}$$

$$\left\|\lambda^*-\tilde{\lambda}\right\|\le\frac{q_\nu(\tilde{\theta})}{1-\varepsilon\gamma_\nu(\tilde{\theta})}\left\|\lambda^*-\tilde{\lambda}\right\|. \tag{27}$$

Таким образом, в силу (25), (26), (27) неравенств имеют место равенства $\lambda_r^*=\tilde{\lambda}_r,\ \ u_r^*(t)=\tilde{u}_r(t),$ $t\in\left[\theta_{r-1},\theta_r\right),\ \ r=\overline{1,m+1}$. Теорема 1 доказана.

Функции $x^{(k)}\left(t\right),\ k=0,1,2,\ldots$ определили равенствами

$$x^{(k)}\left(t\right)=\begin{cases}\lambda_r^{(k)}+u_r^{(k)}\left(t\right),\ t\in\left[\theta_{r-1},\theta_r\right),r=\overline{1,m+1};\\ \lambda_{m+1}^{(k)}+\lim\limits_{t\to T-0}u_{m+1}^{(k)}\left(t\right),\ t=T,\end{cases}$$

через $S\left(x^{(0)}\left(t\right),\left[V\left[t\right]+1\right]\sigma\right)$ обозначим множество кусочно-непрерывно дифференцируемых функций $x:\left[0,T\right]\to R^n$, удовлетворяющих неравенствам

$$\left\|x\left(t\right)-x^{(0)}\left(t\right)\right\|<\left[V_r\left(t\right)+1\right]\sigma,\ t\in\left[\theta_{r-1},\theta_r\right),r=\overline{1,m+1},\ \left\|x\left(T\right)-x^{(0)}\left(T\right)\right\|<\left[V_{m+1}\left(T\right)+1\right]\sigma.$$

Ввиду эквивалентности задач (1)–(3) и (7)–(10) из теоремы 1 следует

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1, то последовательность функций $\left(x^{(k)}\left(t\right)\right),\ k=0,1,\ldots$ содержится в $S\left(x^{(0)}\left(t\right),\left[V\left[t\right]+1\right]\sigma\right)$, сходится к $x^*\left(t\right)$ — изолированному решению задачи (1)–(3) в $S\left(x^{(0)}\left(t\right),\left[V\left[t\right]+1\right]\sigma\right)$ и справедливы неравенства

$$\left\|x^*(t)-x^{(k)}(t)\right\|<\left[q_\nu\left(\tilde{\theta}\right)\right]^k\frac{\gamma_\nu\left(\tilde{\theta}\right)}{1-q_\nu\left(\tilde{\theta}\right)}\exp\left(\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t}L(\tau)d\tau\right)\left\|Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(0)},u^{(0)}\right)\right\|,\quad t\in\left[\theta_{r-1},\theta_r\right),r=\overline{1,m+1}.\qquad(28)$$

Причем любое решение задачи (1)–(3) в $S\left(x^{(0)}(t),\left[V[t]+1\right]\sigma\right)$ изолировано.

Доказательство. Пусть условия теоремы 1 выполнены. Так как для всех $k=0,1,2,...$ пара $(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t])$ содержится в $S\left(\lambda^{(0)},\sigma\right)\times S\left(u^{(0)}[t],V[t]\sigma\right)$, сходится к $\left(\lambda^*,u^*[t]\right)\in$ $\in S\left(\lambda^{(0)},\sigma\right)\times S\left(u^{(0)}[t],V[t]\sigma\right)$ — решению задачи (7)–(10), то определенная нами последовательность функций $\left(x^{(k)}(t)\right)$, $k=0,1,2,...$ содержится в $S\left(x^{(0)}(t),\left(V[t]+1\right)\sigma\right)$, сходится к $x^*(t)\in S\left(x^{(0)}(t),\left[V(t)+1\right]\sigma\right)$ — решению задачи (1)–(3). В силу неравенств а), б) теоремы 1 при $t\in\left[\theta_{r-1},\theta_r\right)$, $r=\overline{1,m+1}$, имеет место неравенство (28). Теорема 2 доказана.

Список литературы

1 *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. — Киев: Наук. думка, 1986.

2 *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Периодические и почти периодические решения дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Украинский мат. журн. — 1980. — Т. 34. — № 1. — С. 66–73.

3 *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987. — 125 с.

4 *Роговченко Ю.В., Трофимчук С.И.* Периодические решения слабо нелинейных систем с импульсным воздействием // Украинский мат. журн. — 1989. — Т. 41. — № 5. — С. 622–626.

5 *Martynyuk A.A., Chernetzkaya L.N.* On boundedness of the solution to impulsive system // Прикладная механика. — 1997. — № 7. — Т. 33. — С. 88–94.

6 *Джумабаев Д.С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1989. — Т. 29. — № 1. — С. 50–66.

7 *Джумабаев Д.С.* Итерационные процессы с демпфирующими множителями и их применения // Матем. журн. — Алматы, 2001. — Т. 1. — № 1.

8 *Филатов А.Н., Шарова Л.В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. — М.: Наука. — 152 с.

А.Б.Тілеулесова

Импульсті әсерлі сызықты емес жай дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін периодты шеттік есептің оқшауланған шешімінің бар болуы туралы

Импульсті әсерлі сызықты емес жай дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін периодты шеттік есептің оқшауланған шешімінің бар болуы мен ұсынылған алгоритмнің орындалуы мен жинақтылығының жеткілікті шарттары тағайындалған.

A.B.Tleulesova

On the existence of an isolated solution of periodic boundary problems for systems of nonlinear ordinary differential equations with impulse input

The conditions of reliability and convergence of offering algorithm and the existence of isolated solution of periodical two-point value problem for systems of nonlinear ordinary differential equations with impulse influence are established.

МЕХАНИКА

УДК 624.04(07)

А.К.Бейсебаев, И.Н.Зяблов

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

Расчет рамной конструкции на устойчивость с упругими узлами

Рассчитаны различные интерфейсы узлов рамных конструкций на подвижные нагрузки несущих балок с грузами. Рассмотрено влияние изменения коэффициента эластичности центральных интерфейсов. Выполнен сравнительный анализ упруго-деформированных узлов с жесткими узлами.

Ключевые слова: узловые сопряжения, рамные конструкции, шарнир, линейные смещения, двухпролетный каркас, единичная эпюра, критический параметр.

В существующих методах расчета [1] пока не в полной мере учитывается влияние податливости узловых сопряжений в рамных конструкциях. В основном это объясняется недостаточной изученностью взаимодействия элементов как в упругой, так и в пластической стадиях работы. Поэтому, как правило, расчет рамных конструкций производится по расчетным схемам с шарнирными или жесткими узлами сопряжений элементов, что не всегда адекватно отражает работу конструкции. При современных повышенных требованиях к экономической эффективности конструктивных решений исследования по дальнейшему уточнению расчетных схем приобретают особую актуальность.

Задачи об эйлеровой форме потери устойчивости рам [2] ставят в тех случаях, когда в невозмущенном состоянии стержни рамы испытывают только растяжение-сжатие; сказанное соответствует нагружению рам только узловой нагрузкой, когда узлы рамы не смещаются, а деформации растяжения-сжатия стержней пренебрежимо малы.

Устойчивость рам с высокой степенью статической неопределимости удобнее исследовать методом перемещений. В особенности это относится к рамам с кинематически неизменяемой схемой с неподвижными узлами (при такой схеме замена жестких узлов шарнирами приводит к неизменяемой форме). Согласно главной идее этого метода основная система образуется путем введения дополнительных (фиктивных) связей, препятствующих поворотам и линейным смещениям всех узлов рамы (если соответствующая подвижность не исключена связями, имеющимися в данной системе). За «лишние» неизвестные принимают угловые и линейные перемещения узлов Z при переходе к возмущенной форме равновесия рамы. Эти перемещения удовлетворяют каноническим уравнениям, которые выражают условие отсутствия суммарных реакций в дополнительных связях

$$\left.\begin{array}{l} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \ldots + r_{1n}Z_n = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \ldots + r_{2n}Z_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \ldots + r_{nn}Z_n = 0 \end{array}\right\}, \qquad (1)$$

здесь r_{ik} — единичная реакция, т.е. реакция, возникающая в i-й дополнительной связи при смещении $Z_k = 1$ по k-му направлению (при неподвижности всех остальных дополнительных связей).

Система уравнений (1) имеет тривиальное решение $Z_1 = Z_2 = \ldots = Z_n = 0$, которое выражает возможность невозмущенной формы равновесия при любых значениях внешних сил. Для определения критического значения нагрузки следует предположить, что существует нетривиальное решение, соответствующее возмущенной форме равновесия, при которой не все перемещения Z_i равны нулю. Это возможно при условии, если определитель системы (1) обращается в нуль

$$f=\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12}\ldots r_{1n} \\ r_{21} & r_{22}\ldots r_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{n1} & r_{n2}\ldots r_{nn} \end{vmatrix}=0\,. \qquad (2)$$

Соотношение (2) и является уравнением для определения критических значений нагрузки.

Выражения для единичных реакций r_{ik} в зависимости от способа закрепления концов элемента рамы и вида смещения приведены в таблице 1 [2], где в расчетных формулах функции имеют вид

$$\varphi_1(v)=\frac{v^2}{3\left(1-\dfrac{v}{\operatorname{tg}v}\right)};\quad \varphi_2(v)=\frac{1-\dfrac{v}{\operatorname{tg}v}}{\dfrac{8}{v}\left(\operatorname{tg}\dfrac{v}{2}-\dfrac{v}{2}\right)};\quad \varphi_3(v)=\frac{\dfrac{v}{\sin v}-1}{\dfrac{4}{v}\left(\operatorname{tg}\dfrac{v}{2}-\dfrac{v}{\operatorname{tg}v}\right)};$$

$$\varphi_4(v)=\varphi_1\left(\frac{v}{2}\right);\quad \eta_1(v)=\varphi_1(v)-\frac{v^2}{3};\quad \eta_2(v)=\eta_1\left(\frac{v}{2}\right),$$

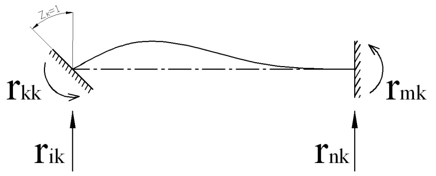
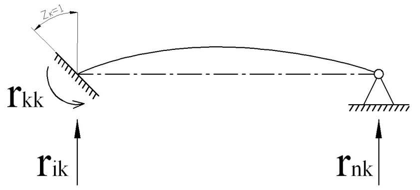
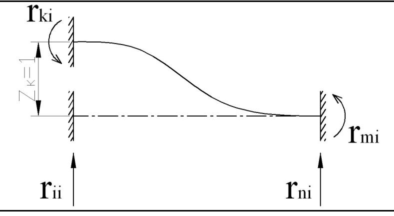
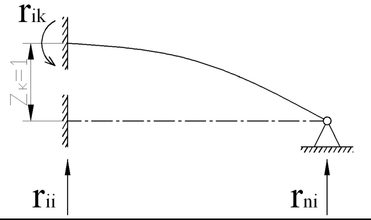
причем критический параметр определяется следующим выражением:

$$v=\ell\sqrt{\frac{N}{EJ}}\,, \qquad (3)$$

где ℓ — длина сжатого стержня; EJ — его жесткость при изгибе; N — продольная сила.

Таблица 1

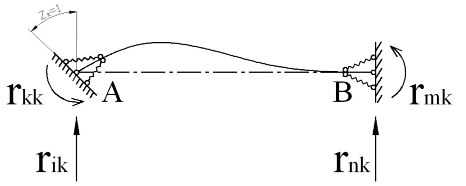
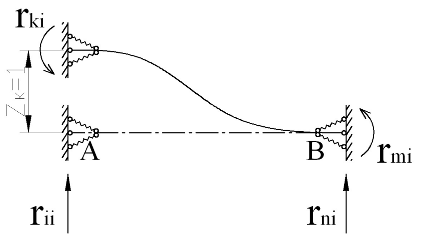
Расчетные формулы для единичных реакций

Схема	Тип единичного смещения	Расчетные формулы
	Единичный поворот	$r_{kk}=4\varphi_2\dfrac{EJ}{\ell}$; $r_{ik}=6\varphi_4\dfrac{EJ}{\ell}$; $r_{mk}=2\varphi_3\dfrac{EJ}{\ell}$; $r_{nk}=-r_{ik}$
		$r_{kk}=3\varphi_1\dfrac{EJ}{\ell}$; $r_{ik}=3\varphi_1\dfrac{EJ}{\ell^2}$; $r_{nk}=-r_{ik}$
	Единичное смещение	$r_{ki}=r_{mi}=6\varphi_4\dfrac{EJ}{\ell^2}$; $r_{ii}=12\eta_2\dfrac{EJ}{\ell^3}$; $r_{ni}=-r_{ii}$
		$r_{ik}=3\varphi_1\dfrac{EJ}{\ell^2}$; $r_{ii}=3\eta_1\dfrac{EJ}{\ell^3}$; $r_{ni}=-r_{ii}$

Согласно исследованиям авторов, учитывая, что жесткость узловых сопряжений элементов умножается на коэффициент упругости, то выражение для единичных реакций r_{ik} в зависимости от вида смещения имеют следующий вид (табл. 2).

Таблица 2

Расчетные формулы для единичных реакций с учетом коэффициента упругости узловых сопряжений элементов

Схема	Тип единичного смещения	Расчетные формулы
	Единичный поворот	$r_{kk} = 4\varphi_2 \frac{EJ}{\ell} K_A K_B + 3\varphi_1 \frac{EJ}{\ell} K_A(1-K_B)$; $r_{ik} = 6\varphi_4 \frac{EJ}{\ell^2} K_A K_B + 3\varphi_1 \frac{EJ}{\ell^2} K_A(1-K_B)$; $r_{mk} = 2\varphi_3 \frac{EJ}{\ell} K_A K_B$; $r_{nk} = -r_{ik}$
	Единичное смещение	$r_{ki} = 6\varphi_4 \frac{EJ}{\ell^2} K_A K_B + 3\varphi_1 \frac{EJ}{\ell^2} K_A(1-K_B)$; $r_{mi} = r_{ki}$; $r_{ii} = 12\eta_2 \frac{EJ}{\ell^3} K_A K_B +$ $3\eta_1 \frac{EJ}{\ell^3}\left(K_A(1-K_B)+K_B(1-K_A)\right)+$; $\frac{v^2 EJ}{\ell^3}(1-K_A)(1-K_B)$ $r_{ni} = -r_{ii}$

В качестве примера рассматривается двухпролетный каркас промышленного здания с физико-геометрическими характеристиками, приведенными на рисунке 1, где P_1, P_3, P_5 — собственный вес кранов; P_2, P_4 — вес движущихся тележек кранов с грузами [3].

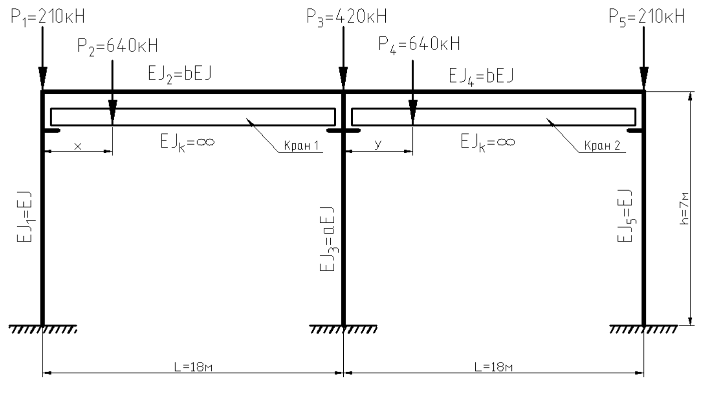


Рисунок 1. Исходная схема

Определяется невыгодное положение тележек кранов с точки зрения потери устойчивости рамной конструкции. При решении этой задачи примем узлы абсолютно жесткие.

Продольные усилия, возникающие в стойках, от движения тележек определяются как

$$N_1 = P_1 + P_2\left(\frac{18-x}{18}\right);\ N_2 = P_3 + P_2\left(\frac{x}{18}\right) + P_4\left(\frac{18-y}{18}\right);\ N_3 = P_5 + P_4\left(\frac{y}{18}\right),$$

где x, y — координаты положения тележек с грузом.

На рисунке 2 представлена расчетная схема рамы.

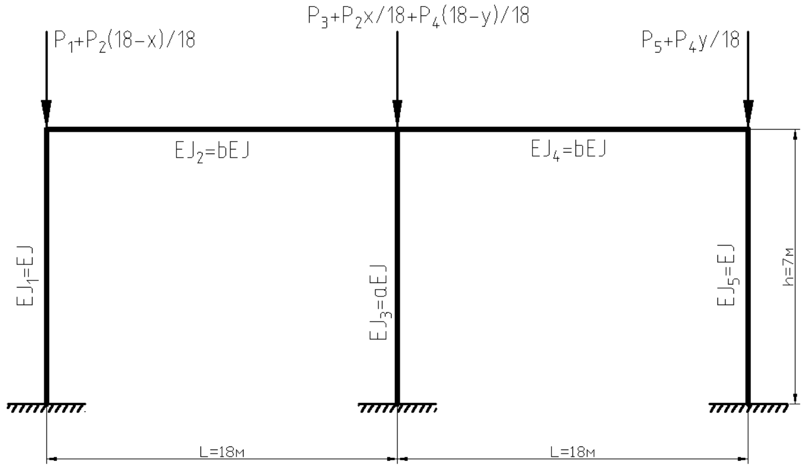


Рисунок 2. Расчетная схема

В данном случае x и y меняются от 0 до 18 м. В стойках от продольных усилий будут возникать критические параметры v_1, v_2, v_3, которые определяются по формуле (3)

$$v_1 = h\sqrt{\frac{N_1}{EJ}}\ ;\ v_2 = h\sqrt{\frac{N_2}{aEJ}}\ ;\ v_3 = h\sqrt{\frac{N_3}{EJ}}\ ,$$

причем в ригелях $v = 0$, так как в данном случае отсутствуют горизонтальные силы, а значит и $\varphi_i(0) = 1$. Критические параметры v_2 и v_3 выразим через v_1 для облегчения нахождения критического параметра v_1

$$v_2 = v_1\sqrt{\frac{N_2}{aN_1}}\ ;\ v_3 = v_1\sqrt{\frac{N_3}{N_1}}\ . \tag{4}$$

Также через критический параметр v_1 выразим требуемую жесткость EJ

$$EJ = \frac{h^2 N_1}{v_1^2}\ . \tag{5}$$

В основной системе данной рамы, рассчитывая ее методом перемещений, возникают три неизвестных угла поворота и одно линейное смещение (рис. 3). По таблице 1 строим единичные эпюры от трех углов поворотов и одного смещения (рис. 4).

