

**ҚАРАҒАНДЫ
УНИВЕРСИТЕТІНІҢ
ХАБАРШЫСЫ
ВЕСТНИК**

**КАРАГАНДИНСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

ISSN 0142-0843

МАТЕМАТИКА сериясы
№ 3(63)/2011
Серия **МАТЕМАТИКА**

Шілде–тамыз–қыркүйек
1996 жылдан бастап шығады
Жылына 4 рет шығады

Июль–август–сентябрь
Издается с 1996 года
Выходит 4 раза в год

Собственник РГКП **Карагандинский государственный университет
имени Е.А.Букетова**

Бас редакторы — Главный редактор

Е.К.КУБЕЕВ,

академик МАН ВШ, д-р юрид. наук, профессор

Зам. главного редактора Х.Б.Омаров, д-р техн. наук
Ответственный секретарь Г.Ю.Аманбаева, д-р филол. наук

Серияның редакция алқасы — Редакционная коллегия серии

М.И.Рамазанов,	научный редактор д-р физ.-мат. наук, проф.;
М.Отелбаев,	акад. НАН РК, д-р физ.-мат. наук, проф.;
Б.Р.Ракишев,	акад. НАН РК, д-р техн. наук, проф.;
З.Б.Беркалиев,	PhD, профессор (США);
А.А.Шкаликов,	д-р физ.-мат. наук, проф. (Россия);
Н.А.Бокаев,	д-р физ.-мат. наук, проф.;
М.Т.Дженалиев,	д-р физ.-мат. наук, проф.;
К.Т.Искаков,	д-р физ.-мат. наук, проф.;
Л.К.Кусаинова,	д-р физ.-мат. наук, проф.;
Е.Д.Нурсултанов,	д-р физ.-мат. наук, проф.;
Е.С.Смаилов,	д-р физ.-мат. наук, проф.;
К.А.Турсунов,	д-р техн. наук, проф.;
У.У.Умербаев,	д-р физ.-мат. наук, проф.;
Н.Т.Орумбаева,	отв. секретарь канд. физ.-мат. наук

Адрес редакции: 100028, г. Караганда, ул. Университетская, 28
Тел.: 77-03-69 (внутр. 1026); факс: (7212) 77-03-84.
E-mail: vestnick_kargu@ksu.kz. Сайт: <http://www.ksu.kz>

Редакторы *Ж.Т.Нұрмұханова*
Редактор *И.Д.Рожнова*
Техн. редактор *Д.Н.Муртазина*

Издательство Карагандинского
государственного университета
им. Е.А.Букетова
100012, г. Караганда,
ул. Гоголя, 38,
тел.: (7212) 51-38-20
e-mail: izd_kargu@mail.ru

Басуға 22.09.2011 ж. қол қойылды.
Пішімі 60×84 1/8.
Офсеттік қағазы.
Көлемі 8,62 б.т.
Таралымы 300 дана.
Бағасы келісім бойынша.
Тапсырыс № 658.

Подписано в печать 22.09.2011 г.
Формат 60×84 1/8.
Бумага офсетная.
Объем 8,62 п.л. Тираж 300 экз.
Цена договорная. Заказ № 658.

Отпечатано в типографии
издательства КарГУ
им. Е.А.Букетова

© Карагандинский государственный университет, 2011

Зарегистрирован Министерством культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан.
Регистрационное свидетельство № 1131–Ж от 10.03.2000 г.

МАЗМҰНЫ

МАТЕМАТИКА

<i>Ақыш А.Ш.</i> Навье-Стокс теңдеулері теориясындағы бір лемма жөнінде	3
<i>Әлимагамбетова А.З.</i> Екінші ретті жартылай сызықты айырымдық теңдеудің абсолютті тербелімсіздік критерийлері	8
<i>Ахажанов Т.Б., Бокаев Н.Ә.</i> P -шектелген вариациясы бар көп айнымалы функциялардың Хаар көпмүшеліктері арқылы жуықталуының тура және кері теоремалары жайлы	11
<i>Ыбыраев Ш.Ш.</i> Оң сипаттамалы өрістігі $SO_7(k)$ үшін жай модульдердің екінші когомология группалары	17
<i>Искендерова Д.А.</i> Жылуөткізгіш тұтқыр газ теңдеуінің шешімі	23
<i>Каренов Р.С.</i> Кен кәсіпорындағы іргелес өндірістік жүйелердің өзара ықпалдасуын зерттеуде жаппай қызмет көрсету ілімі тәсілдерінің қолданылуы	29
<i>Құдайбергенов С.С., Сабитова С.Г.</i> Коробов класында Пуассон теңдеуінің шешімін қалыпқа келтіру	37
<i>Ниханбаева Н.Т.</i> Жай дифференциалдық теңдеулерді MathCad құралдарымен шешу	45
<i>Омаров А.М., Есендаулетова Ж.Т.</i> Жүктерді тасымалдау маршруты есебінің тиімді жоспарлануы	49
<i>Омаров А.М., Есендаулетова Ж.Т.</i> Итерациялық әдістің негізінде рационалды маршрутты табу	54
<i>Солдатов А.П., Рамазанов М.И., Шалдықова Б.А.</i> Спектралды жүктелген параболалық операторына қойылған шекаралық есеп туралы II ...	59
<i>Өксікбаев К.Б.</i> Тік асимптотасы бар дифференциалдық теңдеулердің жуықталған шешімі	65
АВТОРЛАР ТУРАЛЫ МӘЛІМЕТТЕР	69

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>Ақыш А.Ш.</i> Об одной лемме в теории уравнений Навье-Стокса	3
<i>Алимагамбетова А.З.</i> Критерии абсолютной неосцилляторности полулинейного разностного уравнения второго порядка	8
<i>Ахажанов Т.Б., Бокаев Н.А.</i> О прямых и обратных теоремах приближений функций многих переменных ограниченной P -вариации полиномами Хаара	11
<i>Ибраев Ш.Ш.</i> Вторые группы когомологий простых моделей над $SO_7(k)$ в положительной характеристике	17
<i>Искендерова Д.А.</i> Разрешимость вырождающихся уравнений вязкого теплопроводного газа	23
<i>Каренов Р.С.</i> Применение методов теории массового обслуживания при исследовании взаимодействия смежных производственных подсистем на горнодобывающих предприятиях	29
<i>Қудайбергенов С.С., Сабитова С.Г.</i> Восстановление решения уравнения Пуассона на классе Коробова	37
<i>Ниханбаева Н.Т.</i> Решение обыкновенных дифференциальных уравнений средствами MathCad	45
<i>Омаров А.М., Есендаулетова Ж.Т.</i> Оптимальное планирование задачи маршрутизации перевозок грузов	49
<i>Омаров А.М., Есендаулетова Ж.Т.</i> Нахождение рационального маршрута на основе итерационного метода	54
<i>Солдатов А.П., Рамазанов М.И., Шалдықова Б.А.</i> О граничной задаче для спектральнонагруженного параболического оператора II ...	59
<i>Uxikbayev K.B.</i> Approximated solution of differential equations with vertical asymptotes	65
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	69

УДК 517.9

А.Ш.Акыш

Институт математики МОН РК, Алматы (E-mail: akysh41@gmail.com)

Об одной лемме в теории уравнений Навье-Стокса

В настоящей работе рассмотрено нелинейное уравнение параболического типа для плотности кинетической энергии, выведенное из уравнений Навье-Стокса (УНС). Доказана одна лемма для выявления экстремальных свойств решения. Представлено дополнение к предыдущим работам автора по исследованию математической теории в проблемах принципа максимума для УНС.

Ключевые слова: плотность, кинетическая энергия, уравнения Навье-Стокса, принцип максимума, локальный экстремум, цилиндрическая область.

Постановка задачи. Современное состояние математической теории уравнений Навье-Стокса содержится, например, в [1] и др.

В настоящей работе для нелинейного уравнения параболического типа для плотности кинетической энергии, выведенного из уравнений Навье-Стокса (УНС), доказана одна лемма, для выявления экстремальных свойств решений. Эта заметка является некоторым дополнением к предыдущим работам автора [2–4] и др. по исследованию математической теории в проблемах принципа максимума для УНС.

Рассмотрим начально-краевую задачу для УНС [1] относительно вектора скорости $U = (U_1, U_2, U_3)$ и давления P в области $Q = (0, T] \times \Omega$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \mu \Delta U + (U, \nabla)U + \nabla P = f(t, x); \quad (1 \text{ a})$$

$$\operatorname{div} U = 0; \quad (1 \text{ b})$$

$$U(0, x) = \Phi(x); \quad (1 \text{ c})$$

$$U(t, x)|_{\partial\Omega} = 0; \quad x \in \partial\Omega, \quad (1 \text{ d})$$

где $x \in \Omega \subset R_3$; Ω — выпуклая область, заполненная однородной жидкостью, а $\partial\Omega$ — граница области Ω ; $t \in [0, T]$; $T < \infty$; $0 < \mu$ — динамический коэффициент вязкости; Δ , ∇ — операторы Лапласа и Гамильтона соответственно. $J^0(\Omega)$ — пространство соленоидальных векторов; $W_{2,0}^1(\Omega)$ — соболевское пространство функций, равное нулю на $\partial\Omega$; f и Φ — векторы функций, соответственно внешних сил и начальных данных, удовлетворяющие следующим требованиям:

$$\text{i) } f(t, x) \in C(\bar{Q}) \cap J^0(Q); \text{ ii) } \Phi(x) \in C(\bar{\Omega}) \cap W_{2,0}^1(\Omega) \cap J^0(\Omega). \quad (2)$$

О леммах для принципа максимума. Приведем необходимые сведения из работы [2]. В векторном уравнении (1a) положим $f = 0$ и умножим на вектор скорости U , а затем, воспользовавшись формулой

$$\Delta E = (\Delta U, U) + \sum_{\alpha=1}^3 |\nabla U_\alpha|^2, \quad \text{получаем нелинейное уравнение параболического типа для плотности}$$

$$\text{кинетической энергии (к.э.) } E = \frac{1}{2}(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2):$$

$$NE \equiv \frac{\partial E}{\partial t} - \mu \Delta E + (\nabla E, U) + \mu \sum_{\alpha=1}^3 |\nabla U_{\alpha}|^2 + (\nabla P, U) = 0, \quad (3)$$

где $|U|$ — модуль вектора скорости; $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение векторов.

Теорема 1 [2]. Пусть $\bar{Q} = [0, T] \times \bar{\Omega}$ — цилиндрическая область с границей $[0, T] \times \partial\Omega$ в пространстве переменных t, x и функции $(U, E) \in C(\bar{Q}) \cap C^2(Q) \wedge P \in C^1(Q)$ удовлетворяют уравнениям (1 а), (3). Тогда функция $E(t, x)$ принимает свой максимум в цилиндре $\bar{Q}$ на нижнем основании $\{0\} \times \bar{\Omega}$ или на его боковой поверхности $[0, T] \times \partial\Omega$, т.е.

$$E(t, x) \leq \max \left\{ \sup_{t=0 \wedge x \in \bar{\Omega}} E(t, x), \sup_{t \in [0, T] \wedge x \in \partial\Omega} E(t, x) \right\} = C - \text{const}. \quad (4)$$

Определение 1. Будем говорить, что вектор скорости $U(t, x)$ имеет в точке $M_1(t, x)$ области Q экстремум, если каждая компонента вектора скорости $U_{\alpha}(t, x)$, $\alpha = 1, 2, 3$, в этой же точке M_1 достигает локального экстремума (либо локального максимума, либо локального минимума).

Для доказательства теоремы 1 нам нужны некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Скалярное произведение вектора скорости U и его производной $\frac{\partial U}{\partial x_{\beta}}$, направленной по вектору U , порождает производную от плотности кинетической энергии, т.е.

$$\frac{\partial E}{\partial x_{\beta}} = \left(U, \frac{\partial U}{\partial x_{\beta}} \right); \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial x_{\beta}} = |U| \left| \frac{\partial U}{\partial x_{\beta}} \right| \cos \gamma, \text{ причем } \cos \gamma \neq 0, \forall x \in \Omega, \beta = \overline{1, 3}. \quad (5)$$

Доказательство. Вектор U , следуя [5], представим в виде $U = |U|e$, где $e(x)$ — единичный вектор. Отсюда, дифференцируя по x_{β} , найдем:

$$\frac{\partial U}{\partial x_{\beta}} = \frac{\partial |U|}{\partial x_{\beta}} e + |U| \frac{\partial e}{\partial x_{\beta}}. \quad (6)$$

В результате получили разложение производной вектора U на две составляющие, из которых первая направлена по вектору U , а вторая — по перпендикуляру к U .

Разложение (6), умножив скалярно на U , запишем:

$$\left(U, \frac{\partial U}{\partial x_{\beta}} \right) = \left(|U|e, \frac{\partial |U|}{\partial x_{\beta}} e \right) + \left(|U|e, |U| \frac{\partial e}{\partial x_{\beta}} \right), \quad \forall x \in \Omega,$$

или

$$\left(U, \frac{\partial U}{\partial x_{\beta}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial |U|^2}{\partial x_{\beta}} (e, e) + |U|^2 \left(e, \frac{\partial e}{\partial x_{\beta}} \right), \quad \forall x \in \Omega,$$

из которого выпадает перпендикулярная часть вектора $\frac{\partial U}{\partial x_{\beta}}$ к U (второе слагаемое в правой части), вследствие чего имеем цепочку равенств

$$\left(U, \frac{\partial U}{\partial x_{\beta}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial |U|^2}{\partial x_{\beta}} = \frac{\partial E}{\partial x_{\beta}}, \quad \beta = \overline{1, 3}; \quad \forall x \in \Omega.$$

Приходим к выводу, что, когда вектор меняется как по длине, так и по направлению, из скалярного произведения выпадает перпендикулярное дополнение к производной $\frac{\partial U}{\partial x_{\beta}}$, тем самым

$$\cos \left(U, \frac{\partial U}{\partial x_{\beta}} \right) \neq 0, \quad \forall x \in \Omega. \text{ Лемма 1 доказана.}$$

Лемма 2 [2]. Пусть плотность к. э. $E(t, x)$ в некоторой точке $M_1(t, x)$ области $Q = [0, T] \times \bar{\Omega}$ достигает своего максимума, тогда точка M_1 является стационарной точкой вектора скорости U и функции давления P , т.е.

$$\nabla U_\alpha(M_1) = 0, \quad \alpha = \overline{1, 3}; \quad \nabla P(M_1) = 0, \quad (7)$$

и U в точке M_1 достигает локального экстремума. Причем, по крайней мере, в этой же точке M_1 одна из компонент вектора скорости U достигает либо положительного максимума, либо отрицательного минимума, а остальные — отрицательного максимума (положительного минимума).

Доказательство. Разложим сложную функцию $E(U_1, U_2, U_3) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 U_\alpha^2(t, x)$ в окрестности точки $M_1(t, x)$ по формуле Тейлора и в записях временно опускаем t . Мы получим при этом, что

$$\Delta E \equiv E(t, x + dx) - E(M_1) = dE|_{M_1} + \frac{1}{2!} d^2 E|_{M_1} + o(|dx|^2),$$

где символ $o(|dx|^2)$ означает бесконечно малую функцию более высокого порядка малости, чем $|dx|^2$. В предыдущую формулу подставим выражения $dE, d^2 E$ вычисленных дифференциалов. Следуя [6] и отбрасывая малую величину, получаем:

$$\Delta E = \sum_{\alpha=1}^3 U_\alpha \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} dx_\beta \Big|_{M_1} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 U_\alpha \left[\sum_{\beta=1}^3 \sum_{\gamma=1}^3 \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} dx_\beta dx_\gamma + \left(\sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} dx_\beta \right)^2 \right] \Big|_{M_1}. \quad (8)$$

По условию леммы в точке M_1 функция E имеет локальный максимум. Тогда выполняются необходимое и достаточное условия локального экстремума $dE|_{M_1} = 0$ и $d^2 E|_{M_1} < 0$, т.е. в точке M_1 первый дифференциал функции E равен нулю, а второй является отрицательным.

Рассмотрим слагаемые из (8):

$$dE = \sum_{\alpha=1}^3 U_\alpha \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} dx_\beta \Big|_{M_1} = 0, \quad S = \left(\sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} dx_\beta \right)^2. \quad (9)$$

Меняя местами суммы в первом дифференциале из (9), перепишем:

$$\sum_{\beta=1}^3 \sum_{\alpha=1}^3 U_\alpha \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} dx_\beta \Big|_{M_1} = 0.$$

Откуда, в силу произвольности дифференциалов независимых переменных dx_β , получим

$$\sum_{\alpha=1}^3 U_\alpha \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} \Big|_{M_1} = 0, \quad \beta = \overline{1, 3}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{\partial E}{\partial x_\beta} \Big|_{M_1} = \left(U, \frac{\partial U}{\partial x_\beta} \right) \Big|_{M_1} = 0, \quad \beta = \overline{1, 3}. \quad (10)$$

Далее, замечая, что соотношение (5) в точке M_1 совпадает с условиями (10), запишем:

$$\frac{\partial E}{\partial x_\beta}(M_1) = |U(M_1)| \left| \frac{\partial U}{\partial x_\beta}(M_1) \right| \cos \gamma = 0, \quad \beta = \overline{1, 3}, \quad (11)$$

где γ — угол между векторами $U(M_1)$ и $\frac{\partial U}{\partial x_\beta}(M_1)$. Из (11) заключаем, что $|U(M_1)| \neq 0$, так как E имеет в точке M_1 локальный максимум, и $\cos \gamma \neq 0$ на основании леммы 1.

Отсюда следует, что $\frac{\partial E}{\partial x_\beta}(M_1) = 0$ тогда и только тогда, когда $\left| \frac{\partial U}{\partial x_\beta}(M_1) \right| = 0$. В результате из (11) получим цепочку

$$\sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}(M_1) \right)^2 = 0; \quad \beta = \overline{1,3}; \quad \Rightarrow \quad \nabla U_\alpha(M_1) = 0, \quad \alpha = \overline{1,3}. \quad (12)$$

Первая часть леммы доказана. Тем самым показали, что стационарные точки функции $E(U)$ совпадают со стационарными точками компонентов скорости U . Однако этого результата недостаточно для утверждения того, что, по крайней мере, одна компонента скорости в этой точке должна достигать локального экстремума. В связи с этим ранее в работе [2] доказана вторая часть леммы.

Замечание 1. Нетрудно заметить, что из (12) следует $S|_{M_1} = 0$ (9). И справедливо обратное утверждение, что из $S(M_1) = 0 \Rightarrow dE|_{M_1} = 0$. Откуда вытекает их эквивалентность.

В самом деле, для выполнения достаточного условия локального экстремума $d^2 E(M_1) < 0$ необходимым является

$$S = \left(\sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} dx_\beta \right)^2 \Big|_{M_1} = 0, \quad \alpha = \overline{1,3}. \quad (13)$$

Отсюда следует:

$$\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_3} dx_3 \Big|_{M_1} = 0.$$

Из него, в силу произвольности дифференциалов независимых переменных dx_β , получаем $\nabla U_\alpha(M_1) = 0, \quad \alpha = \overline{1,3}$, что подтверждает правильность доказательства леммы, приведенной в [4].

Доказательство теоремы 1. Для этого воспользуемся известным приемом [7; 511]. Будем исходить от противного, т.е. функция $E(t, x)$ достигает своего максимального значения в некоторой точке $M_0(t^0, x^0)$ внутри области $\overline{Q} = [0, T] \times \overline{\Omega}$

$$E(M_0) > \max \left\{ \sup_{t=0 \wedge x \in \overline{\Omega}} E(t, x); \sup_{t \in [0, T] \wedge x \in \partial\Omega} E(t, x) \right\} = C \geq 0. \quad (14)$$

Обозначим $m = E(t^0, x^0) - C > 0$ и введем функцию $H(t, x) = E(t, x) + \frac{m}{2} \left(1 - \frac{t}{T} \right)$. Функция $H(t, x)$ также принимает свое максимальное значение в некоторой точке $M_1 \in Q$, причем

$$H(M_1) \geq H(M_0) \geq m.$$

Теперь, используя результаты леммы 1 и леммы 2 [2], выпишем все необходимые условия максимума функции H в точке M_1 :

$$\frac{\partial H}{\partial t} \geq 0; \quad \Delta H \leq 0: \quad \Rightarrow \quad \{ \nabla H = 0; \quad \nabla U_\alpha = 0, \quad \alpha = \overline{1,3}; \quad \nabla P = 0 \}. \quad (15)$$

Из уравнения (3), с учетом условий (15), найдем для точки M_1 цепь неравенств

$$NH \equiv \frac{\partial H}{\partial t} - \mu \Delta H + (\nabla H, U) + \mu \sum_{\alpha=1}^3 |\nabla U_\alpha|^2 + (\nabla P, U) + \frac{m}{2T} \geq \frac{m}{2T} > 0.$$

Это означает, что неравенство (14) неверно. Следовательно, справедливо (4). Теорема 1 доказана.

Теорема 1 и лемма 2 из [2] позволяют сформулировать следующий принцип максимума для уравнений (1a):

Следствие 1. Пусть $\overline{Q} = [0, T] \times \overline{\Omega}$ — цилиндрическая область в пространстве переменных t, x с границей $[0, T] \times \partial\Omega$ и функции $U \in C(\overline{Q}) \cap C^2(Q) \wedge P \in C^1(Q)$ удовлетворяют уравнениям (1a). Тогда вектор-функция U достигает локального экстремума в цилиндре $\overline{Q}$ на нижнем основании

$\{0\} \times \bar{Q}$ или на его боковой поверхности $[0, T] \times \partial\Omega$ и, по крайней мере, одна из функций U_α достигает либо положительного максимума, либо отрицательного минимума, т.е.

$$U_\alpha(t, x) \leq \max \left\{ \sup_{t=0 \wedge x \in \bar{\Omega}} U_\alpha(t, x); \sup_{t \in [0, T] \wedge x \in \partial\Omega} U_\alpha(t, x) \right\}; \quad (t, x) \in \bar{Q}; \quad (16 \text{ a})$$

$$(U_\alpha(t, x) \geq \min \left\{ \inf_{t=0 \wedge x \in \bar{\Omega}} U_\alpha(t, x); \inf_{t \in [0, T] \wedge x \in \partial\Omega} U_\alpha(t, x) \right\}); \quad (t, x) \in \bar{Q}); \quad \alpha = \overline{1, 3}. \quad (16 \text{ b})$$

Доказательство следует из теоремы 1 и леммы 2, так как лемму 2 доказали, исходя из выполнения необходимого и достаточного условий локального максимума функции E , а потому верно и обратное. Откуда имеем (16а, в). Отсюда, следуя [7; 513], нетрудно получить доказательство следующего утверждения:

Следствие 2. Если векторы функций f, Φ удовлетворяют условиям **i)** и **ii)**, то для решений $U(t, x)$ задачи (1) справедлива оценка

$$\|U\|_{C(\bar{Q})} \leq \|\Phi\|_{C(\bar{\Omega})} + T \|f\|_{C(\bar{Q})} \equiv A_1, \forall T < \infty, \text{ где } \|U\|_{C(\bar{Q})} = \max_{1 \leq \alpha \leq 3} \sup_{\bar{Q}} |U_\alpha(t, x)|.$$

References

- 1 Ladyzenskaja O.A. Mathematical problems of dynamics viscous incompressible fluids. — M.: Science, 1970. — 288 p.
- 2 Akysheva A.Sh. New the properties of Navier-Stokes equations // Vestnik of KarSU. — 2010. — № 4 (60). — P. 16–24.
- 3 Akysheva A.Sh. About problem of theory of Navier-Stokes equations // Works of 6th conference of Russian-Kazakh working group of computing and informational technologies (16–18 March 2009). — Almaty: Kasakh University, 2009. — P. 54–61.
- 4 Akysheva A.Sh. About lemm of mathematical theory of the Navier-Stokes equations // Materials III of International scientific conference «Actual problems of mechanics and buildingmashine». — Almaty, 2009. — Vol. 3. — P. 209–213.
- 5 Kochin N.E. Vector Calculus and the beginning of the tensor calculus. — M.: Science, 1965. — 426 p.
- 6 Ilyin V.A., Sadovnichii V.A., Sendov Bl.H. Mathematical analysis. — M.: Science, 1979. — 719 p.
- 7 Vladimirov V.S. The equations of mathematical physics. — M.: Science, 1981. — 612 p.

А.Ш.АҚЫШ

Навье-Стокс теңдеулері теориясындағы бір лемма жөнінде

Мақалада Навье-Стокс теңдеулерінен (НСТ) кинетикалық энергияның тығыздығы үшін алынған бейсызықты параболалық теңдеу шешімінің экстремалдық қасиеттерін айқындайтын лемма дәлелденген. Бұл мақала — автордың бұрынғы жұмыстарын, яғни, NST теңдеулеріне максимум принципі мәселелерінің математикалық теориясын зерттеуді толықтыратын шағын қосымша.

A.Sh.Akysheva

About lemm of theory of the Navier-Stokes equations

In the work for the nonlinear equation of parabolic type for density of kinetic energy deduced from the Navier-Stokes Equations (NSE) one lemma is proved for revealing of extreme properties of the solution. The note is some addition of the previous works of the author on research of the mathematical theory in problems of a principle maximum for NSE.

Критерии абсолютной неосцилляторности полулинейного разностного уравнения второго порядка

Для полулинейного разностного уравнения второго порядка с положительными коэффициентами, удовлетворяющими определенным условиям, на основании условий неосцилляторности установлены критерии абсолютной неосцилляторности. Показано, что результаты теоремы об абсолютной неосцилляторности являются новыми даже для линейного разностного уравнения второго порядка.

Ключевые слова: полулинейное разностное уравнение второго порядка, дифференциальное уравнение, уравнение Штурма-Лиувилля, осцилляторность.

Рассмотрим полулинейное разностное уравнение второго порядка

$$\Delta(a_k |\Delta x_k|^{p-2} \Delta x_k) + \lambda b_{k+1} |x_{k+1}|^{p-2} x_{k+1} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

где $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $1 < p < \infty$. Относительно коэффициентов уравнения (1) предполагаем, что $a = \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $b = \{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательности действительных чисел.

Уравнение (1) при $p = 2$ имеет вид

$$\Delta(a_k \Delta x_k) + \lambda b_{k+1} x_{k+1} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) соответственно являются дискретными аналогами полулинейного дифференциального уравнения второго порядка

$$(a(t) |x'(t)|^{p-2} x'(t))' + \lambda b(t) |x(t)|^{p-2} x(t) = 0 \quad (3)$$

и уравнения Штурма-Лиувилля

$$(a(t) x'(t))' + \lambda b(t) x(t) = 0. \quad (4)$$

Изучение качественной теории линейного уравнения (4), в частности, вопросы осцилляторности и неосцилляторности его решения, начатое в фундаментальной работе Штурма в 1836 г., получило продолжение в настоящее время [1].

Рассмотрим основные понятия и определения, связанные с уравнением (1).

Определение. Последовательность действительных чисел $x = \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ называется решением уравнения (1), если она удовлетворяет уравнению (1) при всех $k = 0, 1, \dots$

Пусть N — множество натуральных чисел и $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Определение. Говорят, что интервал $(m, m+1]$, $m \in N$, содержит обобщенный нуль решения $x = \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ уравнения (1), если $x_m \neq 0$ и $a_m x_m x_{m+1} \leq 0$.

Определение. Нетривиальное решение уравнения (1) называется осцилляторным, если оно имеет бесконечно много обобщенных нулей на дискретном интервале $[n, \infty)$, $n \in N$, в противном случае решение уравнения (1) называется неосцилляторным.

Определение. Если уравнение (1) является осцилляторным (неосцилляторным) при всех $\lambda > 0$, то уравнение (1) называется осцилляторным (неосцилляторным).