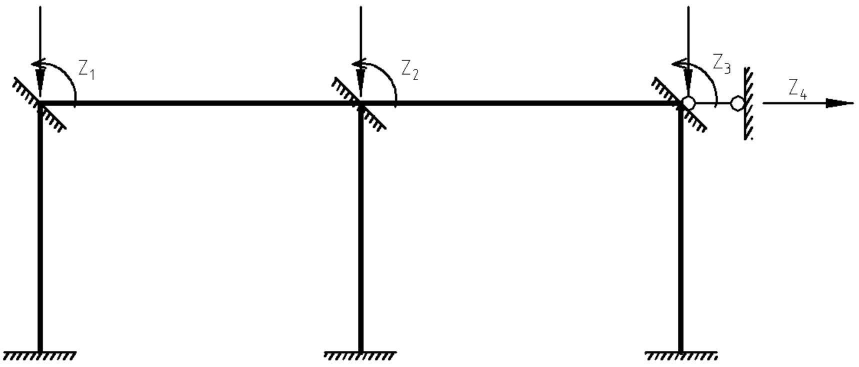


Рисунок 3. Основная система

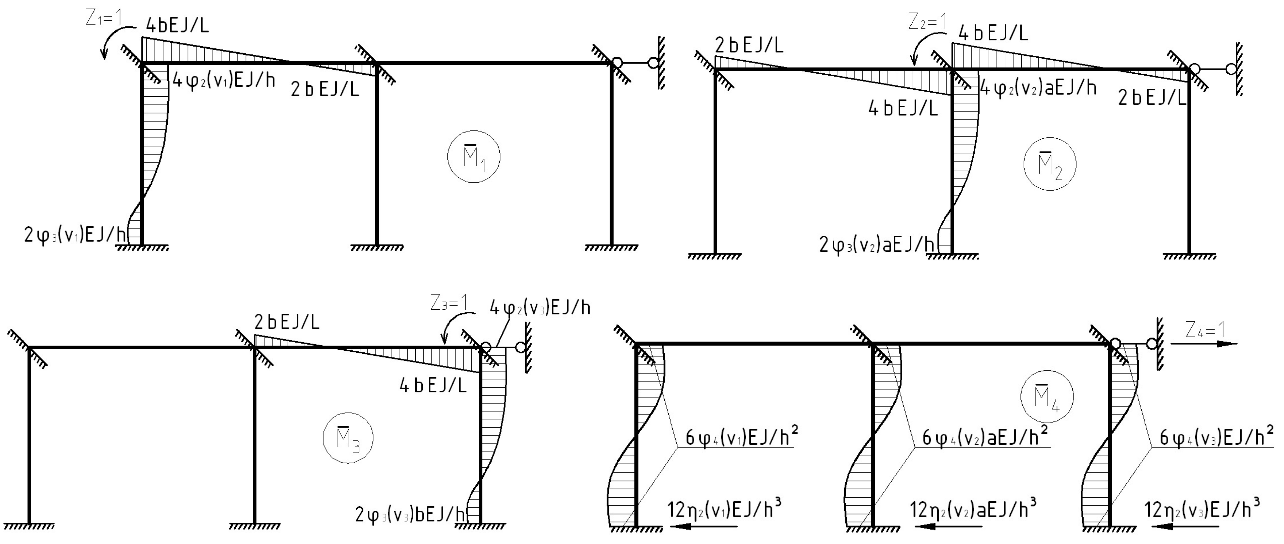


Рисунок 4. Единичные эпюры

По единичным эпюрам (рис. 4) определяем единичные реакции

$$
\begin{gathered}
r_{11} = 4\varphi_2(v_1)\frac{EJ_1}{h} + 4\frac{EJ_2}{L}\,;\; r_{12} = r_{21} = 2\frac{EJ_2}{L}\,;\; r_{13} = r_{31} = 0\,;\\
r_{14} = r_{41} = 6\varphi_4(v_1)\frac{EJ_1}{h^2}\,;\; r_{22} = 4\varphi_2(v_2)\frac{EJ_3}{h} + 4\frac{EJ_2}{L} + 4\frac{EJ_4}{L}\,;\\
r_{23} = r_{32} = 2\frac{EJ_4}{L}\,;\; r_{24} = r_{42} = 6\varphi_4(v_2)\frac{EJ_3}{h^2}\,;\\
r_{33} = 4\varphi_2(v_3)\frac{EJ_5}{h} + 4\frac{EJ_4}{L}\,;\; r_{34} = r_{43} = 6\varphi_4(v_3)\frac{EJ_5}{h}\,;\\
r_{44} = 12\eta_2(v_1)\frac{EJ_1}{h^3} + 12\eta_2(v_2)\frac{EJ_3}{h^3} + 12\eta_2(v_3)\frac{EJ_5}{h^3}\,.
\end{gathered}
\tag{6}
$$

Решая уравнения (2), определяем критический параметр v_1. Для данной задачи на языке программирования Delphi [4] составлена программа для нахождения критического параметра v_1, блок-схема которой приведена ниже (рис. 5).

В результате реализации программы получено невыгодное положение нагрузки $x = 18$ м и $y = 0$ м, когда жесткость EJ рамы наибольшая.

Определим невыгодное положение крановых тележек с точки зрения потери устойчивости рамной конструкции (рис. 1), приняв узлы данной рамы шарнирные. На рисунке 6 показана основная система двухпролетной рамы с шарнирными узлами. В основной системе данной рамы, рассчитывая ее методом перемещений, возникает одно линейное смещение. По таблице 1 строим единичные эпюры от смещения (рис. 7).

Уравнение для определения критического параметра v_1 примет вид

$$r_1 = 3\frac{EJ}{h^3}\left(\eta_1(v_1) + a\eta_1(v_2) + \eta_1(v_3)\right). \tag{7}$$

Используя программу из предыдущего примера (рис. 5), заменив определитель матрицы на (7), получаем, что жесткость рамы EJ наибольшая при положении крановых тележек $x = 18$ м и $y = 0$ м.

Данный результат показал, что, независимо от сопряжения узлов (жестко защемленные или шарнирные узлы), невыгодное расположение крановых тележек будет идентичным, а именно жесткость рамной конструкции будет наибольшая, когда вся нагрузка от тележек кранов приходится на среднюю стойку рамы. Поэтому можно сделать вывод, что расположение крановых тележек не изменится, если упругость узлов рамы будет варьироваться в промежутке от 0 — соответствующем шарнирным узлам до 1 — соответствующем жестко защемленным узлам.

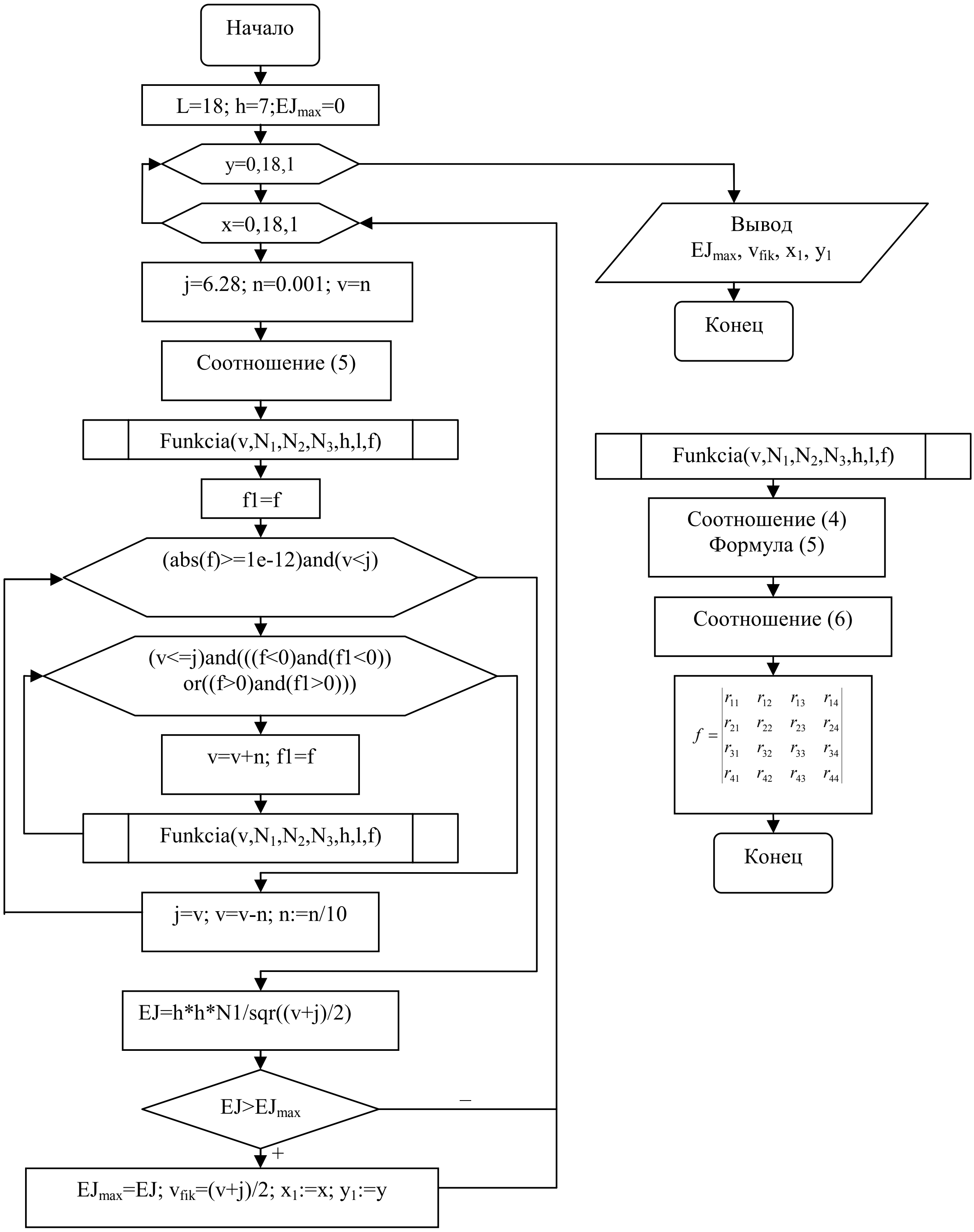


Рисунок 5. Блок-схема программы

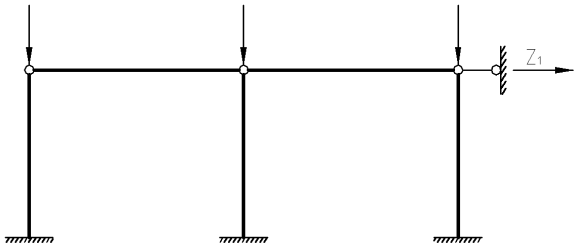


Рисунок 6. Основная система

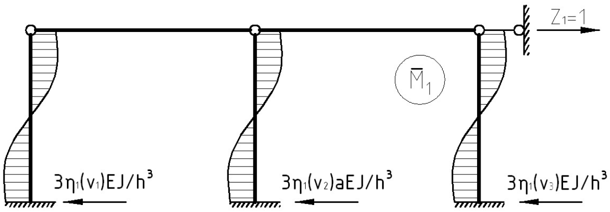


Рисунок 7. Единичная эпюра

С учетом данного утверждения производим расчет двухпролетной рамы, предполагая, что коэффициенты упругости узлов элементов рамы одинаковые ($K = K_1 = K_2 = K_3$) и лежат в промежутке $0 \le K \le 1$, а основания стоек рамы жестко закреплены, то есть коэффициент упругости основания рамы равен $K_{опор} = 1$. На рисунке 8 представлена расчетная схема двухпролетной рамы с учетом упругости верхних узлов.

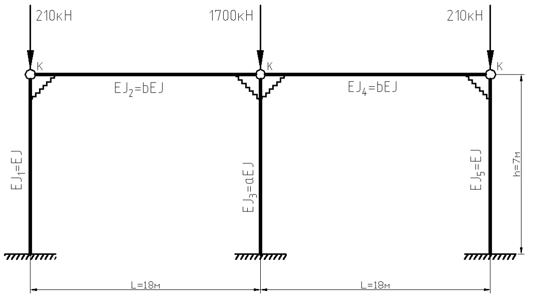


Рисунок 8. Расчетная схема двухпролетной рамы с учетом упругости узлов

Так же, как и в предыдущем случае, в основной системе данной рамы возникают три неизвестных угла поворота и одно линейное смещение (рис. 9). Согласно таблице 2 строим единичные эпюры от трех углов поворота и одного смещения (рис. 10).

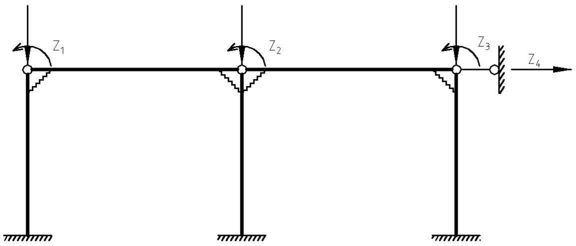


Рисунок 9. Основная схема

По единичным эпюрам определяем единичные реакции

$$r_{11} = 4\varphi_2(v_1)\frac{EJ}{h}K + 4\frac{bEJ}{L}K^2 + 3\frac{bEJ}{L}K(1-K);\ r_{12} = r_{21} = 2\frac{bEJ}{L}K^2;\ r_{13} = r_{31} = 0;$$

$$r_{14} = r_{41} = 6\varphi_4(v_1)\frac{EJ}{h^2}K;\ r_{22} = 4\varphi_2(v_2)\frac{aEJ}{h}K + 8\frac{bEJ}{L}K2 + 3\frac{bEJ}{L}K(1-K);$$

$$r_{23} = r_{32} = 2\frac{bEJ}{L}K^2;\ r_{24} = r_{42} = 6\varphi_4(v_2)\frac{aEJ}{h^2}K; \tag{8}$$

$$r_{33} = 4\varphi_2(v_3)\frac{EJ}{h}K + 4\frac{bEJ}{L}K^2 + 3\frac{bEJ}{L}K(1-K);\ r_{34} = r_{43} = 6\varphi_4(v_3)\frac{EJ}{h}K;$$

$$r_{44} = 12\frac{EJ}{h^3}\left(\eta_2(v_1) + a\eta_2(v_2) + \eta_2(v_3)\right)K + 3\frac{EJ}{h^3}\left(\eta_1(v_1) + a\eta_1(v_2) + \eta_1(v_3)\right)K(1-K).$$

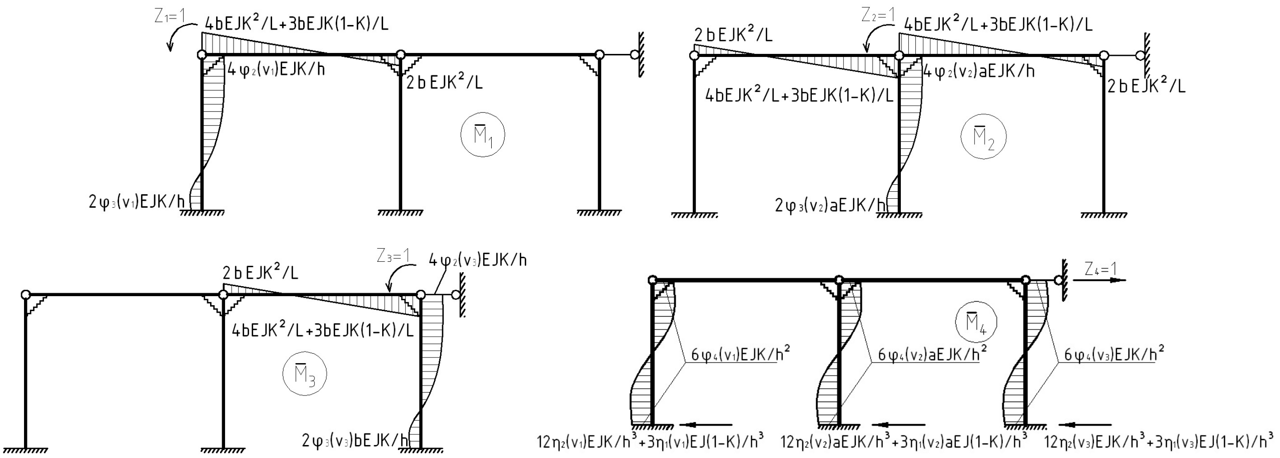


Рисунок 10. Единичные эпюры

Решая уравнения устойчивости (2), определяем критическое значение v с учетом переменного коэффициента упругости узлов K . Для данной задачи составлена программа для нахождения критического параметра v , блок-схема которой приведена ниже (рис. 11).

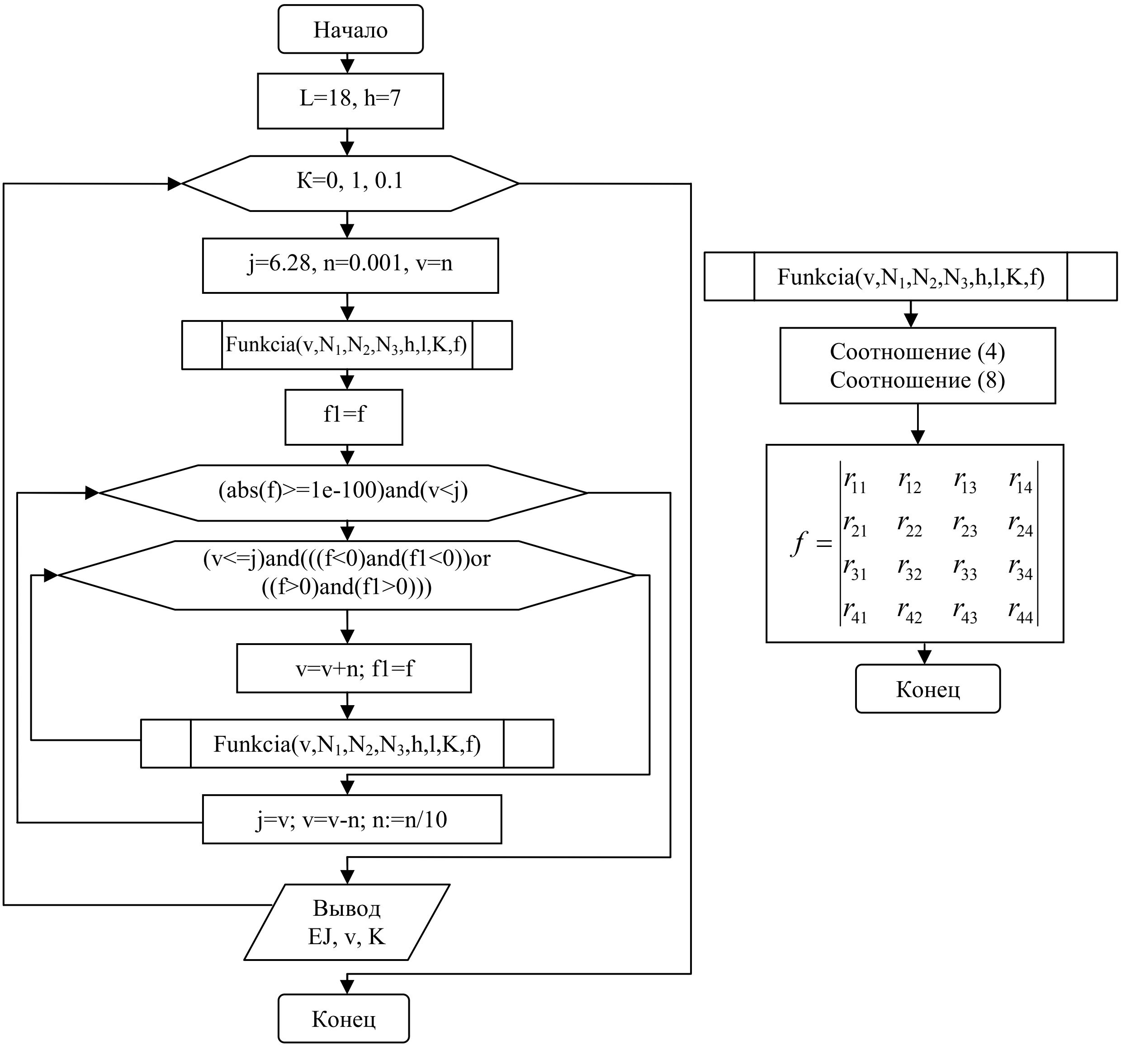


Рисунок 11. Блок-схема программы с учетом упругости узлов

Результаты исследований приведены на рисунке 12, где показан график изменения критического параметра от коэффициентов упругости узлов.

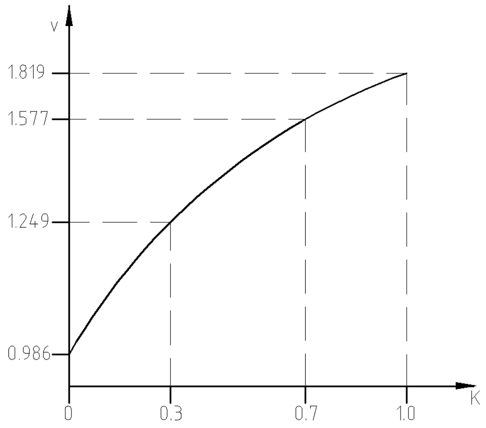


Рисунок 12. График изменения критического значения

Из приведенных исследований можно сделать вывод: при расчете рамы с учетом упругости узлов критический параметр уменьшается, что влечет за собой увеличение жесткости сечений рамы. Если учесть тот факт, что в реальных условиях узлы не абсолютно жесткие или шарнирные, тогда для исследуемой рамы при жестких узлах требуемый параметр при изгибе составляет $EJ = 311{,}031$ кНм^2, а при упругоподатливых узлах, с коэффициентом $K = 0{,}9$ требуемая жесткость будет на 8,84 % больше. Данные результаты показывают, что более уточненные значения критических параметров целесообразно определять с учетом коэффициентов упругоподатливости узлов.

Список литературы

1 *Дарков А.В., Шапошников Н.Н.* Строительная механика. — М.: Высш. шк., 1986.— 607 с.

2 *Клейн Г.К., Рекач В.Г., Розенблат Г.И.* Руководство к практическим занятиям по курсу «Строительная механика». — М.: Высш. шк., 1972. — 320 с.

3 Справочник по кранам: В 2 т. — Т. 2. Характеристики и конструктивные схемы кранов. Крановые механизмы, их детали и узлы. Техническая эксплуатация кранов / М.П.Александров, М.М.Гохберг. — М.: Машиностроение, 1988. — 559 с.

4 *Фаронов В.В.* Delphi. Программирование на языке высокого уровня. — СПб.: Питер, 2005. — 640 с.

А.К.Бейсебаев, И.Н.Зяблов

Қатты түйіндері бар рамалық конструкциялардың орнықтылығын есептеу

Жүгі бар крандық арбадан түсірілген жүктемеге рамалық конструкциялар түйіндерінің әр түрлі байланыстары қарастырылады. Түйіндік байланыстардың серпімділік коэффициентінің өзгеру әсері ескеріледі. Қатты түйіндері бар серіппелі түйіндерінің салыстырмалы талдауы өткізілді.

A.K.Beiysebaev, I.N.Зяблов

Calculation of stability of frame construction with elastic units

Various interfaces of knots frame constructions on mobile loading from crane carriages with cargo are regarded. Influence of change of factor of elasticity of central interfaces is considered. The comparative analysis of elasto-yielding knots with rigid knots is carried out.

УДК 539.3

К.А.Турсунов

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

Теория изгиба пластины

Построена теория изгиба пластины с учетом поперечного сдвига. Получены основные паритеты в виде классической теории. Предложена формула для расчета крутящего момента через поперечное сечение силы. Сформулированы граничные условия для свободного края пластины. Учет сечения сдвигов осуществлен с помощью специального параметра. Приведены алгоритмы расчета пластины.

Ключевые слова: изгиб пластины, поперечный сдвиг, напряженно-деформированное состояние, трансверсально-изотропное тело, упругость.

1. Основные соотношения и обозначения

Рассмотрим пластину (рис. 1) относительно декартовой системы координат ($0 \le x_1 \le \ell_1$; $0 \le x_2 \le \ell_2$; $-\frac{h}{2} \le x_3 \le \frac{h}{2}$). На пластину по верхней грани $x_3 = \frac{h}{2}$ действует распределенная нагрузка $q(x_1, x_2)$, направленная сверху вниз. Нижнюю грань $x_3 = -\frac{h}{2}$ будем считать свободной. На боковых гранях $x_1 = 0; \ell_1$ и $x_2 = 0; \ell_2$ имеются различные закрепления.

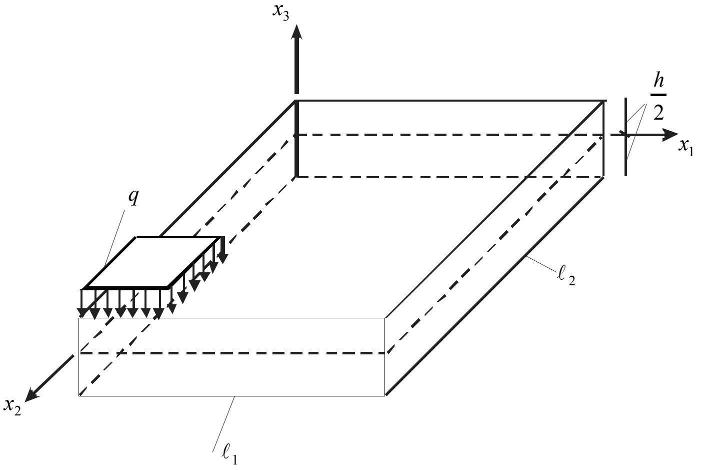


Рисунок 1. Прямоугольная пластина

Для определения напряженно-деформированного состояния этой пластины будем пользоваться точными соотношениями пространственной теории упругости:

– уравнения равновесия в напряжениях

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\tau_{13}}{\partial x_3} + X_1 = 0; \\ \frac{\partial\tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3} + X_2 = 0; \\ \frac{\partial\tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_3}{\partial x_3} + X_3 = 0,\end{gathered} \tag{1}$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — компоненты нормальных напряжений, направленных вдоль координатных осей; $\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$ — компоненты касательных напряжений (первый индекс означает направление, а второй — нормаль к сечению); X_1, X_2, X_3 — компоненты объемных сил;

– обобщенный закон Гука для трансверсально-изотропного материала

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \nu\sigma_2\right) - \frac{\nu_3}{E_3}\sigma_3; \gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_\varepsilon};$$
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \nu\sigma_1\right) - \frac{\nu_3}{E_3}\sigma_3; \gamma_{13} = \frac{\tau_{12}}{G_3}; \qquad (2)$$
$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E_3}\left[\sigma_3 - \nu_3\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right]; \gamma_{23} = \frac{\tau_{23}}{G_3},$$

где E, G, ν — модули продольной упругости и сдвига, а также коэффициент Пуассона в плоскости изотропии (x_1, x_2); E_3, G_3, ν_3 — то же самое в трансверсальном направлении (x_3);

– уравнения Коши (компоненты деформации)

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; \gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1};$$
$$\varepsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}; \qquad (3)$$
$$\varepsilon_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}; \gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2},$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — линейные деформации, направленные по направлениям осей (x_1, x_2, x_3); $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$ — угловые (сдвиговые) деформации, соответствующие касательным напряжениям (например, γ_{12} — уменьшение (увеличение) угла между положительными направлениями координатных осей x_1 и x_2); u_1, u_2, u_3 — компоненты перемещений, направленных по координатным осям;

– статические граничные условия для граней ($x_3 = \pm\frac{h}{2}$)

$$\text{при } x_3 = \frac{h}{2}: \tau_{13} = \tau_{23} = 0, \sigma_3 = q\left(x_1, x_2\right);$$
$$\text{при } x_3 = -\frac{h}{2}: \tau_{13} = \tau_{23} = \sigma_3 = 0, \qquad (4)$$

где $q\left(x_1, x_2\right)$ — интенсивность внешней нормальной распределенной нагрузки.

Имея эти соотношения, можно приступить непосредственно к решению задачи теории упругости о напряжениях и деформациях, возникающих в трансверсально-изотропном теле под действием внешних сил.

Перечисленные уравнения (1)–(3) содержат 15 неизвестных функций от трех переменных (x_1, x_2, x_3):

– шесть составляющих напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$;

– шесть составляющих деформаций $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$;

– три составляющие перемещения $u_1\left(x_1, x_2, x_3\right)$; $u_2\left(x_1, x_2, x_3\right)$; $u_3\left(x_1, x_2, x_3\right)$.

Таким образом, с математической точки зрения задача может быть решена путем интегрирования 15 уравнений при удовлетворении условий на поверхностях пластины.

2. Основные гипотезы и компоненты перемещений

Проведение расчета трансверсально-изотропного тела с использованием всех соотношений теории упругости представляет собой трудную проблему. Для решения этой проблемы используют различные упрощения, основанные на гипотезах. С этой целью введем следующий параметр, связывающий три размера тела (рис. 1).

$$\alpha = \frac{h}{\sqrt{\ell_1 \ell_2}}. \qquad (5)$$

Данный параметр изменяется в широких пределах $0 < \alpha \le 1$.

Рассмотрим случай, соответствующий малому значению $\alpha << 1$, то есть размер h (толщина) намного меньше, чем размеры в плане. В виду малости этого параметра введем следующие гипотезы:

– линейная деформация (поперечная) в направлении оси x_3 отсутствует

$$\varepsilon_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0; \tag{6}$$

– плоскость $x_3 = 0$ не испытывает никакой деформации

$$u_1\left(x_1, x_2, 0\right) = 0,\ u_2\left(x_1, x_2, 0\right) = 0; \tag{7}$$

– напряжение σ_3 в обобщенном законе Гука (2) отсутствует

$$\sigma_3 = 0; \tag{8}$$

– поперечные сдвиговые деформации изменяются по заданным законам

$$\gamma_{13} = f\left(z\right)\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_1}; \gamma_{23} = f\left(z\right)\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_2}; f(z) = 1 - 4z^2; z = \frac{x_3}{h}, \tag{9}$$

где z — безразмерная поперечная координата; $\tilde{W}\left(x_1, x_2\right)$ — функция сдвиговых прогиба; $f(z)$ — закон изменения поперечных сдвигов по толщине h.

При отсутствии функции сдвиговых прогибов $\tilde{W}\left(x_1, x_2\right) = 0$ из (6)–(9) вытекает гипотеза Кирхгофа, используемая в расчетах тонких пластинок.

Первая гипотеза (6) позволяет определить компоненту перемещений в направлении оси x_3

$$u_3\left(x_1, x_2, x_3\right) = W\left(x_1, x_2\right), \tag{10}$$

где $W\left(x_1, x_2\right)$ — функция прогибов пластины.

Интегрируя компоненты поперечных сдвиговых деформации (3), с учетом гипотез (7) и (9) находим компоненты тангенциальных перемещений

$$u_1\left(x_1, x_2, x_3\right) = -h\left[z\frac{\partial W}{\partial x_1} - \left(z - \frac{4}{3}z^3\right)\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_1}\right]; \tag{11}$$

$$u_2\left(x_1, x_2, x_3\right) = -h\left[z\frac{\partial W}{\partial x_2} - \left(z - \frac{4}{3}z^3\right)\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_2}\right].$$

При $\tilde{W}\left(x_1, x_2\right) = 0$ из (11) вытекают компоненты перемещений классической (технической) теории изгиба пластин. Функция в круглой скобке (11) описывает искривление поперечного сечения за счет поперечных сдвигов.

3. Компоненты деформации и напряжений

На основании компонент перемещений (10) и (11) по формуле (3) определяем деформации

$$\varepsilon_1 = -h\left[z\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} - \varphi_0(z)\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x_1^2}\right];\ \gamma_{12} = -2h\left[z\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} - \varphi_0(z)\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x_1 \partial x_2}\right];$$

$$\varepsilon_2 = -h\left[z\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} - \varphi_0(z)\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x_2^2}\right]; \gamma_{13} = f(z)\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_1}; \tag{12}$$

$$\varepsilon_3 = 0;\ \gamma_{23} = f(z)\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_2};\ f(z) = 1 - 4z^2 = \varphi_0'(z), \varphi_0(z) = z - \frac{4}{3}z^3.$$

Отсюда видно, что компоненты тангенциальных деформаций состоят из двух частей: первая часть обусловлена функцией прогибов $W\left(x_1, x_2\right)$: вторая — функцией сдвиговых прогибов $\tilde{W}\left(x_1, x_2\right)$.

Подставив компоненты деформации (12) в обобщенный закон Гука (2), с учетом гипотезы (8) имеем компоненты напряжений

$$\sigma_1 = -\bar{E}h\left[z\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + v\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}\right) - \varphi_0(z)\left(\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x_1^2} + v\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x_2^2}\right)\right];$$

$$\sigma_2 = -\bar{E}h\left[z\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + v\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}\right) - \varphi_0(z)\left(\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x_2^2} + v\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x_1^2}\right)\right]; \tag{13}$$

$$\tau_{12}=-\bar{E}(1-\nu)h\left[z\frac{\partial^2 W}{\partial x_1\partial x_2}-\varphi_0(z)\frac{\partial^2\tilde{W}}{\partial x_1\partial x_2}\right];\text{ где }\bar{E}=\frac{E}{1-\nu^2};$$

$$\tau_{13}=G_3 f(z)\frac{\partial^2\tilde{W}}{\partial x_1};\tau_{23}=G_3 f(z)\frac{\partial^2\tilde{W}}{\partial x_2};$$

$$\varepsilon_3=-\frac{\nu_3}{E_3}\left(\sigma_1+\sigma_2\right)=\frac{\nu_3}{E_3}\bar{E}h(1+\nu)\left[z\nabla^2W-\varphi_0(z)\nabla^2\tilde{W}\right]=0,$$

где $\bar{E}$ — обобщенный модуль продольной упругости.

Для определения компонент поперечных напряжений используем уравнение равновесия в напряжениях (1) при отсутствии компонент объемных сил. Внося в первое уравнение (1) σ_1 и τ_{12} из (13), имеем

$$\frac{\partial\tau_{13}}{h\partial z}=-\frac{\partial\sigma_1}{\partial x_1}-\frac{\partial\tau_{12}}{\partial x_2}=\bar{E}h\left[z\frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla^2W)-\varphi_0(z)\frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla^2\tilde{W})\right].$$

Производя интегрирование по z, получим

$$\tau_{13}=\bar{E}h\left[C+\frac{z^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla^2W)-\left(\frac{z^2}{2}-\frac{1}{3}z^4\right)\frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla^2\tilde{W})\right].\qquad(14)$$

Учитывая граничные условия (4), находим

$$z=\pm\frac{1}{2},\tau_{13}=0\Rightarrow 0=C+\frac{1}{8}\frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla^2W)-\frac{5}{48}\frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla^2\tilde{W})\rightarrow$$

$$C=-\frac{1}{8}\frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla^2W)+\frac{5}{48}\frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla^2\tilde{W}).$$

Внося полученное произвольное постоянное C в (14), определяем напряжение

$$\tau_{13}=-\frac{\bar{E}h^2}{8}\left[f(z)\frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla^2W)+\psi_0(z)\frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla^2\tilde{W})\right];\qquad(15)$$

$$\psi_0(z)=-\frac{5}{6}+4z^2-\frac{8}{3}z^4,\text{ где }f(z)=1-4z^2.$$

Аналогичным образом со второго уравнения (1) с учетом τ_{12} и σ_2 из (13) определяем

$$\tau_{23}=-\frac{\bar{E}h^3}{8}\left[f(z)\frac{\partial}{\partial x_2}(\nabla^2W)+\psi_0(z)\frac{\partial}{\partial x_2}(\nabla^2\tilde{W})\right].\qquad(16)$$

Подставив (15) и (16) в третье уравнение (1), получим

$$\frac{1}{h}\frac{\partial\sigma_3}{\partial z}=-\frac{\partial\tau_{13}}{\partial x_1}-\frac{\partial\tau_{23}}{\partial x_2}=\frac{\bar{E}h^2}{8}\left[f(z)\nabla^2\nabla^2W+\psi_0(z)\nabla^2\nabla^2\tilde{W}\right].$$

Производя интегрирование по z, имеем

$$\sigma_3=\frac{\bar{E}h^3}{8}\left[B+\left(z-\frac{4}{3}z^3\right)\nabla^2\nabla^2W+\left(-\frac{5}{6}z+\frac{4}{3}z^3-\frac{8}{15}z^5\right)\nabla^2\nabla^2\tilde{W}\right].\qquad(17)$$

Учитывая граничные условия (4), находим произвольное постоянное B

$$\text{при }z=-\frac{1}{2};\sigma_3=0\rightarrow 0=B-\frac{1}{3}\nabla^2\nabla^2W+\frac{4}{15}\nabla^2\nabla^2\tilde{W};$$

$$B=\frac{1}{3}\nabla^2\nabla^2W-\frac{4}{15}\nabla^2\nabla^2\tilde{W}.$$

Внося его в (17), определяем напряжение

$$\sigma_3=D\left[\delta(z)\nabla^2\nabla^2W+\delta_0(z)\nabla^2\nabla^2\tilde{W}\right],D=\frac{\bar{E}h^3}{12};\qquad(18)$$

$$\delta(z)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}z-2z^3,\delta_0(z)=-\frac{2}{3}-\frac{5}{4}z+2z^3-\frac{4}{5}z^5,$$

где D — цилиндрическая жесткость пластины; $\delta(z)$ — функция распределения напряжения по классической теории; $\delta_0(z)$ — то же самое при учете поперечных сдвигов.