При $\lambda = 1$ уравнение (1) имеет вид

$$\Delta(a_k |\Delta x_k|^{p-2} \Delta x_k) + b_{k+1} |x_{k+1}|^{p-2} x_{k+1} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

Предположим, что коэффициенты a_k уравнения (5) удовлетворяют условию $a_k > 0$, $k = 0, 1, \dots$, тогда имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{1-p'} = \infty. \quad (6)$$

Введем следующие обозначения для уравнения (5):

$$\begin{aligned}
 B_1(m) &\equiv B_1(m, a, b) = \sup_{n \geq m} \left(\sum_{k=m}^n a_k^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} b_{k+1} \right)^{\frac{1}{p}}; \\
 B_2(m) &\equiv B_2(m, a, b) = \sup_{n \geq m} \left(\sum_{k=m}^n a_k^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=m}^n b_{k+1} \left(\sum_{i=m}^k a_i^{1-p'} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}; \\
 B_3(m) &\equiv B_3(m, a, b) = \sup_{n \geq m} \left(\sum_{k=n}^{\infty} b_{k+1} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k^{1-p'} \left(\sum_{i=k}^{\infty} b_{i+1} \right)^{p'} \right)^{\frac{1}{p}}; \\
 B_i &\equiv B_i(a, b) = B_i(0), \quad i = 1, 2, 3, \\
 k_1(p) &= \left(\frac{1}{p} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}, \quad k_2(p) = \frac{1}{p'}, \quad k_3(p) = \frac{1}{p}, \\
 K_1(p) &= 1, \quad K_2(p) = (p)^{\frac{1}{p}}, \quad K_3(p) = (p')^{\frac{1}{p'}}.
 \end{aligned}$$

Наряду с уравнением (5) рассмотрим уравнение

$$\Delta \left(b_{k+1}^{1-p'} |\Delta x_k|^{p'-2} \Delta x_k \right) + a_{k+1}^{1-p'} |x_{k+1}|^{p'-2} x_{k+1} = 0, \quad k \geq 0, \quad (5')$$

где $b_{k+1} > 0, a_{k+1} > 0$ при всех $k \geq 0$ и $1 < p' < \infty$. Для уравнения (5') выражения $B_i(m), i = 1, 2, 3$, соответственно будут

$$\begin{aligned}
 B'_1(m) &= \sup_{n \geq m} \left(\sum_{k=m}^n b_k \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}}; \\
 B'_2(m) &= \sup_{n \geq m} \left(\sum_{k=m}^n b_k \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=m}^n a_k^{1-p'} \left(\sum_{i=m}^k b_i \right)^{p'} \right)^{\frac{1}{p}}; \\
 B'_3(m) &= \sup_{n \geq m} \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} b_k \left(\sum_{i=k}^{\infty} a_i^{1-p'} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}};
 \end{aligned}$$

а $K_i(p), k_i(p), i = 1, 2, 3$, соответственно имеют вид:

$$\begin{aligned}
 k'_1(p') &= \left(\frac{1}{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{1}{p} \right)^{\frac{1}{p}}; \quad k'_2(p') = \frac{1}{p}; \quad k'_3(p') = \frac{1}{p'}; \\
 K'_1(p') &= 1; \quad K'_2(p') = (p')^{\frac{1}{p'}}; \quad K'_3(p') = (p)^{\frac{1}{p}}.
 \end{aligned}$$

Условие (6) переходит к условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \infty. \quad (7)$$

Теорема 1 [2]. Пусть $1 < p < \infty, a_k > 0, b_k > 0$ при всех $k \geq 1$. Если выполнено условие (6), то выполнение условий $\lim_{m \rightarrow \infty} B_i(m) \leq K_i(p)$ при всех $i = 1, 2, 3$ необходимо, а выполнение условий $\lim_{m \rightarrow \infty} B_i(m) < k_i(p)$, по крайней мере, при одном из значений $i = 1, 2, 3$ достаточно для неосцилляторности уравнений (5) и (5'). Если выполнено условие (7), то выполнение условий $\lim_{m \rightarrow \infty} B'_i(m) \leq K'_i(p')$ при всех $i = 1, 2, 3$ необходимо, а выполнение условий $\lim_{m \rightarrow \infty} B'_i(m) < k'_i(p')$, по крайней мере, при одном из значений $i = 1, 2, 3$ достаточно для неосцилляторности уравнений (5) и (5').

Для уравнения (1) выражения $B_i(m)$ и $B'_i(m)$ имеют соответственно вид $\lambda B_i(m), \lambda B'_i(m)$, где $B_i(m), B'_i(m)$ выше определены для уравнения (5) и (5') при $\lambda = 1$.

Теорема 2. Пусть $1 < p < \infty$; $a_k > 0$; $b_k > 0$, $k = 0, 1, \dots$. Если выполнено условие (6), то выполнение условий $\lim_{m \rightarrow \infty} B_i(m) = 0$, по крайней мере, при одном из значений $i = 1, 2, 3$ является необходимым и достаточным условием для абсолютной неосцилляторности уравнения (1). Если выполнено условие (7), то выполнение условий $\lim_{m \rightarrow \infty} B_i'(m) = 0$, по крайней мере, при одном из значений $i = 1, 2, 3$ является необходимым и достаточным условием для абсолютной неосцилляторности уравнения (1).

References

- 1 Hartman Ph. Ordinary differential equations. — М.: World, 1970. — 720 p.
- 2 Alimagambetova A.Z., Oinarov R. Oscillation and nonoscillation criterions of half-linear difference equation // Mathematical journal. — 2007. — Vol. 7 — № 1. — P. 15–24.

А.З.Әлимағамбетова

Екінші ретті жартылай сызықты айырымдық тендеудің абсолютті тербелімсіздік критерийлері

Кейбір шарттарды қанағаттандыратын оң коэффициенттері бар жартылай сызықты екінші ретті айырымдық тендеу үшін тербелімсіздік шарт негізінде тендеудің абсолютті тербелімсіздік критерийі орнатылды. Ол нәтижелер екінші ретті сызықты айырымдық тендеулер үшін де жаңа болып табылады.

A.Z.Alimagambetova

Absolute nonoscillation criterion of half-linear second order difference equation

Criteria of absolute nonoscillation based on the conditions of Nonoscillation are established for a semilinear difference equation of second order with positive coefficients, which satisfy certain conditions. The results of the theorem about the absolute nonoscillation are new results for linear difference equation of the second order.

О прямых и обратных теоремах приближений функций многих переменных ограниченной P -вариации полиномами Хаара

В данной работе введено понятие вариационного модуля непрерывности для функций многих переменных ограниченной P -вариации. Представлено доказательство прямых и обратных теорем приближения функций многих переменных ограниченной P -вариации полиномами Хаара по норме рассматриваемого пространства. Установлены оценки наилучшего приближения через вариационный модуль непрерывности и оценка вариационного модуля непрерывности через наилучшие приближения. Для распространения этих результатов на кратные случаи в данной работе введены понятия вариационной суммы порядка p .

Ключевые слова: приближение функций, ограниченная p -вариация, полиномы Хаара, разбиение, системы Уолша, банахово пространство, норма.

В данной работе доказывается прямая и обратная теоремы приближения функций многих переменных ограниченной p -вариации полиномами Хаара.

Определение. Пусть функция $f(x_1, \dots, x_N)$ определена на множестве $[0, 1]^N$ и $\rho = \rho_1 \times \rho_2 \times \dots \times \rho_N$, где $\rho_j = \{0 = x_j^0 < x_j^1 < \dots < x_j^{s_j} = 1\}$, $s_j \geq 1$, $j = 1, \dots, N$ — произвольное разбиение множества $[0, 1]^N$. Вариационной суммой порядка p функции $f(x_1, \dots, x_N)$ по разбиению ρ назовем величину

$$\chi_p^p(f) = \left(\sum_{r_1=1}^{s_1} \dots \sum_{r_N=1}^{s_N} \left| \Delta_1(f; x_1^{r_1-1}, \dots, x_N^{r_N-1}; h_1^{r_1}, \dots, h_N^{r_N}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

где

$$\Delta_1(f; x_1, \dots, x_N; h_1, \dots, h_N) := \sum_{\eta_1=0}^1 \dots \sum_{\eta_N=0}^1 (-1)^{\eta_1 + \dots + \eta_N} f(x_1 + \eta_1 h_1, \dots, x_N + \eta_N h_N);$$

$$(x_1, \dots, x_N) \in [0, 1]^N \text{ и } h_1, \dots, h_N > 0;$$

$$h_j^{r_j} := x_j^{r_j} - x_j^{r_j-1}, \quad r_j = 1, 2, \dots, s_j, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Для функции одной переменной понятие вариационной суммы впервые ввел Винер [1], для функций двух переменных — Кларксон и С.Адамс [2].

Вариационным модулем непрерывности $\omega_{1-1/p}(f, \delta_1, \dots, \delta_N)$ порядка $1 - 1/p$ функции $f(x_1, \dots, x_N)$ называется величина

$$\omega_{1-1/p}(f, \delta_1, \dots, \delta_N) = \sup_{|\rho_j| \leq \delta_j} \chi_p^p(f),$$

где $|\rho_j| = \max_{1 \leq r_j \leq s_j} (x_j^{r_j} - x_j^{r_j-1})$. Будем говорить, что $f \in BV_p[0, 1]^N$, $1 \leq p < \infty$, если

$$V_p(f, [0, 1]^N) \equiv \omega_{1-1/p}(f, 1, \dots, 1) < \infty, \text{ и что } f \in C_p[0, 1]^N, \quad 1 < p < \infty, \text{ если } \lim_{\delta_j \rightarrow 0} \omega_{1-1/p}(f, \delta_1, \dots, \delta_N) = 0.$$

Свойства вариационного модуля непрерывности для функции одной переменной исследовали А.П.Терехины [3], С.С.Волосивец [4].

Пространства $BV_p[0, 1]^N$ и $C_p[0, 1]^N$ являются банаховыми с нормой

$$\|f\|_{BV_p} = \max \left\{ \sup_{(x_1, \dots, x_N) \in [0, 1]^N} |f(x_1, \dots, x_N)|, V_p(f, [0, 1]^N) \right\}.$$

Функции системы Хаара на $[0, 1]$ задаются так: $h_0(x) = 1$ при $x \in [0, 1]$; если

$$n = 2^k + j, \quad k \in P = N \cup \{0\}, \quad 0 \leq j < 2^k \text{ и } \Delta_j^{(k)} = \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k} \right),$$

то

$$h_n(x) = \begin{cases} 2^{k/2}, x \in \Delta_{2^j}^{(k+1)} \\ -2^{k/2}, x \in \Delta_{2^{j+1}}^{(k+1)} \\ 0, x \in [0,1] \setminus \Delta_j^{(k)} \end{cases}.$$

Пусть $\bar{x} = (x_1, \dots, x_N) \in [0,1]^N$, $\bar{n} = (n_1, \dots, n_N)$ — параметр суммирования; $n_i \in N$, $i = 1, \dots, N$, тогда кратную систему Уолша определим следующим образом:

$$h_{\bar{n}}(\bar{x}) = \prod_{i=1}^k h_{n_i}(x_i).$$

Через $E_n^h(f)_X$, соответственно, будем обозначать наилучшее приближение функции $f \in X[0,1]^N$ полиномами по системе Хаара порядка не выше $n_1 \times \dots \times n_N$ ($n_j \in N$) в метрике $X[0,1]^N$, где $X[0,1]^N = BC_p[0,1]^2$, $1 < p < \infty$, или $X[0,1]^N = BV_p[0,1]^N$, $1 \leq p < \infty$,

$$E_n^h(f)_X = \inf_{c_i} \left\| f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^{s_i} c_i h_i(\bar{x}) \right\|_X.$$

Через $S_n^h(f)$ обозначим частичную сумму ряда Фурье по системе Хаара функции f . Через $K_{\alpha, \beta, \dots, \gamma}$ обозначим положительные постоянные, зависящие от параметров $\alpha, \beta, \dots, \gamma$, вообще говоря, различные в разных формулах.

Основной целью данной работы является доказательство прямых и обратных теорем для приближения полиномами по системе Хаара функций, являющихся аналогом прямых и обратных теорем теории приближения функций $f \in C_p[0,1]^N$ по норме пространства $C_p[0,1]^N$.

Теорема 1. Пусть $f \in C_p[0,1]^N$, $1 < p < \infty$, тогда верны неравенства

$$E_n^h(f)_{BV_p} \leq K_p \omega_{1-\frac{1}{p}} \left(f, \frac{1}{n_1}, \dots, \frac{1}{n_N} \right). \quad (1)$$

Теорема 2. Пусть $f \in C_p[0,1]^N$, $1 < p < \infty$, тогда верны неравенства

$$\omega_{1-\frac{1}{p}} \left(f, \frac{1}{n_1}, \dots, \frac{1}{n_N} \right) \leq K_p E_n^h(f)_{BV_p}. \quad (2)$$

Для случая функций одной переменной подобные теоремы были доказаны в [4]. Мы докажем для двумерного случая. Для функции многих переменных доказывается аналогично. Для доказательства теорем нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть $f \in BV_p[0,1]^2$, $1 \leq p < \infty$, $\rho = \rho_1 \times \rho_2$ — такое разбиение множества, при котором $f(x, y) = 0$. Тогда

$$V_p(f, [0,1]^2) \leq K_p \omega_{1-\frac{1}{p}}(f, |\rho_1|, |\rho_2|).$$

Для случая функции одной переменной такое утверждение ранее доказано в [5]. Для функции двух переменных доказывается аналогично.

Лемма 2. Пусть $f \in BV_p[0,1]^2$, $1 \leq p < \infty$, $\nu, \dots, \mu \in N$ и $0 < \delta_1 < \delta_2 < 1$. Тогда верно неравенство

$$\omega_{1-\frac{1}{p}}(f, \nu\delta_1, \mu\delta_2) \leq (\nu\mu)^{1-\frac{1}{p}} \omega_{1-\frac{1}{p}}(f, \delta_1, \delta_2).$$

Доказательство. Пусть

$$\rho = \left\{ \rho = \{x_i : 0 \leq i \leq m\}, \rho_2 = \{y_j : 0 \leq j \leq n\} \right\}$$

— разбиение квадрата $[0,1]^2$ такое, что

$$|\rho_1| \leq \nu\delta_1, \quad |\rho_2| \leq \mu\delta_2.$$

Мы возьмем новое подразбиение квадрата $[0,1]^2$:

$$\rho' = \{(x'_i, y'_j)\}, \quad 0 \leq i \leq \nu m, \quad 0 \leq j \leq \mu n,$$

содержащее точки (x_i, y_j) и разбивающее отрезки $[x_{i-1}, x_i]$, $[y_{j-1}, y_j]$ на m и n равных частей соответственно. Тогда на основании неравенства Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |f(x_i, y_j) - f(x_{i-1}, y_j) - f(x_i, y_{j-1}) + f(x_{i-1}, y_{j-1})|^p \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^m \sum_{i'=\nu(i-1)+1}^{i\nu} \left(\sum_{j=1}^n \sum_{j'=\mu(j-1)+1}^{j\mu} |f(x'_i, y'_j) - f(x'_{i-1}, y'_j) - f(x'_i, y'_{j-1}) + f(x'_{i-1}, y'_{j-1})|^p \right) = \\ & = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i'=\nu(i-1)+1}^{i\nu} \sum_{j'=\mu(j-1)+1}^{j\mu} |f(x'_i, y'_j) - f(x'_{i-1}, y'_j) - f(x'_i, y'_{j-1}) + f(x'_{i-1}, y'_{j-1})|^p \right) \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i'=\nu(i-1)+1}^{i\nu} \sum_{j'=\mu(j-1)+1}^{j\mu} |f(x'_i, y'_j) - f(x'_{i-1}, y'_j) - f(x'_i, y'_{j-1}) + f(x'_{i-1}, y'_{j-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \times \\ & \times \left(\sum_{i'=\nu(i-1)+1}^{i\nu} \sum_{j'=\mu(j-1)+1}^{j\mu} |1|^{p'} \right)^{1-\frac{1}{p}} = (\nu\mu)^{p-1} \sum_{i'=\nu(i-1)+1}^{i\nu} \sum_{j'=\mu(j-1)+1}^{j\mu} |f(x'_i, y'_j) - f(x'_{i-1}, y'_j) - f(x'_i, y'_{j-1}) + f(x'_{i-1}, y'_{j-1})|^p. \end{aligned}$$

Отсюда, взяв супремум, получим требуемое неравенство. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Для частных сумм $S_{2^m, 2^n}(f)$, $m, n \in N$, ряда Фурье-Хаара или Уолша функций f имеет место формула

$$S_{2^m, 2^n}^h(f, x, y) = \frac{1}{2^{m+n}} \int_{\Delta_i^{(m)}} \int_{\Delta_j^{(n)}} f(t, u) dt du \quad \text{при } (x, y) \in \Delta_i^{(m)} \times \Delta_j^{(n)}. \quad (3)$$

Для функций одной переменной доказательства указанных равенств имеются в [5; 45]. Для случая функций двух переменных доказывается аналогично.