Далее из неиспользованного граничного условия (4) с учетом (18) получим уравнение, связывающее функции $W(x_1,x_2)$ и $\tilde{W}(x_1,x_2)$

$$\text{при } z=\frac{1}{2},\sigma_3=q(x_1,x_2)\rightarrow D\left[\nabla^2\nabla^2W-\frac{4}{5}\nabla^2\nabla^2\tilde{W}\right]=q(x_1,x_2). \quad (19)$$

Данное уравнение при обозначении

$$W_0(x_1,x_2)=W(x_1,x_2)-\frac{4}{5}\tilde{W}(x_1,x_2) \quad (20)$$

приобретает вид уравнения изгиба пластины по классической теории

$$D\nabla^2\nabla^2W_0=q(x_1,x_2), \quad (21)$$

где $W_0(x_1,x_2)$ — функция прогибов пластины по классической теории пластин.

4. Углы поворотов нормали и внутренние усилия пластины

На основании компонент перемещений (11) и представления (20) можно определить углы поворотов нормали

$$\theta_1=\frac{12}{h^3}\int_{-h/2}^{h/2}u_1x_3dx_3=-\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}-\frac{4}{5}\frac{\partial\tilde{W}}{\partial x_1}\right)=-\frac{\partial W_0}{\partial x_1};$$

$$\theta_2=\frac{12}{h^3}\int_{-h/2}^{h/2}u_2x_3dx_3=-\left(\frac{\partial W}{\partial x_2}-\frac{4}{5}\frac{\partial\tilde{W}}{\partial x_2}\right)=-\frac{\partial W_0}{\partial x_2}, \quad (22)$$

где θ_1 — угол поворота нормали в направлении оси x_1; θ_2 — то же самое в направлении оси x_2.

Учитывая (13) и (20), определяем внутренние усилия пластины

$$M_1=h^2\int_{-1/2}^{1/2}\sigma_1zdz=-D\left(\frac{\partial^2W_0}{\partial x_1^2}+v\frac{\partial^2W_0}{\partial x_2^2}\right);$$

$$M_{12}=h^2\int_{-1/2}^{1/2}\tau_{12}zdz=-D(1-v)\frac{\partial^2W_0}{\partial x_1\partial x_2};$$

$$M_2=h^2\int_{-1/2}^{1/2}\sigma_2zdz=-D\left(\frac{\partial^2W_0}{\partial x_2^2}+v\frac{\partial^2W_0}{\partial x_1^2}\right); \quad (23)$$

$$Q_1^0=h\int_{-1/2}^{1/2}\tau_{13}dz=G_3A\frac{\partial\tilde{W}}{\partial x_2};A=\frac{2}{3}h;$$

$$Q_2^0=h\int_{-1/2}^{1/2}\tau_{23}dz=G_3A\frac{\partial\tilde{W}}{\partial x_2},$$

где M_1,M_2 — изгибающие моменты, направленные вдоль координатных осей x_1 и x_2; M_{12} — крутящий момент относительно этих же осей; Q_1^0,Q_2^0 — поперечные силы, перпендикулярные координатным осям x_1 и x_2; A — приведенная площадь поперечного сечения в единицу ширины; G_3A — жесткость пластины при поперечном сдвиге.

Далее определим поперечные силы, соответствующие напряжениям (15) и (16), удовлетворяющим уравнениям равновесия в напряжениях

$$Q_1=h\int_{-1/2}^{1/2}\tau_{13}dz=-\frac{\bar{E}h^3}{8}\frac{2}{3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nabla^2W\right)-\frac{4}{5}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nabla^2\tilde{W}\right)\right]=-D\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nabla^2W_0\right);$$

$$Q_2=h\int_{-1/2}^{1/2}\tau_{23}dz=-\frac{\bar{E}h^3}{8}\frac{2}{3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\nabla^2W\right)-\frac{4}{5}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\nabla^2\tilde{W}\right)\right]=-D\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\nabla^2W_0\right). \quad (24)$$

Поперечные силы (Q_1^0, Q_2^0) и (Q_1, Q_2) будут одинаковыми

$$Q_1^0 = Q_1 \, : G_3 A \cdot \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_1} = -D\frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla^2 W_0);$$

$$Q_2^0 = Q_2 \, : G_3 A \cdot \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_2} = -D\frac{\partial}{\partial x_2}(\nabla^2 W_0)$$

при выполнения следующего условия:

$$\tilde{W}(x_1, x_2) = -\frac{D}{G_{13}A}\nabla^2 W_0 = -\frac{5}{4}\frac{D}{\mu_0 G_3 h}\nabla^2 W_0, \quad \mu_0 = \frac{5}{6}. \tag{25}$$

Откуда следует, что функция сдвиговых прогибов есть оператор Лапласа от функции прогибов классической теории, умноженной на отношения жесткостей пластины с обратным знаком.

5. Функции распределения перемещений и напряжений. Напряжения, выраженные через внутренние усилия

Компоненты перемещения (11) и напряжений (13), (15) и (18) выражаются через две функции $W(x_1, x_2)$ и $\tilde{W}(x_1, x_2)$. При этом имеют сложную структуру. Для их упрощения поступаем следующим образом.

Внося (25) в (20), определяем функцию прогибов пластины с учетом поперечных сдвигов, выраженную через функцию классической теории

$$W(x_1, x_2) = W_0 - \frac{D}{\mu_0 G_3 h}\nabla^2 W_0 = \beta \cdot W_0(x_1, x_2); \beta = 1 - \frac{D}{\mu_0 G_3 h}\frac{\nabla^2 W_0}{W_0}, \tag{26}$$

где β — параметр, учитывающий поперечные сдвиги. При $G_3 \to \infty$ имеет место $\beta = 1$. Подставив (25) и (26) в (11), с учетом (22) получим компоненты перемещений в форме классической теории пластины

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = -h\varphi_*(z)\frac{\partial W_0}{\partial x_1} = h\varphi_*(z)\theta_1;$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = -h\varphi_*(z)\frac{\partial W_0}{\partial x_2} = h\varphi_*(z)\theta_2; \tag{27}$$

$$\varphi_*(z) = z - \frac{D}{\mu_0 G_3 h}\left(-\frac{z}{4} + \frac{5}{3}z^3\right)\frac{\nabla^2 W_0}{W_0} = z + (\beta - 1)\left(-\frac{z}{4} + \frac{5}{3}z^3\right),$$

где $\varphi_*(z)$ — функция распределения тангенциальных перемещений по толщине пластины.

Далее проделав такую же операцию для напряжений из (13), с учетом (23) получим компоненты для тангенциальных напряжений

$$\sigma_1 = -\bar{E}h\varphi_*(z)\left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 W_0}{\partial x_2^2}\right) = \frac{12}{h^2}\varphi_*(z)M_1;$$

$$\sigma_2 = -\bar{E}h\varphi_*(z)\left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial x_2^2} + \nu\frac{\partial^2 W_0}{\partial x_1^2}\right) = \frac{12}{h^2}\varphi_*(z)M_2; \tag{28}$$

$$\tau_{12} = -\bar{E}h(1 - \nu)\varphi_*(z)\frac{\partial^2 W_0}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{12}{h^2}\varphi_*(z)M_{12}.$$

Прежде чем получить компоненты поперечных напряжений представим функцию сдвиговых прогибов (25) с учетом (26) в таком виде:

$$\tilde{W}(x_1, x_2) = \frac{5}{4}(\beta - 1) \cdot W_0(x_1, x_2). \tag{29}$$

Теперь внося (26) и (29) в выражения (15), (16) и (18), с учетом (21) и (24) получим компоненты поперечных напряжений

$$\tau_{13} = -\frac{Eh^2}{8}\psi_*(z) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla^2 W_0) = \frac{3}{2}\psi_*(z)\frac{Q_1}{h};$$

$$\tau_{23}=-\frac{Eh^2}{8}\psi_*(z)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}(\nabla^2 W_0)=\frac{3}{2}\psi_*(z)\frac{Q_2}{h};$$

$$\sigma_3=D\delta_*(z)\nabla^2\nabla^2 W_0=\delta_*(z)q(x_1,x_2);$$

$$\psi_*(z)=\beta f(z)+\frac{5}{4}(\beta-1)\psi_0(z);$$

$$\delta_*(z)=\beta\delta(z)+\frac{5}{4}(\beta-1)\delta_0(z), \qquad (30)$$

где $\delta_0(z)$, $\psi_0(z)$ — функции, определяемые согласно (15) и (18); $\psi_*(z)$, $\delta_*(z)$ представляют собой функции распределения поперечных касательных и нормальных напряжений по толщине пластины.

6. Параметр поперечного сдвига и линейная поперечная деформация

Рассмотрим вопрос определения параметра поперечного сдвига по формуле (26). Данный параметр наряду с жесткостными характеристиками D и G_3h зависит от функции прогибов по классической теории W_0, что противоречит смыслу данного параметра. Для устранения указанного противоречия воспользуемся следующим уравнением относительно функции прогибов W_0:

$$\nabla^2 W_0+K^2W_0=0, \qquad (31)$$

где K — собственное число, подлежащее определению.

На основании (31) параметр (26), входящий во все расчетные формулы, запишется в виде

$$\beta=1-\frac{D}{\mu_0G_3h}\frac{\nabla^2W_0}{W_0}=1+\frac{DK^2}{\mu_0G_3h};\mu_0=\frac{5}{6}. \qquad (32)$$

Чтобы определить параметр K^2, представим функцию W_0 в виде

$$W_0(x_1,x_2)=\hat{W}\cdot X(x)\cdot Y(y), x=\frac{x_1}{\ell_1}, y=\frac{x_2}{\ell_2}, \qquad (33)$$

где $\hat{W}$ — амплитудное значение прогиба; x, y — безразмерные координаты.

Подставив (32) в (31), получим

$$K^2=-\left(\frac{1}{\ell_1^2}\frac{X''}{X}+\frac{1}{\ell_2^2}\frac{Y''}{Y}\right).$$

При выполнении уравнений

$$X''(x)=-K_1^2X(x); \qquad Y''(y)=-K_2^2Y(y) \qquad (34)$$

данный параметр приобретает вид

$$K^2=\frac{K_1^2}{\ell_1^2}+\frac{K_2^2}{\ell_2^2}. \qquad (35)$$

Определим решение $X(x)=C_1\cos K_1x+C_2\sin K_1x$ первого уравнения (34) для следующих вариантов.

Вариант 1. Концы горизонтального сечения закреплены. В этом случая выполняются условия

$$X(0)=0\to C_1=0; \qquad (36)$$

$$X(1)=0\to 0=C_2\sin K_1\to K_1=\pi, C_2=X_0.$$

Решение имеет вид $X(x)=X_0\sin\pi x$.

Вариант 2. Один конец закреплен, а другой — свободен. В этом случае выполняются условия

$$X(0)=0\to C_1=0; \qquad (37)$$

$$X(1)=1, C_2=X_0\to 1=\sin K_1\to K_1=\frac{\pi}{2},$$

следовательно, решение приобретает следующий вид: $X(x)=X_0\sin\frac{\pi x}{2}$.

Вариант 3. Концы горизонтального сечения свободные.

В этом случае выполняются условия

$$X(0)=X_0\to C_1=X_0;$$

$$X(1) = X_0 \rightarrow C_2 = \frac{(1-\cos K_1)}{\sin K_1}; \tag{38}$$

$$X(\frac{1}{2}) = 2X_0 \rightarrow 2 = \frac{1}{\cos\frac{K_1}{2}} \rightarrow K_1 = \frac{2}{3}\pi.$$

Решение задачи имеет вид

$$X(x) = X_0\left\{\cos\frac{2\pi x}{3} + \frac{(1-\cos K_1)}{\sin K_1}\sin\frac{2\pi x}{3}\right\}.$$

Аналогичным образом находится решение второго уравнения (34). На основании (36)–(38) можно записать

$$K_1 = m_i\pi, m_1 = 1, m_2 = \frac{1}{2}, m_3 = \frac{2}{3}, \tag{39}$$

где i — номер варианта.

Таким же образом записываем параметр собственного значения второго уравнения (34)

$$K_2 = n_j\pi, n_1 = 1, n_2 = \frac{1}{2}, n_3 = \frac{2}{3}. \tag{40}$$

Учитывая (39) и (40), представим основной параметр (35) в виде

$$K_2 = \frac{\beta_0}{\ell_1\ell_2}, \beta_0 = \pi^2\left[\frac{\ell_2}{\ell_1}m_i^2 + \frac{\ell_1}{\ell_2}n_i^2\right]. \tag{41}$$

На основании (5) и (41) запишем параметр поперечного сдвига (32) в окончательном виде

$$\beta = 1 + \frac{\beta_0\alpha^2}{12\mu_0}\frac{\overline{E}}{G_3}, \mu_0 = \frac{5}{6}, \alpha = \frac{h}{\sqrt{\ell_1\ell_2}}, \tag{42}$$

где α — параметр, зависящий от размеров пластины (5); β_0 — параметр, зависящий от типа граничных условий пластины (41); μ_0 — коэффициент, зависящий от распределения касательных напряжений по толщине пластины.

Линейная поперечная деформация определяется по закону Гука (2) на основании (28) и (30)

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E_3}\left\{\delta_*(z)q - v_3\frac{12}{h^2}\varphi_*(z)(M_1 + M_2)\right\}, \tag{43}$$

где q — интенсивность внешней распределенной нагрузки; M_1, M_2 — изгибающие моменты в направлении координатных осей x_1 и x_2.

7. Граничные условия. Алгоритм расчета пластины

При решении уравнения (21) появляются произвольные постоянные, которые необходимо определить из граничных условий относительно функций $W_0(x_1, x_2)$.

На основании углов поворотов (22) и внутренних усилий (23) и (24) можно составить граничные условия, соответсвующие креплениям контура пластины.

Основными видами граничных условий для краев пластины $x_1 = 0, \ell_1$ являются

– шарнирно опертые

$$W_0 = 0, M_1 = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 W_0}{\partial x_1^2} = 0, \theta_2 = 0 \rightarrow \frac{\partial W_0}{\partial x_2} = 0; \tag{44}$$

– защемленные

$$W_0 = 0, \theta_1 = 0 \rightarrow \frac{\partial W_0}{\partial x_1} = 0, \theta_2 = 0 \rightarrow \frac{\partial W_0}{\partial x_2} = 0; \tag{45}$$

– упругоопертые

$$\theta_1 = 0 \rightarrow \frac{\partial W_0}{\partial x_1} = 0, M_1 = -D\left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial x_1^2} + v\frac{\partial^2 W_0}{\partial x_2^2}\right) = 0, M_{12} = 0; \tag{46}$$

– свободные

$$Q_1 = 0, M_1 = 0, M_{12} = 0. \tag{47}$$

Из анализа граничных условий (44)–(46) вытекает, что третье условие является следствием первого. Относительно (47) этого сказать нельзя.

В свое время Кирхгоф, критикуя Пуассона, вводя обобщенную силу путем объединения поперечной силы с крутящим моментом, привел три условия (47) к двум условиям относительно изгибающего момента и поперечной силы.

Нам предстоит по-другому преобразовать условия (47).

Для этой цели запишем (24) с учетом (31) в таком виде:

$$Q_1 = -D\frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla^2 W_0) = DK^2\frac{\partial W_0}{\partial x_1};$$

$$Q_2 = -D\frac{\partial}{\partial x_2}(\nabla^2 W_0) = DK^2\frac{\partial W_0}{\partial x_2}.$$

Продифференцируя их и учитывая выражение крутящего момента (23), имеем

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_2} = DK^2\frac{\partial^2 W_0}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{K^2}{(1-\nu)}M_{12};$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial x_1} = DK^2\frac{\partial^2 W_0}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{K^2}{(1-\nu)}M_{12}. \qquad (48)$$

На основании известного параметра (41) из (48) выразим крутящий момент через поперечную силу

$$M_{12} = -\frac{(1-\nu)}{\beta_0}\ell_1\ell_2\frac{\partial Q_1}{\partial x_2}, M_{12} = -\frac{(1-\nu)}{\beta_0}\ell_1\ell_2\frac{\partial Q_2}{\partial x_1}, \qquad (49)$$

где первое выражение используется при вычислении крутящего момента для свободного края по оси x_2, а второе — для свободного края по оси x_1.

Подставив первое выражение (49) в (47), убеждаемся в том, что третье условие являтся следствием первого.

Таким образом, полученные граничные условия (44)–(47) не противоречат порядку основного уравнения (21) и тем самым нет необходимости введения обобщенной поперечной силы.

Следует отметить, что крутящий момент для пластины со свободными краями вычисляется по (49), а не по (23).

Реализация теории осуществляется следующим образом (алгоритм расчета пластины):

1) определяется функция прогибов $W_0(x_1, x_2)$ из решения уравнения (21) путем удовлетворения одного варианта граничных условий (44)–(47);

2) находятся внутренние условия пластины ($M_1, M_{12}, M_2, Q_1, Q_2$) по (23) и (24);

3) определяется параметр β_0 по (41) с учетом (39) и (40) в зависимости от типа закреплений пластины;

4) вычисляется параметр поперечного сдвига β по формуле (42);

5) определяются функции распределения напряжений $\varphi_*(z), \psi_*(z), \delta_*(z)$ на основании формул (27) и (30);

6) находятся компоненты перемещений (W, u_1, u_2) согласно (26) и (27);

7) определяются компоненты напряжений ($\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}, \sigma_3$) с помощью формул (28) и (30);

8) вычисляется линейная поперечная деформация (43).

Таким образом, предлагаемая теория позволяет производить расчеты трансверсально-изотропных пластинок в широком диапазоне с использованием готовых результатов соответствующих пластин по классической теории.

В заключение отметим, что в работе [1] приведен краткий обзор по теории пластин. Обстоятельно проанализированы теории Тимошенко и Рейсснера-Миндлина. Осуществлен вывод разрещающего уравнения уточненной теории, учитывающей поперечные сдвиги относительно двух функций. Построенная в ней теория изгиба пластин сводится к двум уравнениям, имеющим в совокупности шестой порядок.

Предлагаемая теория отличается от теорий, приведенных в [1], тем, что разрещающее уравнение имеет четвертый порядок и позволяет проводить расчеты пластин со свободными краями.

К достоинствам этой теории можно отнести использование готовых результатов классической теории при расчете пластин с учетом поперечных сдвигов.

Следует отметить, что в работе [2] приведены другие уточненные теории пластин, позволяющие учесть не только поперечные сдвиги, но и обжатие и давление слоев.

Список литературы

1 *Васильев В.В.* О теории тонких пластин // Механика твердого тела. — М., 1992. — № 3. — С. 26–47.

2 *Тұрсынов К.А., Тұрсынов Д.К.* Конструкциялардың кеңістік элементтерін есептеу негіздері: Оқу құралы. — Қарағанды: ҚарМУ баспасы, 2007. — 215 б.

К.А.Тұрсынов

Пластинаның иілу теориясы

Көлденең ығысуды ескеретін теория тұрғызылған. Негізгі қатыстар классикалық түрде алынған. Көлденең күш арқылы анықталатын тұралу моментінің формуласы ұсынылған. Пластинаның шеттері бос болған жағдайдағы шекаралық шарттар алынған. Көлденең ығысу арнайы параметр арқылы ескерілген. Пластинаны есептеу алгоритмі келтірілген.

K.A.Tursunov

Theory of plate bending

The theory of a bend of a plate is constructed in view of cross-section shifts. The basic parities are received in the form of the classical theory. The formula for calculation of the twisting moment through cross-section force is offered. Boundary conditions for free edge of a plate are formulated. The account of cross-section shifts is carried out with the help of special parameter. It is resulted algorithms of calculation of a plate.

МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ ЖӘНЕ АҚПАРАТТЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАР
МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

ӘОЖ 94 (574):371.213.42

Ж.Ж.Айтқожа, А.Атаева

Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті

«Жылжымайтын мүлік» қолданбалы программалық пакетін құру

Мақалада «Жылжымайтын мүлік» қолданбалы программалық пакетін құрудың әдістерінің бірі қарастырылған. Сәйкес мәліметтер қоры құрылып, үш тілдегі (қазақ, ағылшын, орыс) интерфейстің көмегімен әр түрлі сұраныстар жасауға болатыны көрсетілген.

Кілтті сөздер: жылжымайтын мүлік, «Realty» компаниясы, программалық пакет, деректер қорын басқару жүйесі, Oracle, Server.

Мақалада «Жылжымайтын мүлік» қолданбалы программалық пакетін құрудың жолы қарастырылған. Экономиканың әр түрлі салаларына қажетті қолданбалы программалық пакеттерді құру өте маңызды шаралардың бірі болып табылады. Нарықтық экономиканың заңдары біздің еліміздің экономикасына бойлай енуіне байланысты әр түрлі ұйымдар өздерінің іс-әрекеттерін компьютерде қолданбалы программалық пакеттер арқылы өңдеуге ұмтылуда. Бұл нарықтағы сұранысқа байланысты мәліметтерді өте жылдам, тез аралықта өңдеуге мүмкіндік береді. Осыған байланысты қарастырылып отырылған «Жылжымайтын мүлік» қолданбалы программалық пакетін құру және оны қолдану қазіргі уақытта маңызды шаралардың бірі болып табылады. Информатизацияның даму тарихы АҚШ-та өткен ғасырдың 60-жж.-дан басталып, сонан соң 70-жж. Жапонияда және 70-жж. соңына қарай Батыс Еуропада жалғасын тапты. Қазіргі заманғы материалды өндірісте және басқа да өнім салаларында ақпараттық қызмет көрсетуге, үлкен көлемді мәліметтерді өңдеуге қажеттілік күн өткен сайын арта түсуде. Адам және тұтастай қоғамның интеллектуалды мүмкіндіктерін күшейтуші рөлін атқаратын, кез келген мәліметті өңдейтін әмбебап техникалық құрал болып табылатын — компьютердің пайда болуы мен дамуы қоғамның ақпараттану процесінің ажырамас бөлігіне айналуда. Осындай компьютердің билік ету дәуірінде көп мәселе сандық деректер арқылы оңай шешілгендіктен, біздің бұл «Жылжымайтын мүлік» атты қолданбалы программалық пакетіміз нарықтық экономиканың талабына сай қажетті ақпарат жылдам өңделуі үшін үлкен көмегін тигізеді.

Біз алдымен мәліметтерге қойылатын талаптарды қарастырайық.

Realty компаниясы елдің бірнеше қалаларында орналассын. Әрбір компания бөлімшесі туралы мынадай мәліметтер сақталған: бөлімшенің ID нөмірі, мекенжайы, телефон нөмірі, қазіргі таңда бөлімшені басқаратын қызметкердің аты-жөні. Контролер қызметін атқаратын бөлімше қызметкерлері ассистенттер деп аталатын қызметкерлер тобының (бұл топтың қызметкерлерінің саны 10-нан аспайды) күнделікті жұмысын бақылайды. Әрбір компания қызметкерлері туралы мынадай мәліметтер сақталады: ID нөмірі, аты-жөні, мекенжайы, лауазымы, айлығы, контролер аты (егер болса), қазір жұмыс жасайтын бөлім туралы ақпарат. Қызметкерлердің ID нөмірі әрбір бөлімшеде бірегей деп есептелінеді.

Realty бөлімі клиенттерге жалға берілетін, сатылатын объектілерін ұсынады. Әрбір объект туралы мынадай мәліметтер сақталады: объект нөмірі, мекенжайы, типі, бөлмелер саны, қабат нөмірі, жалға беру құны және теледидар, тоңазытқыш, жиһаз, телефон.

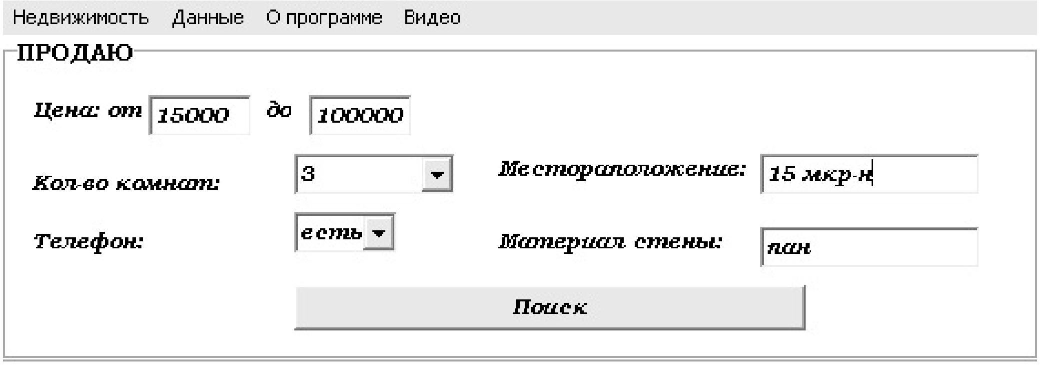
Мәліметтер қорында сонымен қатар жылжымайтын мүлік объектілерінің қожайындары, клиенттер, келісім-шарт, жылжымайтын мүлік объектілері, жарияланатын газеттер туралы мәліметтер сақталған.

Енді осы программалық пакетте орындалатын іс-әрекеттердің тізімін келтірейік.

Программамен кез келген адам жұмыс жасай алатындай ыңғайлы болуы және «Жылжымайтын мүлік» қолданбалы программалық пакетін қолданғанда әр түрлі сұраныстар орындай алуы тиіс.

Мұнда программалық бірлікті жаңарту администраторға жүктеледі. Оның өзінің сәйкес құпия кілті болады. Администратор программалық пакетте қажетті деректер қорын өзгерте алады. Осыған сәйкес пакетте администратор бөлімі орналасқан. Ал пакетті қолданатын жылжымайтын мүлік компаниясының қызметкері клиенттің сәйкес сұраныстарын орындай алады. Сонымен деректер қорын өзгерту администраторға жүктелсе, онымен жұмыс істеу компанияның қызметкеріне жүктеледі. Программалық бірлікте мәліметтерді енгізудің әр түрлі жағдайлары қарастырылған, мысалы, жалға берілетін, сатылатын пәтер т.с.с. туралы мәлімет енгізу.

Қолданбалы программалық пакеттің негізгі мәзірі төмендегі 1-суретте көрсетілген.



Цена: от 15000 до 100000

Кол-во комнат: 3

Месторасположение: 15 мкр-н

Телефон: есть

Материал стены: пан

1-сурет. Қолданбалы программалық пакеттің негізгі мәзірі

Мәзір бірнеше бөлімнен тұрады. «Недвижимость» бөлімінде жалға беру және сату, «Данные» бөлімінде мәліметтерді өңдеу және жаңа мәлімет қосу ішкі бөлімдері бар, ал «О программе» мәзірінде программа туралы мәлімет алуға болады.

Кез келген ДҚБЖ (Деректер қорын басқару жүйесі) мәліметтер мен төрт қарапайым операция орындауға мүмкіндік береді:

– кестеге бір немесе бірнеше жазбаны қосу;

– кестеден бір немесе бірнеше жазбаны жою;

– кейбір өрістердің бір немесе бірнеше жазбаларындағы мәндерді жаңарту;

– берілген шартты қанағаттандыратын бір немесе бірнеше жазбаларды іздеп табу.

ДҚБЖ-нің тағы бір функциясы — мәліметтерді басқару. Ол дегеніміз — мәліметтерді рұқсат етілмей қол жетуден қорғау, мәліметтермен жұмыс режимін көп мәрте пайдалануды қолдау және мәліметтердің тұтастығы мен үйлесімділігін қамтамасыз ету.

Деректер қоры деп ақпаратпен қамтамасыз ететін бағдарламаны айтады. Мұндай бағдарламаны қосқан кезде экранда кесте пайда болады, одан қолданушы өзіне қажетті ақпаратты таңдай алады. Егер жүйе мүмкіндік етсе, бағдарлама оған жаңа ақпарат қосып, керексізін жоя алады.

Қазіргі кезде деректер қоры жергілікті (dBase, FoxPro, Access, Paradox) және қашықтық (Interbase, Oracle, Sysbase, Infomix, Microsoft SQL Server) болып екіге бөлінеді.

Delphi құрамында dBase, Infomix және Oracle деректер файлдарымен жұмысын құруға мүмкіндік беретін компоненттер бар.

Жергілікті деректер қоры бір құралда тұрады. Құрал ретінде компьютер немесе желілік дисктер алынады.

Бірнеше қолданушы арасында деректерді бөлуді қамтамасыз ету үшін файлдарды бұғаттау деп аталатын әдіс қолданылады. Ол бір немесе бірнеше компьютерде жұмыс істей алады. Бұл тәсіл бойынша бір қолданушы деректерді қолданып жатқанда, басқа қолданушы ол дерекпен жұмыс істей алмайды, яғни деректер екінші қолданушыға жабық болады. dBase, FoxPro, Access, Paradox жергілікті деректер қорына жатады.

Деректердің қашықтықтағы қоры басқа компьютерде орналасады (қашықтық компьютер каталогтары желілік дискі ретінде қарастырылмайды). Онымен жұмыс атқару екі бөліктен тұрады:

клиенттік және серверлік. Қолданушы компьютерінде жұмыс істейтін бағдарлама бөлігі серверлік бағдарламамен өзара әрекетті қамтамасыз етеді. Серверлік қашықтық — компьютерде жұмысты қамтамасыз ететін бағдарлама бөлігі. Ол клиентке қатысты бағдарлама бөліктерін орындайды, өңдейді және нәтижені клиентке жібереді.

Қашықтықта орналасқан сервер бағдарламасы бір мезетте бірнеше қолданушыны қамтамасыз ете алады. Мұнда файлдарды бұғаттау механизмінің орнына транзакция (бірізді амалдар) механизмі қолданылады. Қажетті сұраныстар SQL (құрылымды сұрау) тілінде берілетін командалар жиыны арқылы атқарылады.

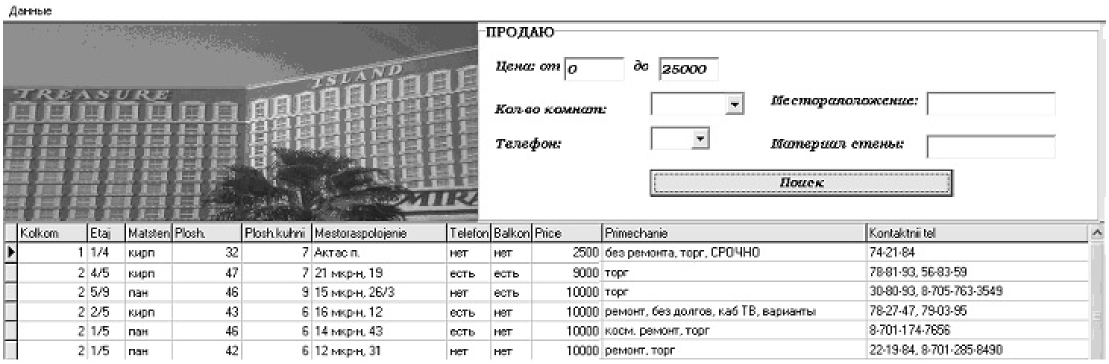
Деректер қоры Database Desktop қабықшасында құрылған бірнеше кестелерден тұрады. Программа барысында Data Access бөліміндегі Datasource, DataControls және DbGrid, BDE бөліміндегі Table, Sql компоненттері қолданылады. Программалау ортасындағы бұл компоненттер деректер қорымен жұмыс орындауға арналған.

Программа құру барысында жасаған кейбір операцияларды мұқият тексеру үшін қажетті деректер қоры www.kn.kz сайтынан алынды.

Программалық пакетте клиентке қатысты әр түрлі сұраныстарды орындауға болады, мысалы, пәтерлерді жалға беру, сатуға байланысты сұраныс жасау.

Төмендегі кодта Қарағанды қаласында орналасқан құны 25000 теңгеден аспайтын жалға берілетін пәтерлерді анықтау сұранысының коды келтірілген [1–3]. Код нәтижесі 2-суретте көрсетілген.

```
Query1.Active:= false;
Query1.SQL.clear;
if (edit1.Text='')and (edit2.Text='') then
begin
            edit1.Text:=inttostr(0);
edit2.Text:=inttostr(1000000);
   end;
if (edit5.Text='') and (combobox1.Text='') and (combobox2.Text='')
and(edit7.Text='') then
Query1.SQL.Add(' select * from vrprodayu1 where
   (price between '"+edit1.Text+'" and '"+edit2.Text+'")')
else if combobox1.Text<>'' then
Query1.SQL.Add(' select * from vrprodayu1
   where (price between '"+edit1.Text+'" and
   '"+edit2.Text+'")and kolkom='"+combobox1.Text+'" and
   telefon like "%'+combobox2.Text+'%" and
   mestoraspolojenie like "%'+edit5.Text+'%" and
   matsten like "%'+edit7.Text+'%'")
else
Query1.SQL.Add(' select * from vrprodayu1
   where (price between '"+edit1.Text+'" and
   '"+edit2.Text+'")and telefon like "%'+combobox2.Text+'%" and
   mestoraspolojenie like "%'+edit5.Text+'%" and
   matsten like "%'+edit7.Text+'%'");
Query1.Active:= true;
```



Цена: от 0 до 25000

Кол-во комнат:

Местоположение:

Телефон:

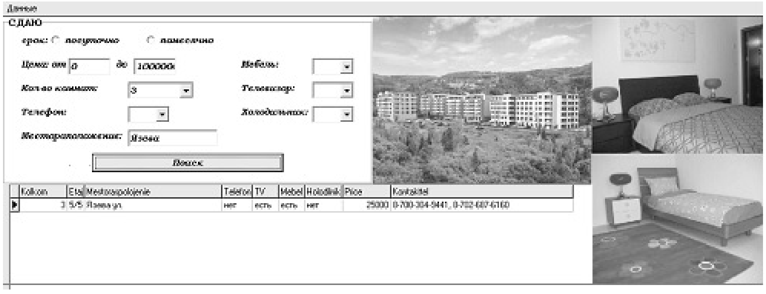
Материал стены:

Kolkom	Etaj	Matsten	Plosh.	Plosh.kuhni	Mestoraspolojenie	Telefon	Balkon	Price	Primechanie	Kontaktnii tel
1	1/4	кирп	32	7	Актас п.	нет	нет	2500	без ремонта, торг, СРОЧНО	74-21-84
2	4/5	кирп	47	7	21 мкр-н, 19	есть	есть	9000	торг	78-81-93, 56-83-59
2	5/9	пан	46	9	15 мкр-н, 26/3	нет	есть	10000	торг	30-80-93, 8-705-763-3549
2	2/5	кирп	43	6	16 мкр-н, 12	есть	нет	10000	ремонт, без долгов, каб ТВ, варианты	78-27-47, 79-03-95
2	1/5	пан	46	6	14 мкр-н, 43	есть	нет	10000	косм. ремонт, торг	8-701-174-7656
2	1/5	пан	42	6	12 мкр-н, 31	нет	нет	10000	ремонт, торг	22-19-84, 8-701-285-8490

2-сурет. Қарағанды қаласында орналасқан құны 25000 теңгеден аспайтын жалға берілетін пәтерлер тізімі

Келесі кодта таңдап алынған көшедегі 3 бөлмелі пәтерлер тізімін шығару сұранысы келтірілген. Нәтижесі 3-суретте көрсетілген.

```
Query1.Active:= false;
Query1.SQL.clear;
if (edit1.Text=")and (edit2.Text=") then
begin
        edit1.Text:=inttostr(0);
edit2.Text:=inttostr(1000000);
  end;
if (edit5.Text=") and (combobox1.Text=") and (combobox2.Text=") and (edit7.Text=")then
Query1.SQL.Add(' select * from vrprodayu1')
else if combobox1.Text<>" then
Query1.SQL.Add(' select * from vrprodayu1
where (price between '"+edit1.Text+"' and '"+edit2.Text+"')
and kolkom='"+combobox1.Text+"' and telefon like "%'+combobox2.Text+'%" and
mestoraspolojenie like "%'+edit5.Text+'%"')
else
Query1.SQL.Add(' select * from vrprodayu1
where (price between '"+edit1.Text+"' and '"+edit2.Text+"') and
telefon like "%'+combobox2.Text+'%" and mestoraspolojenie like "%'+edit5.Text+'%" ');
Query1.Active:= true;
n1.Enabled:=true;
```



Цена: от 0 до 100000

Кол-во комнат: 3

Месторасположение: Язева

Kolkom	Etaj	Mestoraspolojenie	Telefon	TV	Mebel	Holodilnik	Price	Kontaktel
3	5/5	Язева ул.	нет	есть	есть	нет	25000	0-700-304-9441, 0-702-687-6160

3-сурет. Пәтерлер тізімін көшені таңдау бойынша шығару

Қазіргі таңда техника мен технологияның қарқынды дамуына байланысты экономиканың барлық салаларында ақпараттық технологияларды қолдану үрдісі қалыптасып келеді. Экономиканың барлық салаларында өңделетін ақпарат көлемі ұлғаюда. Нарықтық экономиканың талабына сай қажетті ақпарат жылдам өңделуі керек. Осыған байланысты адам саны, адам сұранысы көбейген сайын мәліметтер қорын қағаз бетінде игеру қиындай түсуде. Біз қарастырған «Жылжымайтын мүлік» қолданбалы программалық пакеті осындай деректермен жұмыс атқаратын ұйымдар үшін қажетті программалық пакет болып табылады.