Лемма 4. Любая функция $f(x, y)$, постоянная на каждом прямоугольнике

$$\Delta_{m,n}^{k,l} = \Delta_m^{(k)} \times \Delta_n^{(l)}, \quad 0 \leq m \leq 2^k, \quad 0 \leq l \leq 2^n,$$

представима в виде полинома порядка не выше 2^{k+l} по системе Хаара.

В случае функций одной переменной такие равенства представлены в [5; 22, 23, 203, 204].

Через $K_{\alpha, \beta, \gamma}$ обозначим положительные постоянные, зависящие от параметров α, β, γ , вообще говоря, различные в разных формулах.

Лемма 5. Пусть $f \in C_p[0,1]^2$, $1 < p < \infty$, $m, n \in P$. Тогда имеет место неравенство

$$\|S_{2^m, 2^n}^h(f)\|_{BV_p} \leq \|f\|_{BV_p}.$$

Доказательство. Согласно лемме 3 частные суммы ряда Фурье $S_{2^m, 2^n}^h(f)$ вычисляются по формуле (3). Следовательно, любая вариационная сумма для $S_{2^m, 2^n}^h(f)$ совпадает с некоторой вариационной суммой для $f(x, y)$. Это следует из того, что для $f \in C_p[0,1]^2 \subset C[0,1]^2$ по теореме о среднем существуют

$$(x_i, y_j) \in \Delta_i^{(k)} \times \Delta_j^{(l)}$$

такие, что

$$2^{k+l} \int_{\Delta_i^{(k)}} \int_{\Delta_j^{(l)}} f(t, u) dt du = f(x_i, y_j).$$

Лемма доказана.

Следствие 1. Пусть $f \in C_p[0,1]^2$, $1 < p < \infty$, $m, n \in P$. Тогда

$$E_{2^m, 2^n}(f)_{BV_p} \leq \|f - S_{2^m, 2^n}(f)\|_{BV_p} \leq 2E_{2^m, 2^n}(f)_{BV_p}.$$

Доказательство. Пусть полином $P_{2^m, 2^n}(x, y) = P$ такой, что

$$E_{2^m, 2^n}(f)_{BV_p} = \|f - P\|_{BV_p}.$$

Используя равенство $S_{2^m, 2^n}(P) = P$ и лемму 5, получаем:

$$\begin{aligned} \|f - S_{2^m, 2^n}(f)\|_{BV_p} &= \|f - P_{2^m, 2^n} + P_{2^m, 2^n} - S_{2^m, 2^n}(f)\|_{BV_p} = \\ &= \|f - P_{2^m, 2^n} - S_{2^m, 2^n}(f - P_{2^m, 2^n})\|_{BV_p} \leq \\ &\leq \|f - P_{2^m, 2^n}\|_{BV_p} + \|S_{2^m, 2^n}(f - P_{2^m, 2^n})\|_{BV_p} \leq \\ &\leq 2\|f - P_{2^m, 2^n}\|_{BV_p} = 2E_{2^m, 2^n}(f)_{BV_p}. \end{aligned}$$

Левое неравенство непосредственно вытекает из определения наилучшего приближения.

Доказательство теоремы 1. Сначала рассмотрим разбиение $\rho = \rho_1 \times \rho_2$, где

$$\rho_1 = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = 1\}, \quad \rho_2 = \{0 = y_0 < y_1 < \dots < y_n = 1\},$$

и ступенчатую функцию $P(x, y)$, равную $f\left(\frac{2k+1}{2^{m+1}}; \frac{2l+1}{2^{n+1}}\right)$, на квадрате

$$\Delta_{m,n}^{(k,l)} = \Delta_m^{(k)} \times \Delta_n^{(l)}, \quad 0 \leq m \leq 2^k - 1, \quad 0 \leq n \leq 2^l - 1.$$

Согласно лемме 4, $P(x, y)$ является полиномом по системе Хаара порядка не выше $(2^m \times 2^n)$. Так как

$$|\rho_1| = \frac{1}{2^m}, \quad |\rho_2| = \frac{1}{2^n},$$

то по лемме 1

$$\begin{aligned} E_{m,n}^h(f)_{BV_p} &= \inf_{\substack{k \leq m \\ l \leq n}} \|f(x, y) - P(x, y)\|_{BV_p} \leq \|f(x, y) - P(x, y)\|_{BV_p} = \\ &= V_p(f - P, [0,1]^2) \leq \left(2^{\frac{1-1}{p}}\right)^2 \omega_{\frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}}\left(f - P, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}\right) \leq \\ &\leq \left(2^{\frac{1-1}{p}}\right)^2 \left(\omega_{\frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}}\left(f, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}\right) + \omega_{\frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}}\left(P, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}\right)\right). \end{aligned}$$

Учитывая, что $P(x, y)$ постоянна на прямоугольнике площади $\frac{1}{2^m} \times \frac{1}{2^n}$, имеем:

$$\begin{aligned} \omega_{\frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}}\left(P, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}\right) &= \left(\sum_{i=1}^{2^m} \sum_{j=1}^{2^n} \left|P\left(\frac{i}{2^m}; \frac{j}{2^n}\right) - P\left(\frac{i-1}{2^m}; \frac{j}{2^n}\right) - P\left(\frac{i}{2^m}; \frac{j-1}{2^n}\right) + P\left(\frac{i-1}{2^m}; \frac{j-1}{2^n}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{2^m-1} \sum_{j=1}^{2^n-1} \left|f\left(\frac{2i+1}{2^{m+1}}; \frac{2j+1}{2^{n+1}}\right) - f\left(\frac{2i-1}{2^{m+1}}; \frac{2j+1}{2^{n+1}}\right) - f\left(\frac{2i+1}{2^{m+1}}; \frac{2j-1}{2^{n+1}}\right) + f\left(\frac{2i-1}{2^{m+1}}; \frac{2j-1}{2^{n+1}}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \omega_{\frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}}\left(f, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}\right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$V_p(f - P, [0,1]^2) \leq 2 \left(2^{\frac{1-1}{p}}\right)^2 \omega_{\frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}}\left(f, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}\right) = 2^{\frac{3-2}{p}} \omega_{\frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}}\left(f, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}\right),$$

значит,

$$E_{2^m, 2^n}^h(f)_{V_p} \leq 2^{3-\frac{2}{p}} \omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}\right),$$

Здесь мы учли также неравенство

$$\left(\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]^2} |f(x, y)|\right), \quad \|f - P\|_\infty \leq \omega\left(f, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}\right) \leq \omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}\right).$$

При $2^m \leq k < 2^{m+1}$, $2^n \leq l < 2^{n+1}$ воспользуемся тем, что

$$\frac{1}{2^m} < \frac{2}{k}, \quad \frac{1}{2^n} < \frac{2}{l},$$

и леммой 2. Имеем

$$\begin{aligned} E_{k,l}^h(f)_{V_p} &\leq E_{2^m, 2^n}^h(f)_{V_p} \leq 2^{3-\frac{2}{p}} \omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}\right) \leq \\ &\leq 2^{3-\frac{2}{p}} \omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f, \frac{2}{k}, \frac{2}{l}\right) \leq 2^{5-\frac{3}{p}} \omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f, \frac{1}{k}, \frac{1}{l}\right). \end{aligned}$$

Неравенство (1) доказано. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Будем обозначать $S_{2^m, 2^n}^h(f)$ через $A_{m,n}$. Докажем, что

$$\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}\right) \leq 2 \|f - A_{m,n}\|_{BV_p}.$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}\right) &\leq 2 \|f - A_{m,n}\|_{BV_p}; \\ \omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}\right) &\leq \omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f - A_{m,n} + A_{m,n}, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}\right) = \\ &= \sup_{\substack{|\xi| \leq \delta_1 \\ |\eta| \leq \delta_2}} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\left((f(x_i, y_j) - A(x_i, y_j)) - (f(x_{i-1}, y_j) - A(x_{i-1}, y_j)) \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (f(x_i, y_{j-1}) - A(x_i, y_{j-1})) + (f(x_{i-1}, y_{j-1}) - A(x_{i-1}, y_{j-1})) \right) \right] + \\ &\quad \left. + \left[A(x_i, y_j) - A(x_{i-1}, y_j) - A(x_i, y_{j-1}) + A(x_{i-1}, y_{j-1}) \right] \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f - A_{m,n}, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}\right) + \omega_{1-\frac{1}{p}}\left(A_{m,n}, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}\right) \leq \\ &\leq \|f - A_{m,n}\|_{BV_p} + \omega_{1-\frac{1}{p}}\left(A_{m,n}, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}\right). \end{aligned}$$

Согласно лемме 4, $A_{m,n}$ — ступенчатая функция, постоянная на прямоугольнике длины $\frac{1}{2^m} \times \frac{1}{2^n}$, и для каждой точки

$$(x, y) \in \Delta_{v-1}^m \times \Delta_{k-1}^n, \quad 1 \leq v \leq 2^m, \quad 1 \leq k \leq 2^n.$$

Величина

$$A(x_i, y_j) - A(x_{i-1}, y_j) - A(x_i, y_{j-1}) + A(x_{i-1}, y_{j-1}),$$

где $|x_i - x_{i-1}| \leq \frac{1}{2^m}$, $|y_j - y_{j-1}| \leq \frac{1}{2^n}$, равна по модулю $|\varsigma_{v,k}|$:

$$|\varsigma_{v,k}| = S_{2^m, 2^n}\left(\frac{v}{2^m} - 0, \frac{k}{2^n} - 0\right) - S_{2^m, 2^n}\left(\frac{v}{2^m}, \frac{k}{2^n} - 0\right) - S_{2^m, 2^n}\left(\frac{v}{2^m} - 0, \frac{k}{2^n}\right) + S_{2^m, 2^n}\left(\frac{v}{2^m}, \frac{k}{2^n}\right)$$

либо равна нулю. Отсюда следует, что

$$\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(A_{m,n}, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}\right) = \left(\sum_{v=1}^{2^m} \sum_{k=1}^{2^n} |\zeta_{v,k}|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теперь отметим, что для непрерывной функции $f(x, y)$ функции $S_{2^m, 2^n}(f) \equiv A_{m,n}$ и $A_{m,n}$ имеют разрывы в одних и тех же точках, а величины скачков этих функций в одной точке совпадают по модулю.

Таким образом,

$$V_p\left(f - S_{2^m, 2^n}, [0, 1]^2\right) \geq \omega_{1-\frac{1}{p}}\left(A_{m,n}, [0, 1]^2\right) \geq \omega_{1-\frac{1}{p}}\left(A_{m,n}, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}\right).$$

Значит,

$$\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(A_{m,n}, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}\right) \leq V_p\left(f - A_{m,n}, [0, 1]^2\right) \leq \|f - S_{2^m, 2^n}\|_{BV_p}.$$

Пользуясь при $l \in [2^m, 2^{m+1}]$, $r \in [2^n, 2^{n+1}]$ последовательно леммой 2, только что полученным неравенством и следствием 1, получаем:

$$\begin{aligned} \omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f, \frac{1}{l}, \frac{1}{r}\right) &\leq \omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f, \frac{2}{2^{m+1}}, \frac{2}{2^{n+1}}\right) \leq 2^{2\left(1-\frac{1}{p}\right)} \omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f, \frac{1}{2^{m+1}}, \frac{1}{2^{n+1}}\right) \leq \\ &\leq 2^{2\left(1-\frac{1}{p}\right)} 4E_{2^{m+1}, 2^{n+1}}(f)_{BV_p} \leq CE_{2^{m+1}, 2^{n+1}}(f)_{BV_p} \leq CE_{l,r}(f)_{BV_p}. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

References

- 1 Wiener N. The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients / Massachusetts J.Math. 3 (1924). — P. 72–94.
- 2 Clarkson J.A. and Adams C.R. On definitions of bounded variation for functions of two variables / Trans. Amer. Math. Soc. — 35 (1933). — P. 824–854.
- 3 Terehin A.P. Approximation of functions of bounded p -variation / Proceedings of the universities. Mathematics. — 1965. — № 2. — P. 171–187.
- 4 Volosivets C.C. Approximation of functions of bounded p -variation by polynomials on the Haar and Walsh / Math. Notes. — 6 (1993). — P. 11–21.
- 5 Golubov B., Efimov A., Skvortsov V. Walsh series and transforms: theory and applications. — M.: Science, 1987. — 344 p.

Т.Б.Ахажанов, Н.Ә.Бокаев

P -шектелген вариациясы бар көп айнымалы функциялардың Хаар көпмүшеліктері арқылы жуықталуының тура және кері теоремалары жайлы

Мақалада P -шектелген вариациясы бар көп айнымалы функциялар үшін «вариациялық үзіліссіздік модулі» түсінігі енгізілді. Қарастырылып жатқан кеңістіктегі нормасы бойынша P -шектелген вариациясы бар көп айнымалы функциялардың Хаар көпмүшеліктері арқылы жуықталуының тура және кері теоремалары дәлелденеді. Ең жақсы жуықталу вариациялық үзіліссіздік модулі арқылы және вариациялық үзіліссіздік модулі ең жақсы жуықталу арқылы бағаланады. Біздің мақсатымыз — осы теоремаларды еселі жағдайында қарастыру. Осы мақсатта біз « P -шектелген вариацияның қосындысы» түсінігін енгіздік.

Т.В.Ахазханов, Н.А.Бокеев

The direct and inverse theorems of approximation of functions of several variables with bounded P -variation by polynomials in the Haar

In this paper we introduce the notion of variations of modulus of continuity for functions of two variables of bounded P -variation. Prove direct and inverse approximation theorems for functions of bounded P -variation by polynomials in the Haar in the norm of the space is main goal of this work. Estimates of the best approximation of a variational module of continuity and assessment of variations of module of continuity through the best approximations are established. Our goal is to extend these results to multiple series. With this purpose in this paper we introduce the notion of variational sum of order P .

УДК 512. 664.3: 517.986.5

Ш.Ш.Ибраев

Университет «Болашақ», Кызылорда (E-mail: ibrayevsh@mail.ru)

Вторые группы когомологий простых модулей над $SO_7(k)$ в положительной характеристике

В статье показано, что для группы G вторая группа когомологий G -модуля V интерпретируется как группа классов эквивалентных расширений группы G с помощью V . Исследовано полное описание всех вторых групп когомологий простых модулей конкретной группы, играющее важную роль при классификации групп данной категории. В случае простой односвязной алгебраической группы над полем положительной характеристики данная задача решена только для малых алгебраических групп. Когомологии простых модулей алгебраических групп ранга 3 практически не изучены. В данной статье полностью вычислены вторые группы когомологий простых модулей простой односвязной группы $SO_7(k)$ ранга 3 над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 7$.

Ключевые слова: когомологии G -модуля, аффинная группа Вейля, ограниченный вес, фундаментальный альков, Стейнберг, тензорное произведение.

Когомологии простых модулей конкретных простых односвязных алгебраических групп над алгебраически замкнутым полем положительной характеристики изучаются сравнительно недавно. Общие свойства расширения простых модулей изучены в работах [1–3]. Когомологии первой степени простых модулей полностью вычислены только для следующих простых односвязных алгебраических групп: $SL_2(k)$ [4], $SL_3(k)$ [5], $Sp_4(k)$ [6], $SL_4(k)$ [7], $SO_7(k)$ [8]. Для когомологий второй степени аналогичные результаты получены для $SL_2(k)$ [4], $SL_3(k)$ [9], $Sp_4(k)$ [10], $SL_4(k)$ [11]. Для простых модулей, размерности которых не превосходят p , вторые когомологии вычислены для всех простых алгебраических групп [12]. Вторые группы когомологий простых модулей других групп не описаны. Целью данной работы является изучение вторых групп когомологий простой односвязной алгебраической группы $SO_7(k)$ над алгебраически замкнутым полем k положительной характеристики с коэффициентами в простых модулях. Постановка такой задачи интересна тем, что вторая группа когомологии модуля V над алгебраической группы G полностью описывает все векторные расширения данной алгебраической группы с помощью G -модуля V .

Пусть $G = SO_7(k)$, где k — алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 7$; G_1 — ядро отображения Фробениуса $F: G \rightarrow G$. Обозначим через B и T соответственно подгруппу Бореля и максимальный тор группы G . Будем считать, что унитарный радикал B соответствует отрицательным корням системы корней R группы G . Множества доминантных и ограниченных весов определяются соответ-

венно равенствами $X_+(T) = \{\lambda \in X(T) \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \geq 0 \text{ для всех } \alpha \in S\}$, $X_1(T) = \{\lambda \in X(T) \mid 0 \leq \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle < p \text{ для всех } \alpha \in S\}$, где $X(T)$ — группа характера максимального тора T , а S — множество простых корней.

Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ фундаментальные веса и будем использовать сокращенную запись (m_1, m_2, m_3) для $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + m_3\lambda_3 \in X(T)$. Так как из фундаментальных весов наименьшим является только λ_3 , то имеются ровно $|W|/2 = 24$ альковы аффинной группы Вейля с ограниченными весами. Обозначим их через $Y_1, Y_2, \dots, Y_{24}$. Они определяются следующими элементами аффинной группы Вейля W_p : $w_1 = 1$, $w_2 = s_0$, $w_3 = w_2s_1$, $w_4 = w_3s_2$, $w_5 = w_4s_3$, $w_6 = w_5s_2$, $w_7 = w_6s_1$ [8; 6].

Для рационального G -модуля L кручение Фробениуса степени d обозначается через $L^{(d)}$. Тогда существует единственный $d > 0$ и рациональный G -модуль V такой, что $V^{(d)} = L$. Обозначим его через $L^{(-d)}$.

Для простого G -модуля $L(\lambda)$ спектральная последовательность Линдона-Хохшильда-Серра имеет вид [13], 1.6.6.(3). Когомологии алгебраических групп и их алгебр Ли

$$E_2^{nm} = H^n(G, H^m(G_1, L(\lambda))^{(-1)}) \Rightarrow H^{n+m}(G, L(\lambda)). \quad (1)$$

Если E_∞^{nm} — ее стабилизированное значение, то

$$H^i(G, L(\lambda)) = \bigoplus_{n+m=i} E_\infty^{nm}. \quad (2)$$

Для $\mu \in X_1(T)$ определим следующие множества простых модулей:

$$M_{H_G^{n+m}}^{nm}(\mu) = \{L(\mu + p\gamma) \mid H^n(G, H^m(G_1, L(\mu + p\gamma))^{(-1)}) \neq 0, \gamma \in X_+(T)\}; \quad (3)$$

$$M_{Ext_G^1}(\mu) = \{L(\gamma) \mid Ext_G^1(L(\mu), L(\gamma)) \neq 0, \gamma \in X_+(T)\}. \quad (4)$$

Из (1) и теоремы Стейнберга о тензорном произведении следует, что

$$M_{H_G^{n+m}}^{nm} = \bigcup_{\mu \in \{\gamma \in X_1(T) \mid H^m(G_1, L(\gamma))^{(-1)} \neq 0\}} M_{H_G^{n+m}}^{nm}(\mu). \quad (5)$$

Пусть $\omega_i \in Y_i$. Введем на рассмотрение множества весов:

$$\Gamma_{01} = \{\omega_2, \omega_6, \omega_{11}, \omega_{13}, \omega_{17}, \omega_{22}, \omega_{24}\}, \text{ если } \omega_1 = (0, 0, 0);$$

$$\Gamma_{11} = \{\omega_{11}, \omega_{19}\}, \text{ если } \omega_1 = (0, 0, p-6);$$

$$\Gamma_{02} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_8, \omega_{10}, \omega_{15}, \omega_{16}, \omega_{18}, \omega_{20}, \omega_{21}, \omega_{23}\}, \text{ если } \omega_1 = (0, 0, 0);$$

$$\Gamma_{12} = \{\omega_8, \omega_{12}, \omega_{18}, \omega_{20}, \omega_{21}, \omega_{23}, \omega_{24}\}, \text{ если } \omega_1 = (0, 0, p-6).$$

Основным результатом является следующая

Теорема 1. Пусть G — односвязная алгебраическая группа $SO_7(k)$ над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 7$ и $L(\lambda)$ — конечномерный простой G -модуль. Тогда

$$H^2(G, L(\lambda)) = \begin{cases} k, \text{ если } L(\lambda) \in (M_{H_G^2}^{02} \cup M_{H_G^2}^{11} \cup M_{H_G^2}^{20}) \setminus (M_{02}' \cup M_{12}' \cup M_{12}''), \\ 2k, \text{ если } L(\lambda) \in M_{02}' \cup M_{12}', \\ 3k, \text{ если } L(\lambda) \in M_{12}'', \\ 0 \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $M_{12}' = \{L(\omega_{20})^{(d)} \otimes L(\lambda_3)^{(d+1)} \mid \omega_{20} \in \Gamma_{12}, d \geq 0\}$, $M_{12}'' = \{L(\omega_{21})^{(d)} \otimes L(\lambda_3)^{(d+1)} \mid \omega_{21} \in \Gamma_{12}, d \geq 0\}$, $M_{02}' = \{L(\mu)^{(d)} \otimes L(\lambda_1)^{(d+1)} \mid \mu \in \{\omega_{18}, \omega_{23}\} \in \Gamma_{02}, d \geq 0\}$.

Введем на рассмотрение следующие элементы аффинной группы Вейля:

$$w' = s_0s_1s_2s_3, \quad w'' = s_0s_1s_2s_3s_2, \quad w''' = s_0s_1s_2s_3s_2s_1.$$

Лемма 1. Пусть $p > 7$ и

$$M_i = \{L(s_0 \cdot \lambda_i), L(s_0s_1s_2s_0s_1 \cdot \lambda_i), L(w'w' s_0s_1 \cdot \lambda_i), L(w''w' \cdot \lambda_i), L((w')^2 s_0s_1 \cdot \lambda_i), L(w'''w' (w')^2 \cdot \lambda_i), \\ L((w'')^3 w' \cdot \lambda_i), L(w'w''w' s_0s_1s_2 \cdot \lambda_i), L(w''(w')^2 s_0s_1 \cdot \lambda_i)\},$$

$$N_i = \{L(\lambda_i) \otimes L(\mu')^{(1)} \mid L(\mu') \in M_{Ext_G^1}(0)\}.$$

Тогда во всех перечисленных ниже нетривиальных случаях $Ext_G^1(L(\lambda), L(\mu)) \approx k$:

$$(i) \lambda = 0 \text{ и } M_{Ext_G^1}(0) = M_{H_G^1}^{01} \cup M_{H_G^1}^{10};$$

$$(ii) \lambda = \lambda_i \text{ и } M_{Ext_G^1}(\lambda_i) = M_i \cup N_i \text{ для всех } i = 1, 2, 3.$$

Доказательство. Известно, что $Ext_G^1(L(0), L(\mu)) \approx H^1(G, L(\mu))$. Тогда согласно (4) утверждение (i) следует из теоремы 2 работы [8].

(ii) Для $\lambda = \lambda^0 + p\lambda'$ и $\mu = \mu^0 + p\mu'$, где $\lambda^0, \mu^0 \in X_1(T)$, $\lambda', \mu' \in X_+(T)$, имеет место следующий изоморфизм G -модулей ([1], теорема 5.2; [6], (1.4)):

$$Ext_G^1(L(\lambda), L(\mu)) \approx \begin{cases} Hom_G(L(\mu'), Ext_{G_1}^1(L(\lambda^0), L(\mu^0))^{(-1)} \otimes L(\lambda')), & \text{если } \lambda^0 \neq \mu^0; \\ Ext_G^1(L(\lambda'), L(\mu')), & \text{если } \lambda^0 = \mu^0. \end{cases} \quad (6)$$

Пусть $\lambda = \lambda^0 = \lambda_i \neq \mu^0$. Тогда по формуле (6) $Ext_G^1(L(\lambda_i), L(\mu)) \neq 0$, если $L(\mu) \in M_i = \{L(\mu) = L(\mu^0 + p\mu') \mid Hom_G(L(\mu'), Ext_{G_1}^1(L(\lambda_i), L(\mu^0))^{(-1)}) \neq 0\}$. Так как все фундаментальные веса лежат в нижнем фундаментальном алькове, то по принципу связанности старшие веса модулей множества M_i получаются из $M_{H_G^1}^{01}$ заменой веса $\omega_1 = 0$ на $\omega_1 = \lambda_i$. Согласно теореме 2 работы [8]

$$M_{H_G^1}^{01} = \{L(s_0 \cdot 0), L(s_0 s_1 s_2 s_0 s_1 \cdot 0), L(w'' w' s_0 s_1 \cdot 0), L(w''' w'' \cdot 0), L((w'')^2 s_0 s_1 \cdot 0), L(w''' w'' (w')^2 \cdot 0); \\ L((w'')^3 w' \cdot 0), L(w' w'' w' s_0 s_1 s_2 \cdot 0), L(w' (w')^2 s_0 s_1 \cdot 0)\}.$$

Заменив нулевой вес на λ_i , получаем все элементы множества M_i , перечисленные в данной лемме.

Пусть теперь $\lambda = \lambda^0 = \lambda_i = \mu^0$. По формуле (6) $Ext_G^1(L(\lambda_i), L(\mu)) \neq 0$, если $L(\mu) \in N_i = \{L(\lambda_i) \otimes L(\mu')^{(1)} \mid Ext_G^1(L(0), L(\mu')) \neq 0, \mu' \in X_+(T)\}$. Используя утверждения (i) данной леммы, получим $N_i = \{L(\lambda_i) \otimes L(\mu')^{(1)} \mid L(\mu') \in M_{Ext_G^1}(0)\}$. Таким образом, по (6) $M_{Ext_G^1}(\lambda_i) = M_i \cup N_i$ для всех $i = 1, 2, 3$.

Наконец, по предложению 4 работы [14] во всех перечисленных выше случаях $Ext_G^1(L(\lambda), L(\mu)) \approx k$. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $p > 7$, тогда

$$(i) M_{H_G^2}^{11}(\mu) = M_{Ext_G^1}(\lambda_1), \text{ если } \mu \in \{\omega_6, \omega_{13}, \omega_{24}\} \subset \Gamma_{01};$$

$$(ii) M_{H_G^2}^{11}(\mu) = M_{Ext_G^1}(\lambda_2) \cup M_{Ext_G^1}(0), \text{ если } \mu = \omega_{17} \in \Gamma_{01};$$

$$(iii) M_{H_G^2}^{11}(\mu) = M_{Ext_G^1}(\lambda_3), \text{ если } \mu \in \{\omega_{11}, \omega_{19}\} = \Gamma_{11};$$

$$(iv) M_{H_G^2}^{11}(\mu) = M_{Ext_G^1}(0), \text{ если } \mu \in \{\omega_2, \omega_{11}, \omega_{22}\} = \Gamma_{01}.$$

Доказательство. (i) Пусть $\mu \in \{\omega_6, \omega_{13}, \omega_{24}\} \subset \Gamma_{01}$. По (3)

$$M_{H_G^2}^{11}(\mu) = \{L(\mu) \otimes L(\gamma)^{(1)} \mid H^1(G, H^1(G_1, L(\mu) \otimes L(\gamma)^{(1)})^{(-1)}) \neq 0, \gamma \in X_+(T)\}.$$

По предложению 5(ii) работы [14] и по лемме 1.1 работы [15]

$$M_{H_G^2}^{11}(\mu) = \{L(\mu) \otimes L(\gamma)^{(1)} \mid H^1(G, L(\lambda_1) \otimes L(\gamma)) \neq 0\} = \\ = \{L(\mu) \otimes L(\gamma)^{(1)} \mid Ext_G^1(L(\lambda_1), L(\gamma)) \neq 0\} = M_{Ext_G^1}(\lambda_1).$$

(ii) Пусть $\mu = \omega_{17} \in \Gamma_{01}$. По (3)

$$M_{H_G^2}^{11}(\mu) = \{L(\mu) \otimes L(\gamma)^{(1)} \mid H^1(G, H^1(G_1, L(\mu) \otimes L(\gamma)^{(1)})^{(-1)}) \neq 0, \gamma \in X_+(T)\}.$$

Далее, по предложению 5(iii) работы [14] и по лемме 1.1 работы [15]

$$M_{H_G^2}^{11}(\mu) = \{L(\mu) \otimes L(\gamma)^{(1)} \mid H^1(G, (L(\lambda_2) \oplus k) \otimes L(\gamma)) \neq 0\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \{L(\mu) \otimes L(\gamma)^{(1)} \mid H^1(G, L(\lambda_2) \otimes L(\gamma)) + H^1(G, L(\gamma)) \neq 0\} = \\
&= \{L(\mu) \otimes L(\gamma)^{(1)} \mid Ext_G^1(L(\lambda_2), L(\gamma)) + Ext_G^1(k, L(\gamma)) \neq 0\} = M_{Ext_G^1}(\lambda_2) \cup M_{Ext_G^1}(0).
\end{aligned}$$