Әдебиеттер тізімі

1 *Гофман В.Е., Хомоненко А.Д.* Delphi: Экспресс-курс. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 288 с.
2 *Фаронов В.В.* Программирование баз данных в Delphi7: Учеб. курс. — СПб.: Питер, 2006 — 459 с.
3 www.kn.kz

Ж.Ж.Айткожа, А.Атаева

Разработка прикладного программного пакета «Недвижимость»

В статье рассматривается один из способов создания пакета прикладных программ «Недвижимость». Создана соответствующая база данных, кроме того, с помощью интерфейса, составленного на трех языках (казахском, английском, русском), можно выполнить различные запросы.

Zh.Zh.Aiytkozha, A.Ataeva

Creating application software package "Real Estate"

In this work there is shown the one method of the creation of the pocket of applied programs «Real Estate». By the created database and interface which is build on 3 languages (Kazakh, English, Russian) can do different quaries.

ӘОЖ 37.01:378.096:004

Д.Р.Бейсенова, И.С.Қауымбек

Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті

Пәндер интеграциясы студенттердің алгоритмдік даярлығын жетілдірудің дидактикалық шарты ретінде

Мақалада студенттердің алгоритмдік даярлығын жетілдіруде пәндер интеграциясының тиімділігі мен маңыздылығы көрсетілген. Бағдарламалау тілдерін оқытудағы математиканың шешуші ролі сипатталған. Түрлі пәндер мазмұнындағы пәндер интеграциясы білімді жүйелеп, үздіксіз және өзара байланыстыра отырып, практикалық есептер мен жаттығулар арқылы бірдей талаптардың жалпы әдіске әкелетін басты терминдерін, заңдылыктарын, теориялық ұғымдарын қалыптастырады.

Кілтті сөздер: интеграция, алгоритмдік даярлық, Ассемблер, Паскаль процедурасы, Фортран, Бейсик, алгоритмдік тіл СИ.

Пәнаралық байланыс пен бүгінгі педагогикалық сөздікте жиі айтылатын «интеграция» ұғымының мәніне тоқталайық. Пәнаралық байланыс дегеніміз — жалпы ғылымдар жүйесінің дидактикалық мақсаттарынан туындайтын оқу бағдарламаларының өзара шартты байлынысы; оқытушы мен оқушы арасындағы іс-әрекеттер жүйесі; оқыту процесін жүзеге асырудың дидактикалық шарты; білім беру мазмұны ерекшелігінің бірі; оқушылардың білім деңгейін көтеру; жүйелі ойлауын дамыту, ғылыми-танымдық көзқарасын қалыптастыру процесін жүзеге асыратын дидактикалық шарт. Интеграция — ғылыми білім мен ғылымның тұтас жүйесін қалыптастыруда, бөлу, жіктеуді бірлікте көрсететін білімнің өзара ену, өзара сіңу процесі; тұтастықты қалыптастырып, білімді жүйелеу мен жинақтауда әр түрлі ғылымдарды біріктіріп, пәндердің өзара байланысын көрсететін пәнаралық байланыстың жоғары сапалық деңгейі. Интеграция — өзара органикалық байланыстағы білімдердің бір-бірімен кірігуі, оқушының ғылымды біртұтас түсінуіне қол жеткізуі. Бұдан шығатын қорытынды: пәнаралық байланыс оқыту процесінің мазмұндық-құрылымдық жүйесіне, сабақ аясына кіретін түсінік болса, ал интеграцияның ауқымы кең. Бүгінгі білім беру кеңістігінде интеграция ғылымдарды жақындастырады, соның негізінде интеграцияланған курстар, пәндер пайда болады, оқыту процесінің білім мазмұндағы үздіксіз сабақтастығы артады. Бірыңғай әлемдік білім кеңістігіне кіруге жол ашады, ғылым мен өндірістің кірігуіне, ғылым жетістіктерін өндіріске енгізуге жол ашады, яғни интеграциялық процесс пәнаралық байланысты тудырады және жүзеге асыруды қажет етеді. Оның төмендегідей тиімді әрі маңызды жақтары бар:

- жекелеген пәндерді ғылыми-танымдық мазмұнды ұқсас тақырыптарды бір мезгілде оқыту;
- әр түрлі пәндердің білім мазмұнында берілген барлық пәнге ортақ негізгі ұғымдарды, заңдарды, теориялық түсініктерді қалыптастыру;
- білімнің жүйелілігін, үздіксіздігін, сабақтастығын қамтамасыз ету;
- жаттығулар мен практикалық тапсырмаларды орындау арқылы жалпы әдістемеге қойылатын бірыңғай талаптарды жүзеге асыру;
- барлық пәнде оқытылатын кейбір тақырыптардың қайталануын жою;
- оқу процесінің білімдік, тәрбиелік, дамытушылық мақсатын, оқу мен тәжірибенің бірлігін жүзеге асыру.

Пәнаралық байланыс біржақты (бір пәнмен байланыс) және көпжақты (екіден көп пәндермен) болуы мүмкін. И.Д.Зверев, В.Н.Максимова [1] пәнаралық байланыстың негізгі үш типін бөліп көрсетті: мазмұндық-ақпараттық; операциялық-іс-әрекеттік; ұйымдастырушылық-әдістемелік. Бірінші тип мынадай түрлерден тұрады: ғылыми білім құрамы бойынша фактілік, ұғымдық, теориялық; сана туралы білімі бойынша философиялық, тарихи-ғылымилық, яғни гностикалық, семиотикалық, логикалық; құндылықтар бағдар білімі бойынша идеологиялық, яғни диалектикалық-материалистік, саяси-идеялық, этикалық, құқықтық. Екінші тип бойынша пәнаралық байланыстың төмендегідей түрлері ажыратылады: оқушыларда еңбек, құрылымдық-техникалық, есептеу-өлшемдік, эксперименттік, бейнелеушілік; сөйлеу іскерлігін қалыптастыруға мүмкіндік туғызатын теориялық білімді қолданудағы практикалық іс-әрекет тәсілдері бойынша практикалық; оқушылардың өздігінен білім әрекетін, ұйымдастырушылық-танымдық, оқу, шығармашылық, ойлағыштық іскерлігін қалыптастыратын оқу-танымдық; іс-әрекет тәсілі бойынша жаңа білімді табудағы танымдық; бағалаушылық, қатынастық, шығармашылық-эстетикалық іс-әрекет іскерлігін дайындауға қажетті, құндылық-бағдарлық іс-әрекет әдісі бойынша құндылық-бағдарлық. Үшінші тип төмендегі түрлерді ажыратады: әр түрлі білім типтеріне байланысты меңгеру тәсілі бойынша репродуктивті, ізденушілік, шығармашылық, жүзеге асырылу уақыты бойынша курсаралық, циклішілік, цикларалық; жүзеге асырылу уақыты бойынша перспективті, ілеспелі, сабақтастық; пәндердің өзара байланыс әдісі бойынша біржақты, екіжақты, көпжақты; тұрақты жүзеге асу бойынша эпизодтық, тұрақты, жүйелі; оқу-тәрбие процесін ұйымдастыру деңгейі бойынша сабақтық, тақырыптық т.б.

Алгоритмдік даярлық студенттерде арнайы біліктілік пен дағдыны қалыптастыруға және дамытуға жағдай жасайды, олар алгоритм мәні мен қасиеттерін, алгоритмді жазу құралы ретінде программалау тілдерін, математика әдістері мен олардың қосымшаларының алгоритмдік сипатын түсінеді. Программалау тілдерін оқыған кезде кез келген программаны жазу үшін математикалық есептер беріледі. Студент программа жазу үшін математикалық есептің қалай шығарылатынын білуі керек. Студенттің алгоритмдік даярлығын қалыптастырып, жетілдіруде математика үлкен орын алады. Математика ғылымы өзінің қолданылуы жағынан ең жоғарыда тұрады. В.Ф.Одоевский: «Математика да, сөз ғылымдары да, заңдылық, саясат та философиялық тұрғыдан алғанда, Күннен сәуле алған планеталардай, бір-бірімен тығыз байланысты және олардың бір-біріне әсері күшті де болады», — деп атап өтті [2].

Мысалы, a,b $(a \le b)$ *натурал сандары берілген.* $a \le p \le b$ *шартын қанағаттандыратын барлық* p *(жай сандар) сандарын алу керек.*

Алдымен математикада жай сандар не екендігі жайлы анықтаманы еске салайық. Егер n $(n > 1)$ натурал санының бір мен өзінен басқа бөлгіші болмаса, ондай сан жай сан деп аталады.

Ескерту. Жай сандарды іздегенде $[a;b]$ кесіндісінен тек тақ сандар мен 2-ні алу керек екені белгілі. $a = 1$ болған жағдайда анықтама бойынша 1 жай сан қатарына енбейді.

Программада қолданылатын шамалар:

n — жай сандыққа тексерілетін сан; $first$ — бірінші тексерілетін сан; $simp$ — логикалық типті шама; k — табылған жай сандар саны.

Есеп шығарудың негізгі кезеңдері:

1. a мен b мәндерін енгізу.
2. 2 санының $[a;b]$ кесіндісіне тиістілігін тексеру ($a = 1$ немесе $a = 2$ болғанда мүмкін).
3. $first$ мәнін анықтау. Егер a жұп сан болса, онда $first = a + 1$, егер тақ болса және егер $a = 1$ $first = 3$, ал $a \ge 3$, $first = a$.
4. $first$-тан бастап b-ге дейінгі аралықтағы барлық тақ сандарды тексеру және экранға жай сандарын шығару (k айнымалысына олардың санын жинау).

Егер $k = 0$, онда берілген аралықта жай санның болмағаны.

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
void main(void)
{int a, b, n, first, k, i, simp;
a=2; b=1;
while (a>b)
    a=2; b=1;
    {printf("\na="); scanf("%d",&a);
      printf("\nb="); scanf("%d",&b);
      if(a>b) printf("\n a саны b санынан үлкен болмауы керек!");
}
k=0;
printf("\n");
if((a==1)||(a==2)) {printf ("2"); k=1;}
if (a%2==0) first=a+1;
else if (a==1) first=3; else first=a;
for (n= first; n<=b; n+=2)
{simp=1;
i=3;
while ((i<=sqrt(n)) && (simp))
if (n%i==0) simp=0;
else i+=2;
if (simp) {printf ("%d,"n); k++;}
}
if (k==0) printf ("\nБұл аралықта жай сандар жоқ ")
}
```

Енді функция көмегімен программа жазсақ:

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
int simple (int n);
{int i;
  i=3;
  while (i<=sqrt(n))
   if (n%i==0) return 0;
  else i+=2;
return 1;
}
void main (void)
{int a, b, n, first, k;
a=2; b=1;
while (a>b)
    {printf("\na="); scanf("%d",&a);
      printf("\nb="); scanf("%d",&b);
      if(a>b) printf("\na саны b санынан үлкен болмауы керек!");
}
k=0;
printf("\n");
if((a==1)||(a==2)) {printf ("2"); k=1;}
if (a%2==0) first=a+1;
else if (a==1) first=3; else first=a;
for (n= first; n<=b; n+=2)
if(simple(n)) {printf("%d", n); k++;}
if (k==0) printf ("\nБұл аралықта жай сандар жоқ")
}
```

Си программалау жүйесі Ассемблер, Паскаль, Фортран және Бейсик тілдеріндегі программалармен байланыс жүргізуге мүмкіндік береді. Си тіліндегі программаларда қолдану үшін Ассемблер, Паскаль және Фортран тілдерінде программа жазудың ережелері және де бұл тілдермен интерфейс ұйымдастыру үшін Си тілі элементтері қарастырылады.

Басқа тілдегі программа деп Си тіліндегі программадан шақырыла алатын Асемблердегі, Паскальдағы немесе Фортрандағы кез келген функция, подпрограмма немесе процедура аталады. Си-программадан басқа тілдегі программаны шақыру үшін, Си-дегі программа да, басқа тілдегі шақырылатын программа да байланыс және атаулар туралы келісілген түрде жүргізілу керек. Паскаль мен Фортран байланыс пен атаулар туралы бірдей келісімдерді қолданады. Олар Си тілінің байланыс және атаулар туралы келісімдерінен ерекшеленеді [3].

Келесі мысал бүтін сандар массивін өсу бойынша сұрыптауды көрсетеді. Сілтеме арқылы жіберілетін массивті сұрыптау үшін Паскаль функциясы (Фортран подпрограммасы) шақырылады.

Паскаль процедурасы немесе Фортран подпрограммасы қолданылған Си-программаның варианты:

```
#include <stdio.h>
     int arr[20] = {12,1, 3, 24, 56, 0, 1, 6, 7, 23,
                    10, 9, 11, 25, 3, 5, 8, 15, 20, 33};
main ( )
{
int i;
void pascal srt(int near *);
printf ("Сұрыптауға дейінгі массив \n");
for (i=0; i < 20; i++)
    printf ("%d%c", arr [i], (i==19) ? ‘\n’: ‘ ’);
srt(arr);
printf ("Сұрыптаудан кейінгі массив\n");
for (i=0; i < 20; i++)
   printf("%d%c", arr[i], (i==19) ? ‘\n’: ‘ ‘);
}
```

Паскальдағы процедура:

```
module P;
      type arr= array [1 .. 20] of integer;
         procedure Srt (var a:arr) [public];
           var temp: integerc;
         begin
           for var i:=1 to 20 do
              for var j:=i+1 to 20 do
                  if a[i]>a[j] then
                     begin
                           temp:=a[i];
                           a[i]:=a[j];
                           a[j]:=temp;
                     end;
        end;
end.
```

Фортрандағы подпрограмма:

```
         SUBROUTINE SRT (A)
         INTEGER [C] A [NEAR]
         DIMENSION A(20)
         INTEGER*2 I,J
         INTEGER [C] TEMP
         DO 20 I=1,20
             DO 10 J=I+1,20
         IF (A(I) .GT. A(J)) THEN
             TEMP = A(I)
              A(I) = A(J)
               A(J) = TEMP
          ENDIF
10 CONTINUE
20 CONTINUE
    END
```

Сонымен, пәндер интеграциясының маңызын былай қорытамыз: оқу пәндері арасындағы өзара байланыстың болуы — ғылымдар негізін меңгерудің және білім жүйесінің дамуының қажетті шарты; дидактикалық көзқарастың қалыптасуы білім мазмұнының барлық құрамды бөліктерінің байланысын талап етеді; пәнаралық байланыс жан-жақты тәрбие жүйесінің барлық салаларын кешенді жүзеге асыруға ықпал жасайды; пәнаралық байланыс педагогикалық еңбектің ғылыми негізде тиімді ұйымдастырылуына көмектеседі; педагогикалық ұжымның барлық іс-әрекетінің бір-бірімен келісімді және демократиялық негізде жүріп отыруына әсер етеді.

Әдебиеттер тізімі

1 *Зверев И.Д., Максимова В.Н.* Межпредметные связи в современной школе. — М.: Педагогика, 1981. — 91 с.

2 *Виргинский В.С., Одоевский В.Ф.* Естественнонаучные взгляды. — М.: Наука, 1975. — 112 с.

3 *Сағындықов К.М.* Алгоритмдік тіл Си. — Қарағанды: ҚарМУ баспасы, 2002. — 306 б.

Д.Р.Бейсенова, И.С.Кауымбек

Интеграция дисциплин как дидактическое условие совершенствования алгоритмических навыков студентов

В статье показаны эффективность и важность интеграции предметов в совершенствовании алгоритмической подготовки студентов. Описана решающая роль математики в изучении языков программирования. Интеграция предметов в содержании различных предметов сформировывает основные термины, законы, теоретические понятия, осуществляя системность, беспрерывность и взаимосвязь знаний, единые требования к общему методу через выполнение практических заданий и упражнений.

D.R.Beiysenova, I.S.Kauymbek

Integration of subjects as didactic condition for improving of students' algorithmic training

There were efficiency and importance of the integration of objects in improvement of the student's algorithmic training in the article. In the article role described in the study of programming languages. Integration of objects creates basic terms laws, theoretical concepts, realizes systematic, continuous, interdependence of the knowledge, united demands to the common method through execution practical tasks and exercises in the contents of different objects.