(iii) и (iv) доказываются аналогично предыдущему случаю (i). Доказательство леммы завершено.
 Лемма 3. Пусть $p > 7$, тогда

$$\begin{aligned}
(i) \quad M_{H_G^2}^{02}(\mu) &= \{L(\mu) \otimes L(\lambda_1)^{(1)}\}, \text{ если } \mu \in \{\omega_5, \omega_{10}, \omega_{18}\} \subset \Gamma_{02}; \\
(ii) \quad M_{H_G^2}^{02}(\mu) &= \{L(\mu), L(\mu) \otimes L(\lambda_2)^{(1)}\}, \text{ если } \mu \in \{\omega_{16}, \omega_{20}\} \subset \Gamma_{02}; \\
(iii) \quad M_{H_G^2}^{02}(\mu) &= \{L(\mu), L(\mu) \otimes L(\lambda_1)^{(1)}, L(\mu) \otimes L(\lambda_2)^{(1)}\}, \text{ если } \mu = \omega_{15} \in \Gamma_{02}; \\
(iv) \quad M_{H_G^2}^{02}(\mu) &= \{L(\mu) \otimes L(\lambda_3)^{(1)}\}, \text{ если } \mu \in \{\omega_8, \omega_{12}, \omega_{18}, \omega_{20}, \omega_{24}\} \subset \Gamma_{12}; \\
(v) \quad M_{H_G^2}^{02}(\mu) &= \{L(\mu)\}, \text{ если } \mu \in \{\omega_3, \omega_8\} \subset \Gamma_{02}; \\
(vi) \quad M_{H_G^2}^{02}(\mu) &= \{L(\mu), L(\mu) \otimes L(\lambda_1)^{(1)}\}, \text{ если } \mu = \omega_{21} \in \Gamma_{02}; \\
(vii) \quad M_{H_G^2}^{02}(\mu) &= \{L(\mu) \otimes L(\lambda_i)^{(1)} \mid i = 1, 2, 3\}, \text{ если } \mu = \omega_{23} \in \Gamma_{02}; \\
(viii) \quad M_{H_G^2}^{02}(\mu) &= \{L(\mu) \otimes L(\lambda_3)^{(1)}, L(\mu) \otimes L(\lambda_1 + \lambda_3)^{(1)}\}, \text{ если } \mu \in \{\omega_{21}, \omega_{23}\} \subset \Gamma_{12}; \\
(ix) \quad M_{H_G^2}^{02}(0) &= \{L(\tilde{\alpha})\}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Докажем утверждения (i). Остальные утверждения доказываются аналогично.
 Пусть $\mu \in \{\omega_5, \omega_{10}\} \subset \Gamma_{02}$. По (3)

$$M_{H_G^2}^{02}(\mu) = \{L(\mu) \otimes L(\gamma)^{(1)} \mid H^0(G, H^2(G_1, L(\mu) \otimes L(\gamma)^{(1)})^{(-1)} \neq 0, \gamma \in X_+(T)\}.$$

По предложению 6(vi) работы [14] и по лемме 1.1 работы [15]

$$\begin{aligned}
M_{H_G^2}^{02}(\mu) &= \{L(\mu) \otimes L(\gamma)^{(1)} \mid H^0(G, L(\lambda_1) \otimes L(\gamma)) \neq 0\} = \\
&= \{L(\mu) \otimes L(\gamma)^{(1)} \mid Hom_G(L(\lambda_1), L(\gamma)) \neq 0\} = \{L(\mu) \otimes L(\lambda_1)^{(1)}\}.
\end{aligned}$$

Если $\mu = \omega_{18} \in \Gamma_{02}$, то по предложению 6(vii) работы [4] и по лемме 1.1 работы [5]

$$\begin{aligned}
M_{H_G^2}^{02}(\mu) &= \{L(\mu) \otimes L(\gamma)^{(1)} \mid H^0(G, 2L(\lambda_1) \otimes L(\gamma)) \neq 0\} = \\
&= \{L(\mu) \otimes L(\gamma)^{(1)} \mid Hom_G(2L(\lambda_1), L(\gamma)) \neq 0\} = \{L(\mu) \otimes L(\lambda_1)^{(1)}\}.
\end{aligned}$$

Доказательство леммы завершено.

Лемма 4. Пусть $p > 7$, тогда $M_{H_G^2}^{20}(0) = \{L(\gamma)^{(r)} \mid H^2(G, L(\gamma)) \neq 0, \gamma \in X_+(T)\}$.

Доказательство. Так как $\mu = 0$, то по (3)

$$\begin{aligned}
M_{H_G^2}^{20}(\mu) &= \{L(0) \otimes L(\gamma)^{(1)} \mid H^2(G, H^0(G_1, L(0) \otimes L(\gamma)^{(1)})^{(-1)} \neq 0, \gamma \in X_+(T)\} = \\
&= \{L(\gamma)^{(1)} \mid H^2(G, L(\gamma)) \neq 0, \gamma \in X_+(T)\}.
\end{aligned}$$

Лемма 5. Пусть $p > 7$, тогда

$$\begin{aligned}
(i) \quad M_{H_G^1}^{02} &= \cup_{\mu \in \Gamma_{02} \cup \Gamma_{12}} M_{H_G^2}^{02}(\mu); \\
(ii) \quad M_{H_G^2}^{11} &= \cup_{\mu \in \Gamma_{01} \cup \Gamma_{11}} M_{H_G^2}^{11}(\mu); \\
(iii) \quad M_{H_G^2}^{20} &= \{L(\lambda)^{(d)} \mid \lambda \in M_{H_G^2}^{02} \cup M_{H_G^2}^{11}, d > 0\}.
\end{aligned}$$

Доказательство. (i) следует из (5) и предложения 6 работы [14]. Аналогично, (ii) следует из (5) и предложения 5 работы [14]. Утверждение (iii) вытекает из леммы 4 и утверждений (i) и (ii) данной леммы. Лемма доказана.

Предложение 5. Пусть $p > 7$ и $L(\lambda)$ — конечномерный простой G -модуль. Тогда

$$\begin{aligned}
(i) \quad E_2^{11} &= E_\infty^{11}; \\
(ii) \quad E_2^{20} &= E_\infty^{20}; \\
(iii) \quad E_2^{02} &= E_\infty^{02}; \\
(iv) \quad H^2(G, L(\lambda)) &= E_2^{02} \oplus E_2^{11} \oplus E_2^{20}.
\end{aligned}$$

Доказательство. По теореме Стейнберга о тензорном произведении λ можно представить в следующем виде: $\lambda = \lambda^0 + p\lambda'$, где $\lambda^0 \in X_1(T)$ и $\lambda' \in X_+(T)$. По определению, E_3^{nm} является когомологией последовательности $E_2^{n-2,m+1} \rightarrow E_2^{nm} \rightarrow E_2^{n+2,m-1}$. Тогда $E_2^{nm} = E_3^{nm}$, если

$$E_2^{n-2,m+1} = E_2^{n+2,m-1} = 0, \text{ когда } E_2^{nm} \neq 0. \quad (7)$$

(i) Так как для любой спектральной последовательности вида (1) $E_3^{11} = E_\infty^{11}$, то достаточно показать, что $E_2^{11} = E_3^{11}$. Предположим, что $E_2^{3,0} \neq 0$. Используя (1) и лемму 1.1 работы [15], получим:

$$E_2^{3,0} = H^3(G, H^0(G_1, L(\lambda^0))^{(-1)} \otimes L(\lambda')) = H^3(G, H^0(G_1, L(0))^{(-1)} \otimes L(\lambda')) = H^3(G, L(\lambda')). \quad (8)$$

Согласно предложению 6(i) работы [14] $E_2^{02} = H^0(G, H^2(G_1, L(0))^{(-1)} \otimes L(\lambda')) = \text{Hom}_G(L(\tilde{\alpha}), L(\lambda'))$. Откуда следует, что $L(\lambda') \approx L(\tilde{\alpha})$, если $E_2^{11} \neq 0$. Следовательно, по принципу связности для G $H^3(G, L(\lambda')) = 0$. Тогда по (8) $E_2^{3,0} = 0$. В таком случае согласно (7) $E_2^{11} = E_3^{11}$.

(ii) Доказательство аналогично предыдущему случаю.

(iii) Докажем, что $E_2^{-2,3} = E_2^{2,1} = 0$, если $E_2^{02} \neq 0$. Тривиальность $E_2^{-2,3}$ очевидна. Пусть $E_2^{2,1} \neq 0$. Используя формулу (1) и лемму 1.1 работы [15], получим: $E_2^{2,1} = H^2(G, H^1(G_1, L(\lambda))^{(-1)}) = H^2(G, H^1(G_1, L(\lambda^0))^{(-1)} \otimes L(\lambda'))$. Тогда согласно предложениям 5 и 6 работы [14] $H^1(G_1, L(\lambda^0))^{(-1)} = 0$. Следовательно, $E_2^{2,1} = 0$ и по (7) $E_2^{02} = E_3^{02}$. Так как $E_4^{02} = E_\infty^{02}$, остается показать, что $E_3^{02} = E_4^{02}$. E_4^{02} является когомологией последовательности $E_3^{-3,2} \rightarrow E_3^{02} \rightarrow E_3^{3,0}$. Поэтому докажем, что $E_2^{3,0} = 0$, если $E_2^{02} \neq 0$.

Предположим, что $E_2^{3,0} \neq 0$ и $E_2^{02} \neq 0$. Тогда по (8) и предложению 6 работы [14] $E_2^{3,0} = H^3(G, L(\tilde{\alpha})) = 0$.

Утверждение (iv) следует из утверждений (i)–(iv) данной леммы и формулы (2). Предложение доказано.

Доказательство теоремы 1. Согласно леммам 1–5 множества простых G -модулей $M_{H_G^0}^{02}(\mu), \mu \in \Gamma_{02} \cup \Gamma_{12}$, $M_{H_G^0}^{11}(\mu), \mu \in \Gamma_{01} \cup \Gamma_{11}$, $M_{H_G^0}^{20}$ попарно не пересекаются. Кроме того, из лемм 1, 2 и 5(ii) следует, что

$$E_2^{11} \approx \begin{cases} k, & \text{если } L(\lambda) \in M_{H_G^0}^{11}, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

А также по предложению 6 работы [4] и лемме 5(i)

$$E_2^{02} \approx \begin{cases} k, & \text{если } L(\lambda) \in M_{H_G^0}^{02} \setminus (\{L(\mu) \otimes L(\lambda_1)^{(1)} \mid \mu \in \{\omega_{18}, \omega_{23}\} \subset \Gamma_{02}\} \cup \{L(\mu) \otimes L(\lambda_3)^{(1)} \mid \mu \in \{\omega_{20}, \omega_{21}\} \subset \Gamma_{12}\}), \\ 2k, & \text{если } L(\lambda) \in \{L(\mu) \otimes L(\lambda_1)^{(1)} \mid \mu \in \{\omega_{18}, \omega_{23}\} \subset \Gamma_{02}\} \cup \{L(\omega_{20}) \otimes L(\lambda_3)^{(1)}, \omega_{20} \in \Gamma_{12}\}, \\ 3k, & \text{если } L(\lambda) = L(\omega_{21}) \otimes L(\lambda_3)^{(1)}, \text{ где } \omega_{21} \in \Gamma_{12}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Аналогично, по лемме 5(iii) и предыдущим двум формулам:

$$E_2^{20} \approx \begin{cases} k, & \text{если } L(\lambda) \in M_{H_G^0}^{20} \setminus (M_{02}' \cup M_{12}' \cup M_{12}''), \\ 2k, & \text{если } L(\lambda) \in M_{02}' \cup M_{12}', \\ 3k, & \text{если } L(\lambda) \in M_{12}'', \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда утверждение теоремы следует из предложения 5. Доказательство теоремы 1 завершено.

Согласно теореме 1 размерности вторых групп когомологий не превосходят ранга группы G . Аналогичное утверждение имеет место для алгебраической группы $SL_4(k)$ [11]. Из результатов работ [4, 9, 10] также следует, что таким свойством обладают вторые группы когомологий алгебраических групп ранга 2.

Используя теорему 1 и результаты работы [14], можно сравнить вторые группы когомологий группы G и ее алгебры Ли g . По теореме 1 группа G обладает бесконечным дискретным семейством простых модулей, вторые группы когомологий которых нетривиальны. Кроме того, количество таких простых модулей с ограниченными старшими весами конечно. Для алгебры Ли g наблюдается иная картина. Известно, что 2-особые простые модули над алгеброй Ли g ограничены и количество 2-особых модулей конечно [16, 17]. Поэтому следует сравнить только когомологии ограниченных простых модулей. По теореме 1 только 7 простых модулей со старшими ограниченными весами имеют нетривиальную вторую когомологию: $L(\omega_3)$, $L(\omega_8)$, $L(\omega_{15})$, $L(\omega_{16})$, $L(\omega_{20})$, $L(\omega_{21})$ и $L(\omega_{23})$ при $\omega_1 = (0, 0, 0)$. Согласно предложениям 4 (ii), (iv) и 6(x) работы [14] вторые группы когомологий алгебры Ли g для этих модулей также нетривиальны, но совпадают с соответствующими вторыми когомологиями группы G только в двух случаях, когда $L(\lambda) = \omega_3$ и $L(\lambda) = \omega_8$.

Таким образом, хотя для двух простых модулей имеются совпадения, вторые группы когомологий алгебраических группы G и ее алгебры Ли g существенно различаются.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственной программы фундаментальных исследований Ф. 0508 МОУН РК.