УДК 378.1:004.41

Д.З.Смагулов, Д.Б.Алибиев

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

Информатизация учебного процесса в вузе. Анализ существующих решений

Рассмотрены достижения и актуальные проблемы информатизации образовательного процесса. Представлены основные требования к информационной системе.

Ключевые слова: информационные системы, автоматизация, подсистема, документооборот, университет, сервер, СУБД, Электронный деканат, интернет.

Разработка современной автоматизированной информационно-аналитической системы управления большим университетом является исключительно сложной задачей, требует привлечения больших материальных и интеллектуальных ресурсов, применения самых современных информационных технологий. Во многих вузах существуют программные комплексы, в той или иной степени решающие задачи, относящиеся к этой сфере их деятельности, тем не менее, в настоящее время эта проблема еще не доведена до полного решения [1].

В настоящее время многие вузы имеют информационные системы, автоматизирующие отдельные подсистемы автоматизации решения отдельных задач управления учебным процессом [2].

К подобным системам можно отнести следующие:

COSINUS (МФТИ) — система управления вузом разрабатывается на основе современных открытых технологий и предназначена для управления учебным процессом вуза, включая работу ректората, деканатов факультетов, учебного отдела, отдела кадров, приемной комиссии, которая имеет подсистемы:

COSINUS.PORTAL;
COSINUS.ABITUR;
COSINUS.EDUMAN;
COSINUS.STUDENTS;

COSINUS.ABITUR — подсистема приемной комиссии.

Поддерживает полный цикл операций по набору абитуриентов:

- регистрация абитуриентов;
- подготовка договора на обучение;
- внесение изменений в карточку абитуриента;
- подготовка ведомостей на экзамен;
- ввод результата экзаменов;
- подготовка списка на собеседование;
- ввод результата собеседования;
- подготовка списков на ЦПК;
- подготовка и печать приказа о зачислении;
- экспорт зачисленных студентов в подсистему управления контингентом студентов;
- подготовка аналитических справок и отчетов по результатам набора.

COSINUS.STUDENTS — система управления контингентом студентов.

Поддерживает:

- ведение в электронном виде и возможность вывода на печать личных дел и учебных карточек студентов;
- подготовку экзаменационных ведомостей и индивидуальных экзаменационных ведомостей;
- формирование основных 38 типов приказов по управлению контингентом студентов;
- подготовку и печать протоколов и ведомостей ГЭК;
- формирование учебного плана группы;
- ввод результата экзамена/зачета;
- распечатку результатов сессии;
- подготовку диплома бакалавра и его печать;
- подготовку диплома магистра/специалиста и их печать;
- подготовку приказа о переводе на следующий курс.

Система обеспечивает настройку видов приказов, используемых в конкретном вузе, и управление контингентом студентов с помощью этих приказов.

Система содержит простую, но эффективную систему служебного документооборота «деканат – декан – ректор – студенческий отдел кадров (канцелярия)», а также, при необходимости построения более сложной модели документооборота, позволяет интегрироваться с внешними системами документооборота на основе XML-формата обмена данными [3].

Система обеспечивает сквозное штрихкодирование всех документов, формируемых в системе.

Для вузов, практикующих обучение на платной основе, поддерживается возможность фиксации факта оплаты по договору на обучение, поступления регулярных платежей, ведение информации о договорах на платное обучение.

Технически система реализована на основе промышленной базы Infomix (Oracle) и CORBA ORB OMNI или TAO.

Информационная система «Университет» — информационная система компании REDLAB, созданная на технологической платформе SAP R/3 в тесном сотрудничестве с МГУ им. М.В.Ломоносова и рядом вузов-партнеров, является специально разработанной для управления деятельностью российских высших учебных заведений [4].

С учетом требований к производительности, масштабируемости и степени распределенности система «Университет» имеет трехуровневую архитектуру: сервер базы данных – сервер приложений – клиент. Она обеспечивает работу под управлением различных промышленных СУБД. Все рабочие места системы действуют в единой вычислительной сети. Система может функционировать на различных аппаратных и программных платформах. Такая системная архитектура обеспечивает приемлемые характеристики функционирования системы как на высокоскоростных, так и на низкоскоростных каналах связи.

Система обеспечивает:

- концепцию однократного ввода данных;
- унифицированный интерфейс пользователя;
- интеграцию данных из различных подсистем;
- непротиворечивость и целостность данных;
- удаленный доступ к информации в рамках вуза;
- поддержку групповой работы;
- индивидуальную настройку рабочих мест пользователей;
- представление информации для публичного доступа, через WWW.

Кроме того, гарантирует разграничение прав доступа к данным и функциям системы, защиту данных от несанкционированного доступа и непреднамеренного разрушения, безопасность данных при внештатных ситуациях.

Реализация системы базируется на обобщенной концептуальной модели бизнес-процессов вуза, включая процессы управления кадрами, материальными и финансовыми ресурсами, учебным процессом, проектами научных исследований и опытно-конструкторских разработок [5].

Система поддерживает все бизнес-процессы вуза, как основные (управление учебным процессом, управление персоналом, управление финансами, управление научными исследованиями), так и вспомогательные (управление организационно-административным обеспечением, управление материально-техническим обеспечением, управление академическими и студенческими службами).

Ниже приводится краткое описание основных, наиболее критичных для вуза функциональных возможностей системы.

Подсистема управления учебным процессом обеспечивает поддержку бизнес-процессов вуза, направленных на получение студентами качественного образования. Она обеспечивает планирование и контроль учебного процесса, формирование стандартной отчетности, распределение и учет кадровых и аудиторных ресурсов. Подсистема обеспечивает ведение договоров по оплате обучения и начисление стипендии [3].

Подсистема обеспечивает:

- зачисление контингента;
- ведение персональных данных студентов;
- планирование и формирование учебных планов;
- планирование, проведение и обеспечение контрольных мероприятий;
- движение контингента;
- формирование отчетности;
- выплаты студентам и ведение договоров по оплате;
- формирование расписания;
- управление персоналом и организационный менеджмент.

Подсистема управления персоналом включает поддержку бизнес-процессов вуза, обеспечивающих кадровый менеджмент, а также процессы по начислению и учету зарплаты и менеджменту дополнительных вознаграждений [6].

Подсистема обеспечивает:

- организационный менеджмент;
- набор и администрирование персонала;
- планирование профессионального роста персонала;
- управление льготами;
- менеджмент вознаграждений;
- управление временными данными;
- расчет заработной платы сотрудникам и стипендии (студентам, аспирантам, докторантам);
- экспорт данных в программу ПФР;

– формирование внутренней и внешней отчетности;

– ведение архива данных сотрудников.

Подсистема управления финансами обеспечивает поддержку бизнес-процессов вуза, направленных на совершенствование финансовых механизмов управления. Она обеспечивает процессы бюджетирования; ведение бухгалтерской и другой финансовой отчетности, осуществление закупок, реализацию материалов, услуг и работ, ведение договоров, все процессы материального учета. Подсистема обеспечивает ведение бухгалтерских операций и формирование всех бухгалтерских отчетных документов в соответствии с российским законодательством [7].

Подсистема гарантирует:

– бюджетирование;

– управление процессом закупок и материальный учет;

– поддержку реализации материальных ценностей, работ и услуг, учёт договоров;

– контракты студентов (механизмы и отчеты);

– оперативные отчеты;

– управление научными исследованиями и грантами.

Подсистема обеспечивает поддержку процессов, связанных с управлением научными исследованиями.

Подсистема обеспечивает:

– управление научными исследованиями;

– финансовое обеспечение проектов;

– управление грантами;

– учет результатов научных исследований;

– подготовку внутренней и внешней отчетности.

Подсистема управления документацией обеспечивает выполнение основных процессов делопроизводства.

Подсистема обеспечивает:

– учет документов;

– поддержку жизненного цикла документа: от составления до утверждения;

– контроль сроков исполнения;

– хранение документов и ведение структурированного архива;

– циркуляцию электронных документов и сообщений.

Система «Электронный деканат» РЭА им. Г.В.Плеханова — автоматизированная информационная система «Электронный деканат» (ЭД) для высшего учебного заведения предназначена для повышения эффективности функционирования подразделений вуза и улучшения качества образовательного процесса, за счет снижения времени затрачиваемого на процессы сбора, обработки и получения любой запрашиваемой информации.

ЭД представляет собой программно-аппаратную и организационно-административную систему сбора и обработки информации, связанной с учебным процессом, функционирующую в реальном масштабе времени.

Структура системы ЭД основана на технологии клиент-серверной архитектуры, что легко позволяет проводить всесторонний анализ совокупности больших объемов данных и в сжатые сроки решать любые поставленные задачи.

Управление корпоративными знаниями вуза предполагает наряду с созданием интегрированной базы данных вуза, включающей также базы данных электронных учебников, деловых игр и экономических баз данных для проведения практических занятий, интеграцию Интранет и Интернет-систем, применение аналитических технологий обработки данных (Business Intelligence).

После внедрения системы учебный отдел уже не должен собирать итоги сессии со всех институтов, он просто присоединяется к серверу и получает срез успеваемости на нужную дату, причем по всем институтам в режиме повседневной оперативной деятельности. Дальнейшее развитие системы позволит автоматизировать расчет часов учебной нагрузки, составление расписания, распределение и контроль выполнения нагрузки преподавателями, обеспечить анализ в различных разрезах сведений о профессорско-преподавательском составе Академии.

Все это в совокупности повысит качество и эффективность работы деканатов и учебного отдела. Позволит более точно оценивать последствия принятия тех или иных решений по совершенствованию учебного процесса [8].

Список литературы

1 Кредитная система обучения. Опыт внедрения в КарГУ. — Караганда: Изд-во КарГУ, 2004.

2 *Кубеев Е.К., Каргин С.Т.* Учебный процесс в КарГУ. — Караганда: Изд-во КарГУ, 2003.

3 Материалы Академии образовательной сети / EdNet Academy.

4 *Захарова И.Г.* Информатизационные технологии в образовании: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. зав. — М.: Академия, 2003. — 192 с.

5 *Искакова С.К.* Опыт Университета «Мирас» по созданию учебно-методических комплексов и электронных учебных курсов // Внедрение кредитной технологии подготовки специалистов в университете «Мирас». — Шымкент: Ун-т «Мирас», 2003.

6 *Рябин Н.К.* Методические рекомендации по разработке учебно-методических комплексов для преподавателей и студентов (силлабус). — МАБ, 2004.

7 http://www.intertrust.ru/analytics/articles/

8 http://www.codeby.net/

Д.З.Смағұлов, Д.Б.Әлибиев

Жоғары оқу орнында оқу процесін информатизациялау. Бар шешімдерді талдау

Оқыту барысын ақпараттандыру саласында қазіргі кездегі жетістіктер мен дәйекті мәселелер қарастырылған. Дайын ақпараттық жүйесіне қойылатын негізгі талаптары көрсетілген.

D.Z.Smagulov, D.B.Alibiev

Informatization of the educational process in high school. Analysis of present-day solutions

It is considered the achievements and important problems of informatization of education process. It is presented the main requirement to Information system.

ӘОЖ 37.01:378.096:004

А.Б.Серікбаева

Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті

Білім берудегі интегралды технология

Интегралдық технология білім берудегі заманауи ақпараттық-телекоммуникациялық технологияның бірі ретінде қарастырылған. Сонымен қатар берілген технологияның құрылымы, сабақтағы әрбір блокты өткізу түрлері келтірілген.

Кілтті сөздер: интегралды технология, блок, дифференциалды бекітумен дамитын, кіріспе қайталау, төменгі деңгей тренингі.

Интегралды білім беру технологиясы дидактикалық орталық пен жеке шығармашылық қарым-қатынасқа құрылып, пәннің мазмұнын жақсы меңгеру арқылы жеке тұлғаның дамуын қамтамасыз ететін төртінші буын технологиясы болып саналады [1].

Интегралды технологияның құрлымындағы тұрақты және ауыспалы бөлімдері арасы бөлініп тұратын оқыту процесінің ең кіші бірлігі — блок сабақтар болмақ. Тұрақты бөлім сабақтарының ауыспалы бөлім сабақтарынан айырмашылығы, оқу материалы негізінде және басқа параметрлері бойынша аз тәуелді, процестердің ағымы бойынша толық және кері ақпараттық байланысқа жоғары сезімталдықпен анықталады. Интегралды білім беру технологиясы қандай блоктардан тұратындығының барлық элементтерін қарастырамыз. Кез келген білім беру технологиясы келесі үш бөлімдермен аяқталады: қорытынды қайталау, бақылау және коррекция. Бұл жаңа ақпаратты ұсыну қызметі схемасынан келіп шығады.

Ішкі және сыртқы байланыс жүйесінде, жаңа материалды үлкен мөлшерде оқу мектеп тәжірибесінде міндетті түрде кіріспе қайталаумен нақтыланғаны жөн. Бұл оқушылар арасында түрткілерінің (мотивация), мүмкіндіктерінің табысқа жету деңгейлерінің ара салмағының тым шалғай болуымен түсіндіріледі. Қалыптастыру және дамыту қызмет жүйелері процестері дұрыс жүруі үшін, оқушылардың жедел жадысын қабілеті мен бар мүмкіндігін қайта оқуға құрылған біліммен жүктеп, нақты бір қызмет жүйесін өзекті ету керек. Бұл кіріспе қайталаудың мектеп тәжірибесінде маңыздылығы өте үлкен болғандықтан, ол блок сабақтардың жеке бөліктерінен (элементтері) ерекшеленіп тұрады.

Барлық жүйе байланысында жаңа материалды үлкен көлемде оқу ұйымдастыру мәселелерін туындатады. Мектепте оқушылардың басым бөлігі білім беру стандартына сәйкес жалпыға міндетті төменгі деңгейдегі берілген тақырып көлемімен шектеліп қалады.

Жаңа материалды оқуда блок басында жалпыға міндетті мазмұнға — негізгі көлемге ғана көңіл аударылады. Сонымен бірге бекітуден кейін қосымша көлемде материал беру, қосымша қайталау қажеттілігін керек етеді, яғни онсызда аз уақытты жоғалтады.

Оқып игерілген материалды жедел, тез арада жаттығулар орындауда қолданылуын қызмет принципі қажет етеді. Оқытудың жоспарланған нәтижесі төменгі деңгей тапсырмасы жайлы сөз қозғалып жатқандықтан да. Оны шеше білу автоматтанған (жылдам, тез орындайтын) жағдайға жеткізу керек. Бұл бірінші бекіту бөлімін «тренинг-минимум» деп атаймыз.

Оқытудың келесі сатысына өту үшін, ең алдымен, жалпы және бұрынғыдан да жоғары деңгейдегі жұмысты қамтамасыз етіп, оқушыларды қосымша ақпараттар көлемімен таныстыру керек. Сондықтан да блок сабақтар құрылымында, оқушылардың өздігінен белгілі бір дәрежеде танымдық белсенділігін қамтамасыз ететін жаңа материалды оқытудың келесі бір элементі пайда болады.

Ең басты топтың ішкі динамикасы саналатын, топтық оқыту тәсілін ұйымдастыруға болатын, дифференциалды оқуға көшуге мүмкіндік туады. Блоктың бұл элементі дифференциалды бекітумен дамитын (ДБД) деп аталады. Алынған интегралды білім беру технологиясының типтік құрылымы төмендегі суретте берілген.

Кіріспе қайталау — (КҚ)
Жаңа материалды оқу (негізгі көлем) — (ЖМО(Н))
Төменгі деңгей тренингі (тапсырма 1) — (ТТ(T_1))
Жаңа материалды оқу (қосымша көлем) — (ЖМО(Қ))
Дифференциалды дамыта бекіту (тапсырма 2) — (ДДБ(T_2))
Дамыта қайталау– (ДҚ)
Бақылау — (бақ.)
Коррекция — (кор.)

Сурет. Интегралды білім беру технологиясының құрылымы

Блоктың түрлі элементінде сабақтарды ұйымдастырудың формаларын қарастырайық.

Кіріспе қайталау.

Бұл блок элементінде сабақ тәсілі интерактивті ақпараттық режимде болғаны жөн. Мұндай талапты қанағаттандыратын тәсіл — әңгімелесу. Оқытушы оқушыларға мақсатты түрде іріктеліп алынған сұрақтарды қояды. Оқушылар осы сұрақтарға жауап бере отырып, жадылардағы қажетті мәліметтерді жаңғыртып естеріне түсіреді.

Жаңа материалды оқу (негізгі көлем).

Бұл элементті лекция түрінде жүргізген дұрыс болмақ. Ол үлкен көлемдегі дидактикалық тұтастықты оқушыларға шағын ықшам түрде ұсынуға мүмкіндік береді. Бірақ та көбіне дәстүрлі әдістер — әңгімелесу мен әңгімелеу жиі қолданылады.

Шағын тренинг.

Оқытудың жоспарланған міндетті деңгейі талабына сәйкес келетіндей қалыпты тапсырмаларды шешуді автоматты деңгейге жеткізу үшін, алдымен, бұл қалыпты тапсырмалар әңгіме түрінде беріледі. Бірте-бірте олар оқушылардың өздігінен орындайтын жұмысына ауысады. Қашан барлық сынып топтарға бөлініп және тапсырманы орындау кезінде бекіту оқушылардың өз ара қарым-қатынасы арқылы жүзеге асатын болса, аралық қадам практикумды қолдау болмақ.

Жаңа материалды оқу (қосымша көлем бөлімі).

Бұл материалдың ерекшелігі, бір оқушылар оны барлық жағынан қолдану деңгейіне дейін талдаса, екінші біріне оны талдап, жалпы ұғымын түсіну пайдалы, ал үшінші біріне танысуда жеткілікті. Жаңа материалды оқудың тиімді формасы семинар болмақ.

Сабақтың бұл блогының бөлімі тұрақты деп аталады. Оған бақылау элементтерінің түрлері де кіреді. Қалған сабақтар алдыңғы сабақтар нәтижесімен анықталып, блок сабақ блогының аралық бөлігін құрайды. Тұрақты және аралық бөліктері бір-бірінен ажыратылып тұратындай нақты шекарасы болуының қажеті жоқ. Шындығында оқытуды компьютермен қолдануға байланысты бұл шекара жоқ та. «Сабақ блоктарының тұрақты және аралық бөліктері» сөзінің өзі термин сөз болмайды, тек талдауға тиімді болғаны үшін енгізілген.