References

- 1 Andersen H.H. Extensions of modules for algebraic groups // Amer. J. Math. — 1984. — Vol. 106. — P. 489–504.
- 2 Lin Z. Extensions between simple modules for Frobenius kernels // Math. Z. — 1991. — Vol. 207. — P. 485–499.
- 3 Bendel C.P., Nakano D.K., Pillen C. Extensions for finite Chevalley groups II // Trans. AMS. — 2002. — Vol. 354. — № 11. — P. 4421–4454.
- 4 Stewart D.I. The second cohomology of simple SL_2 -modules // Proc. Amer. Math. Soc. — 2010. — Vol. 138. — P. 427–434.
- 5 Yehia S.E.I. Extensions of simple modules for the universal Chevalley group and parabolic subgroup. — Warwick: Ph.D. Thesis, 1982.
- 6 Ye Jiachen. Extensions of simple modules for the group $Sp(4, K)$ // J. London Math. Soc. — 1990. — Vol. 2 (41). — P. 51–62.
- 7 Ibraev S.S. The second cohomology groups of $SL_5(k)$ in positive characteristic // Search, ser. nat. and techn. scien. — 2010. — № 4 (2). — P. 136–141.
- 8 Ibraev S.S. The first cohomology groups of simple modules over the algebraic group of type B_3 in positive characteristic // Young scientist. — 2011. — T. 2. — 2 (25). — P. 6–10.
- 9 Stewart D.I. The second cohomology of simple SL_3 -modules // arXiv:0907.4626v1 [math.RT], 2009.
- 10 Ibraev S.S. The second cohomology groups of simple modules for $Sp_4(k)$ // Abstracts of the Int. Algebraic Conf. dedicated to the 70th birthday of A.V. Yakovlev. St. Petersburg, Russia. — 2010. — P. 113–114.
- 11 Ibraev S.S. On the second cohomology groups of simple modules over $SL_4(k)$ in positive characteristic // Rep. of the II-th Int. Conf. «Science in the modern world» (30 July, 2010). — M., 2010. — P. 273–278.
- 12 McNinch G.J. The second cohomology of small irreducible modules for simple algebraic group // Pacific. J. Math. — 2002. — Vol. 204. — № 2. — P. 459–472.
- 13 Jantzen J.C. Representations of algebraic groups. Boston: Pure and Applied Mathematics. — Vol. 131. — 1987.
- 14 Ibraev S.S. On the cohomology of simple modules for the Frobenius kernel // Rep. of the Int. Sci. and Pract. Conf. «Actual problems of teaching natural and mathematical sciences» (19–20 November, 2010). — Kyzylorda. — 2011. — P. 363–368.
- 15 Sullivan J.B. Frobenius operations on Hochschild cohomology // Amer. J. Math. — 1980. — Vol. 102. — № 4. — P. 765–780.
- 16 Dzhumadil'daev A.S. On the cohomology of modular Lie algebras // Math. collection. — 1982. — Vol. 119 (161). — № 9. — P. 132–149.
- 17 Dzhumadil'daev A.S. Cohomology and nonsplit extensions of modular Lie algebras // Contemp. Math. — 1992. — Vol. 131, Part. 2. — P. 31–43.

Ш.Ш.Ыбыраев

Оң сипаттамалы өрістегі $SO_7(k)$ үшін жай модульдердің екінші когомология группалары

G группасы үшін V G -модулінің екінші когомология группасы G -дің V бойынша кеңеюлерінің эквивалентті кластарының группасы ретінде интерпретацияланады. Сондықтан нақты группа үшін жай модульдердің екінші когомология группаларын толық анықтау осындай группаларды жіктеу есебінде маңызды роль атқарады. Сипаттамасы оң өрістегі жай бір байланысқан алгебралық группалар үшін бұл есеп тек рангы аз алгебралық группалар үшін шешілген. Рангы 3-ке тең алгебралық группалар үшін бұл есеп зерттелмеген. Мақалада сипаттамасы $p > 7$ алгебралық тұйық k өрісіндегі рангы 3-ке тең жай бір байланысқан $SO_7(k)$ алгебралық группасы үшін жай модульдердің екінші когомология группалары толық есептелді.

Sh.Sh.Ibraev

The second cohomology groups of simple modules over $SO_7(k)$ in positive characteristic

For the group G the second cohomology group of the G -module V is interpreted as the group of the cosets of equivalent extensions G by V . Therefore the explicitly description of all second cohomology groups of simple modules for concrete group plays important role in the classification problem of such groups. In the case when G is the simple and simply connected algebraic group this problem was solved only for small algebraic groups. For the algebraic groups of rank 3 this problem remained open. In the present paper the second cohomology groups of simple modules for the simple and simply connected algebraic group $SO_7(k)$ of rank 3 over an algebraically closed field k of characteristic $p > 7$ are calculated explicitly.

УДК 517.956

Д.А.Искендерова

Агротехнический университет им. С.Сейфуллина, Астана (E-mail: iskenja_2005@mail.ru)

Разрешимость вырождающихся уравнений вязкого теплопроводного газа

Исследована нелинейная система дифференциальных уравнений, описывающая одномерное нестационарное течение вязкого теплопроводного газа. Изучена задача Коши с вырождающейся начальной плотностью. Показано, что в начальный момент времени все искомые функции стремятся к разным постоянным на бесконечности. Доказано существование единственного глобального обобщенного решения методом априорных оценок.

Ключевые слова: вязкий теплопроводный газ, априорные оценки, лемма Гронуолла, обобщенное решение, Юнг, Гельдер, Коши.

1. *Постановка задачи и основной результат.* Уравнения течения вязкого теплопроводного газа в лагранжевых координатах имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \quad v = \frac{\rho^0}{\rho}, \\ \rho^0 \frac{\partial u}{\partial t} &= \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad p = k \rho^0 \frac{\theta}{v}, \\ \rho^0 \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - p \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\rho(x, t)$, $v(x, t)$, $u(x, t)$, $\theta(x, t)$, $p(x, t)$ — плотность, удельный объем, скорость, температура, давление — искомые функции; μ, λ, k — физические постоянные — положительные числа; переменные $x \in R = (-\infty; \infty)$; $t \in [0; T]$, $0 < T < \infty$.

В начальный момент времени $t = 0$ все характеристики среды известны:

$$u|_{t=0} = u^0(x), \quad \theta|_{t=0} = \theta^0(x), \quad v|_{t=0} = 1, \quad |x| < \infty, \quad (2)$$

причем (ρ^0, u^0, θ^0) — непрерывные, (ρ^0, θ^0) — ограниченные функции,

$$0 < m_0 \leq \theta^0(x) \leq M_0 < \infty, \quad 0 < \rho^0(x) \leq C_0,$$

имеют конечные пределы на бесконечности:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \rho^0(x) &= \rho_1^0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \rho^0(x) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} u^0(x) &= u_1^0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u^0(x) = u_2^0, \quad u_1^0 < u_2^0, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \theta^0(x) &= \theta_1^0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta^0(x) = \theta_2^0, \quad \theta_1^0 \neq \theta_2^0. \end{aligned} \quad (3)$$

Введем вспомогательные функции $f(x)$, $\varphi(x)$, обладающие свойствами:

$$\begin{aligned} |f(x)| < C_1 < \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = u_0^1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = u_0^2, \\ 0 < f'(x) \leq C_2, \quad f'(x) \in W_2^1(R), \quad f'(x) \in L_1(R), \\ f'(x) \leq C_3 \sqrt{\rho^0(x)}, \quad \frac{f''(x)}{\sqrt{\rho^0(x)}} \in L_2(R), \end{aligned} \quad (4)$$

$$0 < C_4^{-1} < \varphi(x) < C_4, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \theta_0(x) \varphi(x) = 1, \quad \varphi'(x) \in W_2^1(R).$$

Функции $f(x)$, $\varphi(x)$ связаны неравенствами

$$(\varphi'(x))^2 < \delta (f'(x))^3, \quad 0 < \delta < 1.$$

Существование таких функций нетрудно проверить.

Теорема. Пусть начальные данные (2) удовлетворяют условиям (3) и

$$(u^0 - f, \theta^0 \varphi - 1) \in W_2^1(R), \quad \theta_x^0 \in L_2(R),$$

$$\rho^0(x) \in L_1(0; \infty), \quad \frac{\rho_x^0}{\rho^0} \in L_2(R), \quad (\rho_x^0)^2 \leq C(\rho^0)^3 \text{ при } x \in (0; \infty).$$

Тогда на любом конечном интервале времени $[0; T]$, $0 < T < \infty$, существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(3), которое удовлетворяет уравнениям и начальным данным почти всюду, причем

$$\begin{aligned} (\sqrt{\rho^0}(u - f), \sqrt{\rho^0}(\varphi \theta - 1), u_x, v_x, \rho^0 \theta_x) \in L_\infty(0, T; L_2(R)), \\ (\sqrt{\rho^0} u_t, (\rho^0)^{3/2} \theta_t, u_{xx}, v_x, \sqrt{\rho^0} \theta_x, \sqrt{\rho^0} \theta_{xx}) \in L_2(\Pi), \quad \Pi = R \times (0, T), \end{aligned}$$

$\theta(x, t)$, $v(x, t)$ — строго положительные функции, $\rho^0(x) \theta(x, t)$, $v(x, t)$ — ограниченные функции.

Доказательство существования обобщенного решения «в целом» по времени основывается на выводе глобальных априорных оценок, положительные постоянные в которых C , C_i , K_i зависят от начальных данных и условий теоремы, но не зависят от промежутка существования локального решения. Глобальные априорные оценки позволяют продолжить локальное решение [2] на весь промежуток времени.

2. *Априорные оценки.* Не нарушая общности, для простоты, положим все физические постоянные равными единице.

Сделаем замену, полагая $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{\varphi(x)}$, тогда система уравнений (1) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\varphi} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= 0, \quad v = \frac{\rho^0}{\rho}, \\ \rho^0 \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{\varphi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\varphi v} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{\varphi} \frac{\partial p}{\partial \xi}, \quad p = \rho^0 \frac{\theta}{v}, \\ \rho^0 \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{1}{\varphi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\varphi v} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) - p \frac{1}{\varphi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\varphi^2 v} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Лемма 1. При выполнении условий теоремы имеет место оценка

$$U(t) + \int_0^t W(\tau) d\tau \leq E = \text{const} > 0, \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

где

$$U(t) = \int \left\{ \frac{1}{2} \rho^0 (u - f)^2 + \rho^0 (\varphi \theta - \ln \varphi \theta - 1) + \rho^0 (v - \ln v - 1) \right\} dx, \quad W(t) = \int \left\{ \frac{\theta_x^2}{v \theta^2} + \frac{u_x^2}{v \theta} + \rho^0 \frac{\theta}{v} f'(x) \right\} dx.$$

Интегралы по x берутся от $-\infty$ до ∞ .

Доказательство. Умножим первое уравнение системы (5) на $\rho^0 \left(1 - \frac{1}{v} \right)$, второе на $\varphi(u - f)$,

третье на $\left(\varphi - \frac{1}{\theta} \right)$, сложим и проинтегрируем по R :

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int \left\{ \frac{1}{2} \rho^0 \varphi (u - f)^2 + \rho^0 (\varphi \theta - \ln \varphi \theta - 1) + \rho^0 (v - \ln v - 1) \right\} d\xi + \\
& + \int \left\{ \frac{\theta_\xi^2}{\varphi^2 v \theta^2} + \frac{u_\xi^2}{\varphi^2 v \theta} + \rho^0 \frac{\theta}{v} f'(\xi) \right\} d\xi = \\
& = \int \left\{ \frac{\rho^0}{\varphi} u_\xi + \frac{1}{\varphi v} u_\xi f' - \frac{\theta_\xi \varphi'}{v \varphi^3 \theta} \right\} d\xi = \sum_{k=1}^3 I_k.
\end{aligned} \quad (7)$$

Оценим каждый интеграл I_k в правой части (7), используя интегрирование по частям, неравенства вложения, Юнга, Гельдера, Коши, условия теоремы и (4):

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{\rho^0}{\varphi} (u - f)_\xi d\xi + \int \frac{\rho^0}{\varphi} f' d\xi \leq C_5 \left(\left\| \sqrt{\rho^0 \varphi} (u - f) \right\|^2 + 1 \right), \\
I_2 &= \int f' \frac{\partial \ln v}{\partial t} d\xi = - \frac{d}{dt} \int f' (v - \ln v - 1) d\xi + \int \frac{f'}{\varphi} u_\xi d\xi \leq \\
&\leq - \frac{d}{dt} \int f' (v - \ln v - 1) d\xi + C_6 \left(\left\| \sqrt{\rho^0 \varphi} (u - f) \right\|^2 + 1 \right), \\
I_3 &= - \int \frac{\theta_\xi \varphi'}{v^{1/2} \theta \varphi^3} d\xi + \int \frac{\theta_\xi \varphi' (v^{1/2} - 1)}{v^{1/2} \theta \varphi^3 v^{1/2} \sqrt{v - \ln v - 1}} \sqrt{v - \ln v - 1} d\xi.
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\frac{|v^{1/2} - 1|}{v^{1/2} \sqrt{v - \ln v - 1}} \leq C_7, \quad \forall (x, t) \in \Pi.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq \left(\int \frac{\theta_\xi^2}{v \theta^2 \varphi^2} d\xi \right)^{1/2} \left(\int \frac{\varphi'^2}{\varphi^4} d\xi \right)^{1/2} + C_7 \left(\int \frac{\theta_\xi^2}{v \theta^2 \varphi^2} d\xi \right)^{1/2} \left(\int \frac{\varphi'^2}{\varphi^4} (v - \ln v - 1) d\xi \right)^{1/2} \leq \\
&\leq \varepsilon \int \frac{\theta_\xi^2}{v \theta^2 \varphi^2} d\xi + C_\varepsilon \left(\int \rho^0 (v - \ln v - 1) d\xi + 1 \right).
\end{aligned}$$

Выбираем $\varepsilon < 1$, $\delta < 1/C_3^2$. Проинтегрируем по времени полученное из (7) неравенство. Применяя лемму Гронуолла и переходя к исходным переменным x , выводим оценку (6). Лемма доказана.

Из первого и второго уравнений системы (1) получим вспомогательное соотношение между искомыми функциями [3, 4]:

$$v(x, t) = I^{-1}(t) B^{-1}(x, t) \left[1 + \int_0^t \rho^0(x) \theta(x, \tau) I(\tau) B(x, \tau) d\tau \right], \quad (8)$$

$$\text{где } I(t) = \frac{1}{v(x_0, t)} \exp \left\{ \int_0^t \rho^0 \frac{\theta}{v}(x_0, \tau) d\tau \right\}, \quad B(x, t) = \exp \left\{ \int_{x_0}^x \rho^0(\xi) (u^0(\xi) - u(\xi, t)) d\xi \right\},$$

$x_0 = x_0(t)$, x – произвольно выбранные точки на числовой прямой.

Следуя [3], разобьем числовую ось R и соответственно полосу Π на конечные отрезки и прямоугольники:

$$R = \bigcup_{N=-\infty}^{\infty} \bar{\Omega}_N, \quad \Pi = \bigcup_{N=-\infty}^{\infty} \bar{Q}_N,$$

$$\Omega_N = \{x \mid N < x < N+1\}, \quad Q_N = \Omega_N \times (0, T), \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Лемма 2. При выполнении условий теоремы имеют место оценки:

$$0 < K_1^{-1} \leq B(x, t) \leq K_1, \quad 0 < K_2^{-1} \leq I(t) \leq K_2, \quad \forall (x, t) \in \Pi.$$

Доказательство. Будем изучать соотношения между искомыми функциями на каждом Q_N . Воспользуемся произволом точки x_0 . Предполагаем, что x_0 выбрана в Ω_N .