Дифференциалды дамыта бекіту.

Блок сабақтың бұл элементінде топтық жұмыстар белсенді түрде қолданылып, жүзеге асырылады. Сол үшін интегралды технологияда арнайы сабақ формасы — семинар-практикум құрылған.

Сынып оқушыларының белгілі бір бөлігі сабақта топтарға бірігіп, әрбір топ нақты шектелген уақыт аралығында тапсырма алады. Шектеулі уақыт аяқталған сәттен бастап, топтар өз жұмыстары бойынша көрсетілген және басқа түрде есеп береді. Бұл түрлердің ішінде топтардың мұғалімге, алдын ала әзірленген оқушы-бақылаушыға, басқа топқа есептері; болмаса топтағы әр оқушы өз тобының бақылаушысына есеп береді. Солардың ішінде ең тиімді нұсқасы — «көпшілік алдында қорғау». Мұғалім болып сайланған топтың бір мүшесі тақта алдында шығып сыныпқа сабақтың, тақырыптың орындағаны жайлы айтады. Ол соңынан қойылған сұрақтарға жауап береді. Басқа да мүмкін болатын шешу жолдары мен қарастырылмаған шешімдері талданады. Топтың қызметін бағалауда сыныпқа жетекші роль тиеді. Жасөспірімдердің қасында олардың өзара қарым-қатынасы жетекші роль атқаратындықтан, өздерінің қатар құрбыларының тарапынан алған бағалары өте маңызды. Кей кезде бір тапсырманы екі топ шешеді — ол кезде олар бір-біріне қарама-қарсы топтар болып саналады. Бұл жағдайда бір топ өз тапсырмасын қорғайтын тұста, екінші топ қарсы пікірде, болмаса қойылған тапсырманың басқа шешімі бойынша толықтырушы болып саналады. Түрлі психологиялық және дидактикалық мақсаттарға жету үшін, сабақтың түрлі нұсқаларының ішінде семинар-практикум сабағы ең тиімді сабақ түрі болмақ. Барлық топтар өздерінің тапсырмалары мен жұмыс істеу сәтінде, мұғалім сыныптың басқа бөлігімен өзіне қажетті жағдайда; жауап беру (сұрақ-жауап), бірігіп тапсырманы орындау, оқушылардың хабарламасын талдау, қысқа бақылау жұмыстары, диктант және тағы басқа формада жұмыс жүргізіледі.

Сабақ барысында екі-төрт топтың жұмысын талдауға болады, бірақ олардың санын одан да көп құруға болады. Тапсырманы орындау деңгейі жалпы сыныптың негізгі бөлігінің орындаған тапсырмалары деңгейінен өзгеше болса, «көпшілік алдындағы қорғауға» ол топтар тартылмайды. Мұндай жағдайда бұл топтардың есебін мұғалім өзі алады. Бұл топтарды топтастыруға мұғалімнің қандай мақсатқа жетуді көздеуіне байланысты сабақ барысында бір оқушы әр түрлі типтегі топтар құрамында сол топ мүшесі ретінде жұмыс жүргізуі мүмкін.

Топтағы ұсынылған тапсырмалар бір-біріне байланысты болмағандықтан, бұл сабақтар аясында әр түрлі деңгейде оқыту нәтижесін жоспарлауда (деңгейлік дифференциалдауда) ғана емес, түрлі кәсібилік, яғни түрлі мазмұнмен (кәсіби дифференциалдау) оқытуды ұйымдастыру керек. Бұл барынша келешегі бар ұсыныс. Әсіресе шағын комплектілі мектептер санының көп болған тұста өте қажет. Сонымен бірге бұл ауылдың мектептердің жағдайында кәсіби оқытуды ұйымдастыру кезінде де маңызды болмақ.

Семинар-практикумды ұйымдастыру схемасы да сабақтан сабаққа көшкен сайын алдыңғы сабақтар нәтижесіне орай айқын өзгереді.

Оқушылар қызметін табысты басқару, блоктың аралық бөлігінде және ұйымдастыру құрылымы мен сабақ мазмұнын жоспарлауда кері байланысты ұйымдастыру әрбір оқушының алға жылжуы туралы ақпаратты алу үшін қажет. Интегралды технологияда оқушының нақты кезеңдегі жағдайын диагностикалау үшін аралық бақылаудың икемді жүйесі және оқыту кезеңінен шығу кезінде тақырыптық бақылаудың қатаң талабы қолданылады. Бағалау шкалалары әр түрлі болуы мүмкін, соның ішінде көбіне рейтингтік және дескритивтік белгілік сияқты аралас түріндегісі қолданылады. Ал ресейлік білім беру заңы талабы бойынша нақты салыстырмалы және абсолютті сандық шкаласы қолданылады. Өлшем құралдары: тест, бақылау жұмысы, әңгімелесу, коллоквиум және басқа.

Жалпы тәртібі:

– оқушы аралық кезеңде бұрын өзі жетістікке жету үшін жұмыс істеген деңгейдегі тапсырма алады;

– бір аралық кезеңде бұрынғы көрсеткішін қайталаса немесе одан төмен көрсеткіш көрсеткен оқушы осы блоктың соңына дейін сабақта төменгі деңгейдегі, ал аралықта бұрынғы көрсеткішінен кейінгі көрсеткішке қол жеткізген оқушы одан да жоғары деңгейдегі тапсырмаға ауысады. Дербес жағдайда аралық кезеңде оқушы ілгеріленген деңгей (жоғары деңгей) көрсеткен жағдайда блок соңына дейін аралық кезеңдерге қатыспайды;

– аралық бақылауға барлық сынып оқушылары тартылмайды, тек мұғалім үшін олардың білім деңгейі туралы ақпарат алу қажет топтары ғана қатыстырылады.

Блок сабақтың аралық бөлігі кері байланыс ақпаратына өте сезімтал. Интегралды технологияда сабақ жоспарында өз орнын алған әрбір оқушының өз ролі бар. Оқушылардың сабақта болмауы мұғалімді жылдам жоспарын қайта құруға мәжбүрлейлі, әйтпесе оқушылар арасындағы қарым-қатынасты және өз ара байланысты ұйымдастыруға тура келеді. Бұл интегралды білім беру технологиясын мұғалімдер үшін көлемді еңбек болмақ, осы жерде оның түбір негізінің тиімділігі жатыр.

Үй тапсырмасы оқушыларға жаңа оқу материалын (негізгі көлем) танысудан басталып және бірінші бекіту (төменгі тренинг) материалдың негізгі мазмұны ұсынылып, төменгі деңгей тапсырмаларын шешу үлгілері негізінде беріледі. Тапсырманың өзі көптеген кішігірім тапсырмалардан құрылады. Оның әрқайсысы үш бөлімнен: төменгі; 1-деңгей; 2-деңгей (жалпы және ілгерілендірілген сөздері оқушыларға айтылмайды және оқушылармен әңгімелесу кезінде қолданылмайды). Бұл тапсырмалардың әрқайсысы бір мезгілде екі мақсатта қолданылады: үй тапсырмасын құру және оқушыларды оқытудың жоспарланған нәтижесімен таныстыру. Бір мезгілде тапсырмамен бірге дамыта қайталау сабағының уақыты хабарланады. Осы арқылы оқушылардың әрбір бөлікке қанша уақыт бөлгенін, бұл сабақтан кейін бақылау жұмысы барын, ал сонан кейін коррекция сабақ және сонымен тақырыпты оқу аяқталатынын біледі.

Әрбір оқушы құқылы:

– өздіктерінен өздерінің үй тапсырмаларын уақыты және көлемі бойынша жоспарлау білуі керек;

– кез келген бөлімін, кез келген бөлімінің құрамындағы кез келген кішігірім бөлімді орындауға болмаса, ешқайсысын орындамауға;

– тапсырманы, мұғалімге сынақшы ретінде көмектесу есебімен, басқа оқулықтар арқылы кішігірім тапсырмалармен толықтыру.

Сабақта қайталауды дамыту үшін өздерінің үй тапсырмалары бойынша оқушылар кез келген сұрақты қоюға болады.

Үй тапсырмасы сабақтан сабаққа дейін барлық сыныпқа, сондай-ақ жеке оқушылар мен топтарға да берілуі мүмкін. Мұндай тапсырмалар барлығы үшін міндетті түрде кімге берілгенін барлығы тексерген болуы керек.

Блок-сабақ соңына жеткен тұста, байыта қайталау қажеттілігі туындайды. Осы арқылы оқушыларға барлық тақырыпты тұтастай (көру мүмкіндігі болатын оның қандайда бір жүйелік білім алатын, өзінің осы пән бойынша білімінің деңгейінің қай шамада екенін көруге мүмкіндік болады. Тәжірибе ғана емес, теориялық ой қорыту көрсеткендей, кеңес (консультация) беру формасы — тақырыптың және қортынды бақылау байыта қайталау сабағын ұйымдастырудың ең бір тиімді формасы. Мұндай сабақтарды ұйымдастырудың әдемі де тиімді тәсілдері бар [2].

Бақылау сабағы.

Бақылау сабағы үш деңгейлі жазбаша сынақ, бақылау тапсырмасының құрылымы, үй тапсырмасының құрылымын қайталайды; екі-үш тапсырма төменгі деңгейге, бір тапсырма екінші деңгейге. Барлық деңгей айқын ажыратылған. Оқушылар үшін тәртібі өте қатал.

Тапсырма қатан түрде рет-ретімен басынан соңына қарай орындалады. Тапсырманы таңдаудың ешқандай мүмкіндігі жоқ. Оқушылар деңгейіне шамасы жағынан сәйкес келетіндей етіп қарастырылмаған, ал оның өзін-өзі бағалауға байланысты көп жағдайда біржақты дәл бағалау болмайтындықтан.

Тапсырманы тексеру (қабылдап алу) сол тәртіппен, қашан бірінші қателік кездескен тұсқа дейін орындалады [3].

Мұғалімнің блок-сабақтың табысты болуы жайлы ақпаратты алу басты мақсаты болғандықтан, оқушының барлық жұмысы басынан-аяғын дейін мұқият тексеріледі. Бұл ақпарат коррекция сабағында және блоктың оқу-әдістемелік материалын жетілдіріп келесі жұмыстарға қолдануға өте қажет. Бағасы бойынша оқушы өз қателігінің қай шамада екенін біледі. Коррекция сабағында оқушылар топтарға бірігіп өз жұмыстарын бір-бірімен кеңесе отырып талдайды. Жоғары балл алған оқушылар осы сабақта мұғаліммен бірігіп жұмыс істейді, болмаса стандартты емес тапсырмаларды орындап, жолдастарына көмектеседі. Көптеген балалар туындаған психологиялық күштердің әсеріне тапсырманы баяу орындайды. Қатаң ереже жағдайында өзін-өзі жайлы сезунуі үшін «жай басар» оқушылар үшін қорғаныс механизмі болуы керек. Мұндай механизм интегралды технологияда әрбір оқушы оқу жылы ішінде бұрындары тапсырған жұмыстары бағасын жақсарту мүмкіндігі бар. Бұл тек коррекция сабағында ғана орындалады. Мұндай әрекетке бару мүмкіндігі оқушыларға бір-ақ рет беріледі. Оны пайдалану құқы сынып журналы мен мұғалімнің жеке іс қағазында белгіленеді.

Интегралды технология — компьютерді пайдалануды қалыпты қажет ететін санаулы технологиялардың бірден-бірі. Мұнда екіжақты қолдану [4].

Бірінші бекіту — төменгі тренинг — компьютер оқыту машинасы ретінде қолданылады. Тренингтің сәтті шығуы әрбір оқушының қабілетін анықтауға байланысты:

– жеке тапсырмалар (жаттығулар) жиыны;

– жеке жұмыс ырғағы;

– осы жағдайда тапсырманы толық өздігінен орындауы;

– үздіксіз бақылау және басқару.

Мұғалім талап етілген жағдаймен қамтамасыз ете алмайды. Сондықтан да тренингтің жүз пайыздық сәтті шығуы екі талай. Жоғары сапалы оқыту бағдарламалары, жаттығу бағдарламалары мен және бақылаушы бағдарламалармен жабдықталған компьютерлер саны түйінді мәселелерді шешпесе де, оның өзектілігін төмендетеді. Бұл бағдарламалар топтарды теңестірудің орнына екінші бекітуде қолданылуы мүмкін. Ол оқушылардың қимыл әрекетіндегі баяулау, кешігуді азайтуға мүмкіндік береді.

Екінші бекіту — дифференциалды дамытуды бекітуде компьютер, жалпы және ерекше ілгерілендірген деңгей тапсырмалары мен топтар үшін интеллектісін күшейту құралы ретінде қолданылады.

Мұндай топтарда жұмыс істеу сәтінде оқушылар тапсырманың мағыналы бөлімдерін (шешу әдіс тәсілінің жолын табу, түрлі нұсқаларды, басқа тапсырмалармен байланыс және басқа да), ал техникалық (есептеу, құрастыру, қайта құру және тағы басқаны) жағын машина орындайды. Осыдан келіп орындаушы бағдарламалар, құрастырушы және имитациялық бағдарламалар, мәліметтер базасы, электрондық кестелер, мәтіндік процессор мен графикалық редакторлар, электрондық машинаны өндірісте қолдануға байланысты және тағы басқа бағдарламалар пайдаланылады. Желі ресурстары мен оған қызмет ететін бағдарламалар кеңінен қолданылуы мүмкін.

Интегралды технологияның мінездемелік шамаларының мәндері [5]:

– технологиялық мақсаттағы қойылым: іскерлік-ақпараттық, немесе ақпараттық-іскерлік;

– негізгі құрылымдық бірлік: блок-сабақтар;

– оқытудың жоспарланған нәтижесі жайы: оқу тапсырмасы жүйесі;

– кері байланыс құрылымын белгілеу: нәтижелілік мониторингі;

– оқытудың іскерлік әдістемесі: түсіндіру-бейнелеу, эвристикалық, проблемалық, модельдік;

– оқытудың ұйымдастыру формасын меңгерген: дәріс, практикум, семинар, семинар-практикум;

– оқытудың типтік құралдары: карточкалар, компьютерлер, оның ішінде бір желіге біріктірілген;

– гуманитарлық жүйе үшін білім беру процесін ұйымдастыруда өлшем есебінің нақты еместігі: орта.

– блок-сабақтарда оқытудың нәтижелілігін анықтаудың қорытынды бақылаудың әдісі (ұйымдастыру формасы): жазбаша сынақ.

Әдебиеттер тізімі

1 *Гузеев В.В.* Теория и практика интегральной образовательной технологии. — М.: Народное образование, 2001. — 127 с.

2 *Лизинский В.М.* Тридцать вопросов учителю. — М: Народное образование, 2001. — 186 с.

3 *Кушнир А.* В зачет выполненной работы идет число строк до первой ошибки, или наибольший объем работы между двумя ошибками. — М.: Народное образование, 2001. — 102 с.

4 *Гузеев В.В.* Образовательная технология ТОГИС — обучение в глобальных информационных сетях // Школьные технологии. — М.: Педагогика, 2000. — № 5. — С. 159–167.

5 *Гузеев В.В.* Консультации: технология ТОГИС // Педагогические технологии. — М.: Книга-сервис, 2007. — № 3. — С. 115–119.

А.Б.Серикбаева

Интегральная технология обучения

Рассматривается интегральная технология как один из видов современных информационно-телекоммуникационных технологий в образовании. Приводится структура данной технологии, формы проведения каждого блока на уроках.

A.B.Serikbaeva

Integrated technology in the learning

The integrated technology as one of kinds of modern information-telecommunication technologies in formation is considered. The structure of the given technology is resulted, forms of carrying out of each block at lessons are considered.

АВТОРЛАР ТУРАЛЫ МӘЛІМЕТТЕР
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Айтқожа Ж.Ж. — қолданбалы математика және информатика кафедрасының доценті ф.-м.ғ.к., Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті.

Алибиев Д.Б. — зав. кафедрой прикладной математики и информатики к.ф.-м.н., Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова.

Атаева А. — қолданбалы математика және информатика кафедрасының 2-курс магистранты, Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті.

Әбдыкешова Д.Т. — Т.Ғ.Мұстафин атындағы алгебра, геометрия және математикалық логика кафедрасының 1-курс магистранты, Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті.

Бейсебаев А.К. —доцент кафедры механики к.т.н., Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова.

Бейсенова Д.Р. — математика және информатиканы оқыту әдістемесі кафедрасының аға оқытушысы, Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті.

Битимхан М. — ст. преподаватель, Карагандинский государственный технический университет.

Битимхан С. — доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений к.ф.-м.н., Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова.

Дженалиев М.Т. — директор ф.-м.ғ.д., профессор, ҚР БҒМ Математика институты, Алматы.

Жакупбекова А.Ж. — магистрант 2-го года обучения кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений, Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова.

Жетпісов Қ. — Т.Ғ.Мұстафин атындағы алгебра, геометрия және математикалық логика кафедрасының меңг. ф.-м.ғ.к., Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті.

Зяблов И.Н. — магистрант 2-го года обучения кафедры механики, Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова.

Искаков С.А. — ст. преподаватель кафедры методики преподавания математики и информатики, Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова.

Кошкарова Б.С. — зав. кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений к.ф.-м.н., Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова.

Қауымбек И.С. — математика және информатиканы оқыту әдістемесі кафедрасының оқытушысы, Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті.

Құсайынова Б.С. — математикалық талдау және дифференциалды теңдеулер кафедрасының 2-курс магистранты, Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті.

Махашев С.Т. — доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений к.ф.-м.н., Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова.

Орумбаева Н.Т. — ст. преподаватель кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений к.ф.-м.н., Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова.

Серікбаева А.Б. — қолданбалы математика және информатика кафедрасының аға оқытушысы, Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті.

Смагулов Д.З. — магистрант 2-го года обучения кафедры прикладной математики и информатики, Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова.

Тлеулесова А.Б. — ст. преподаватель к.ф.-м.н., Жезказганский университет им. О.А.Байконурова.

Турсунов К.А. —зав. кафедрой механики д.т.н., профессор, Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова.

Шалдықова Б.А. — жоғары математика кафедрасының аға оқытушысы, Рудный индустриалдық институты.