Ввиду того, что точки x_0 и x из одного отрезка $\bar{\Omega}_N$, по неравенству Коши, используя (6) и условия теоремы, имеем:

$$\left| \int_{\alpha(t)}^x (u_0(\xi) - u(\xi, t)) d\xi \right| \leq \left(\int_N^{N+1} (u_0 - f)^2 d\xi \right)^{1/2} + \left(\int_N^{N+1} (u - f)^2 d\xi \right)^{1/2} \leq (2E)^{1/2} + C.$$

Отсюда вытекают оценки для функции $B(x, t)$, не зависящие от выбора прямоугольника $\bar{Q}_N$.

Далее, разобьем числовую ось на две полуоси: $R = \Omega_1 \cup \Omega_2$ и соответственно полосу $\Pi = Q_1 \cup Q_2$, где $\Omega_1 = (-\infty, 0)$, $\Omega_2 = (0, \infty)$, $Q_i = \Omega_i \times (0, T)$. Теперь будем предполагать, что точка x_0 выбрана в соответствующей области Ω_i ($i=1, 2$).

Рассмотрим сначала область $\Omega_1 = (-\infty, 0)$. Здесь $C^{-1} \leq \rho^0(x) \leq C$. Разобьем Ω_1 на единичные отрезки. Тогда из (6) следуют неравенства [3, 4]:

$$C^{-1} \leq \int_N^{N+1} \rho^0 v dx \leq C, \quad C^{-1} \leq \int_N^{N+1} \rho^0 \theta dx \leq C. \quad (9)$$

Перепишем (8) следующим образом:

$$v(x, t)I(t) = B^{-1}(x, t) \left[1 + \int_0^t \rho^0(x) \theta(x, \tau) B(x, \tau) I(\tau) d\tau \right]. \quad (10)$$

Умножим обе части этого равенства на $\rho^0(x)$ и проинтегрируем по x от N до $N+1$. Учитывая оценки для функции $B(x, t)$, (9), после применения леммы Гронуолла имеем утверждение леммы.

Теперь рассмотрим $\Omega_2 = (0, \infty)$. В этой области об ограниченности снизу начальной плотности говорить нельзя. Заметим, что в Ω_2

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \rho^0 v dx &\leq C \left[\int_0^\infty \rho^0 (v - \ln v - 1) dx + \int_0^\infty \rho^0 dx \right] \leq C_8, \\ \int_0^\infty \rho^0 \theta dx &\leq C \left[\int_0^\infty \rho^0 (\theta - \ln \theta - 1) dx + \int_0^\infty \rho^0 dx \right] \leq C_9 \end{aligned} \quad (11)$$

в силу неотрицательности функций $\rho^0(v - \ln v - 1)$, $\rho^0(\theta - \ln \theta - 1)$.

Разобьем область Ω_2 на две:

$$A_1(t) = \{x \in \Omega_2 : v(x, t) < \varepsilon\}, \quad A_2(t) = \{x \in \Omega_2 : v(x, t) \geq \varepsilon\}.$$

Обозначим $B = (0, b)$, где $b \in \Omega_2$ — фиксированная точка. Из (6) следует неравенство

$$\int_{B \cap A_1} \rho^0 v dx - \int_{B \cap A_1} \rho^0 \ln v dx - \int_{B \cap A_1} \rho^0 dx \leq C.$$

Отсюда $\ln \frac{1}{\varepsilon} \int_{B \cap A_1} \rho^0 dx \leq C$. Применяя теорему о среднем, имеем: $\mu(B \cap A_1) \leq \frac{C}{\rho^0(\xi) \cdot \ln \frac{1}{\varepsilon}}$, где $\xi \in B$.

Здесь $\mu(B \cap A_1)$ — мера множества $B \cap A_1$. Выбираем ε достаточно малым. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \rho^0 v dx &= \int_{B \cap A_1} \rho^0 v dx + \int_{B \cap A_2} \rho^0 v dx + \int_{(0, \infty)/B} \rho^0 v dx \geq \int_{B \cap A_2} \rho^0 v dx \geq \\ &\geq \varepsilon \rho^0(\xi_1) \mu(B \cap A_2) = \varepsilon \rho^0(\xi_1) [\mu(B) - \mu(B \cap A_1)] > C \end{aligned}$$

в силу выбора ε и $\xi_1 \in B$. Учитывая полученное неравенство, соотношения (11), из (10), умножая его на $\rho^0(x)$ и интегрируя по x от 0 до $+\infty$, выводим утверждение леммы для области Ω_2 . Таким образом, лемма полностью доказана.

При доказательстве леммы 2 получены оценки:

$$\int_N^{N+1} \rho^0(x) v(x, t) dx \leq K_3, \quad \int_N^{N+1} \rho^0(x) \theta(x, t) dx \leq K_4, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (12)$$

Пусть $h(x, t)$ — непрерывная функция. Введем обозначения:

$$M_h(t) = \max_{|x| < \infty} h(x, t), \quad m_h(t) = \min_{|x| < \infty} h(x, t).$$

Лемма 3. При выполнении условий теоремы имеют место оценки:

$$m_v(t) \geq K_5, \quad m_\theta(t) \geq K_6, \quad M_v(t) \leq K_7, \quad \forall t \in [0, T].$$

Доказательство. Ограниченность удельного объема снизу следует из представления (8) с учетом оценок леммы 2. Строгая положительность температуры вытекает из уравнения теплопроводности системы (1). Докажем ограниченность удельного объема сверху.

Из соотношения (8) и оценок леммы 2 вытекает неравенство

$$M_v(t) \leq C_{10} \left[1 + \int_0^t M_{\rho^0 \theta}(\tau) d\tau \right]. \quad (13)$$

Имеет место оценка [4, 5]: $M_{\rho^0 \theta}(t) \leq C_\varepsilon A(t) M_v(t) + C$, где

$$A(t) = \int \frac{\theta_x^2}{v \theta^2} dx. \quad (14)$$

Из (14) и (13) находим

$$M_v(t) \leq C_{11} \left[1 + \int_0^t A(\tau) M_v(\tau) d\tau \right].$$

Применяя лемму Гронуолла с учетом (6), выводим ограниченность удельного объема сверху. Лемма доказана.

Из (14) и леммы 3 вытекает оценка:

$$\int_0^t M_{\rho^0 \theta}(\tau) d\tau \leq K_8, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (15)$$

Лемма 4. При выполнении условий теоремы имеют место оценки:

$$\int_0^T \left(\|u_x(t)\|^2 + \|H_x(t)\|^2 \right) dt \leq K_9. \quad (16)$$

Доказательство. Умножим второе уравнение системы (1) на $(u - f)$ и проинтегрируем по R :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \rho^0 (u - f)^2 dx + \int \frac{1}{v} u_x^2 dx + \int \rho^0 \frac{\theta}{v} f_x dx = \\ & = \int \left(\frac{1}{v} u_x f_x + \rho^0 \frac{\varphi \theta - 1}{\varphi v} u_x + \rho^0 \frac{u_x}{\varphi v} \right) dx = J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned} \quad (17)$$

Оценим каждое J_i ($i = \overline{1, 3}$), используя (4), (6), (15), лемму 3:

$$J_1 \leq \delta_1 \int \frac{1}{v} u_x^2 dx + C, \quad \delta_1 < \frac{1}{2}.$$

Для оценки J_2 разобьем числовую ось R на области:

$$\begin{aligned} \Omega_1(t) &= \{x \in R : \varphi \theta(x, t) > C_0\}, \\ \Omega_2(t) &= \{x \in R : \varphi \theta(x, t) \leq C_0, \varphi \theta(x, t) \neq 1\}, \quad C_0 = \text{const} > 1, \\ \Omega_3(t) &= \{x \in R : \varphi \theta(x, t) = 1\}. \end{aligned}$$

Справедливы неравенства [4]

$$\Omega_1(t): \frac{\varphi \theta - 1}{\varphi \theta - \ln \varphi \theta - 1} < C_{12}, \quad \Omega_2(t): \frac{|\varphi \theta - 1|}{\sqrt{\varphi \theta - \ln \varphi \theta - 1}} < C_{13}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{\Omega_1(t)} \rho^0 \frac{\varphi \theta - 1}{\varphi \theta - \ln \varphi \theta - 1} (\varphi \theta - \ln \varphi \theta - 1) \frac{u_x}{v} dx + \\ &+ \int_{\Omega_2(t)} \rho^0 \frac{\varphi \theta - 1}{\sqrt{\varphi \theta - \ln \varphi \theta - 1}} \sqrt{\varphi \theta - \ln \varphi \theta - 1} \frac{u_x}{v} dx \leq \delta_2 \int \frac{1}{v} u_x^2 dx + C_{\delta_2} M_{\rho^0 \theta} + C, \quad \delta_2 < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

При оценке следующего интеграла используем интегрирование по частям:

$$J_3 = \frac{d}{dt} \int \rho^0 \frac{\partial \ln v}{\partial t} dx = -\frac{d}{dt} \int \rho^0 (v - \ln v - 1) dx - \int \rho_x^0 (u - f) dx - \int \rho^0 f_x dx \leq \\ \leq -\frac{d}{dt} \int \rho^0 (v - \ln v - 1) dx + C.$$

Проинтегрируем (17) по t , используя полученные оценки для J_i , $i = \overline{1, 3}$. В итоге имеем утверждение леммы.

Лемма 5. При выполнении условий теоремы имеют место оценки:

$$\|v_x(t)\|^2 \leq K_{10}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Доказательство. Следует из представления (8), после дифференцирования его по x .

Проводя аналогичные рассуждения, можно получить все необходимые для доказательства существования обобщенного решения априорные оценки. Единственность решения доказывается составлением однородного уравнения относительно разности двух возможных решений [4]. Теорема доказана.

References

- 1 Bai Shi-i. The magnetic gas dynamics and dynamics of plasma. — M.: Peace, 1964.
- 2 Iskenderova J.A. Local solvability of the degenerating equations of magnetic gas dynamics // News of National Academy of Science of Kyrgyz Republic. — 2001. — № 1–2. — P. 11–17.
- 3 Antontsev S.N., Kazhikhov A.V., Monakhov V.N. Boundary Problems of Heterogeneous Fluid Mechanics. — Novosibirsk: Science, 1983. — P. 319.
- 4 Iskenderova J.A., Smagulov Sh. The Cauchy problem for the equations of a viscous heat-conducting gas with degenerating density // Comput. Maths. and Math. Phys. — 1993. — Vol. 33. — № 8. — P. 1109–1117.

Д.А.Искендерова

Жылуөткізгіш тұтқыр газ тендеуінің шешімі

Біркелкі стационарлық емес тұтқыр жылуөткізгіш газдың ағынын сипаттайтын дифференциалдық тендеулердің сызықтық емес жүйесі зерттелді. Бастапқы тығыздықтан туындаған Коши есебі шығарылды. Бастапқы мезетте барлық ізделіп отырған функциялар әр түрлі тұрақты шексіздікке ұмтылды, бір ғана ғаламдық жинақталған шешімнің болуының дәлелі априори бағалау әдісі арқылы жүзеге асты.

D.A.Iskenderova

Solvability of degenerating equations of a viscous heat-conducting gas

The nonlinear system of differential equations describing one-dimensional no stationary flow of a viscous heat-conducting gas is considered. The Cauchy problem with degenerate initial density is under study. At the initial time, the required functions tend to various constants at infinity. Existence of a unique global generalized solution is proved by a method of a priori estimates.

Р.С.Каренов

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: karenov_r@inbox.ru)

Применение методов теории массового обслуживания при исследовании взаимодействия смежных производственных подсистем на горнодобывающих предприятиях

Подчеркнуто, что за последнее время идеи и методы теории массового обслуживания широко распространяются во многих прикладных областях. Раскрыты проблемы горной промышленности, которые решает теория массового обслуживания. Рассмотрены условия формирования систем массового обслуживания, их основные элементы и характеристики. Сделана попытка создать методическое руководство по решению практических задач в горном деле с помощью методов теории массового обслуживания. На конкретном примере специфики добычи полезного ископаемого открытым способом показано, как рассчитать основные параметры некоторых систем массового обслуживания. На основе изучения производственной структуры шахты, как одного из свойств больших систем, исследована взаимозависимость между производственными подразделениями угольного предприятия с применением математического аппарата теории массового обслуживания. Предлагаемые методы и приемы расчетов проиллюстрированы примерами, взятыми из практики работы угольных шахт Карагандинского бассейна.

Ключевые слова: теория массового обслуживания, метод статистических испытаний, Монте-Карло, мощность экскаваторов, грузоподъемность машин.

Теория массового обслуживания в последние годы быстро развивается. Расширился круг вопросов, решаемых с помощью ее методов. По мере развития аналитического аппарата теории массового обслуживания выявилось, что постановки задач ее имеют весьма широкий характер, поскольку к ним приводят почти все направления современной практики (транспорт, медицина, экономика, военное дело, промышленность, сельское хозяйство и т.д.). В момент своего рождения и в современных постановках теория массового обслуживания применялась для описания дискретных процессов. Тем интереснее распространение ее методов, доведенных до числовых значений, для описания непрерывного процесса [1–3].

Теория массового обслуживания рассматривает, в частности, вопросы, связанные с возникновением различного рода задержек, устанавливает закономерности, определяющие длительность ожидания (простой оборудования, простой обслуживающего персонала), которые возникают вследствие непредвиденных, т.е. не поддающихся планированию задержек. Методы теории массового обслуживания позволяют оценить потери времени, связанные с этими задержками, и найти условия, сводящие к минимуму простой без нарушения принципа экономичности. В целом теория массового обслуживания занимается классом задач, под которые подходят все производственные или технологические процессы, когда один или несколько механизмов «обслуживают» поступающие в некоторой последовательности в систему обслуживания какие-то объекты. Основными характеристиками функционирования системы являются последовательность поступлений — «поток требований» и время обслуживания. Периоды между поступлениями очередных требований и время обслуживания одного требования подчиняются вероятностным законам [4–6].

В горном деле с помощью теории массового обслуживания могут быть определены: численность бригад (электриков, слесарей, механиков и т.д.), обслуживающих определенное количество производственных объектов; оптимальное соотношение транспортных единиц и горнодобывающих механизмов [7–10].

При открытом способе добычи полезных ископаемых примером может служить задача нахождения оптимального количества автомашин при работе заданного количества экскаваторов. В этом случае имеется вероятностное распределение во времени потока поступления машин, которые «обслуживаются» в течение некоторого времени экскаваторами. Простой могут возникать в связи с изменением состояния дорог, изменением разрабатываемых пород и т.д.

Пусть на карьере имеется m действующих экскаваторов и n автомашин. Среднее время рейса одной автомашины от экскаватора до места разгрузки и обратно равно некоторой величине $\frac{1}{\lambda}$, а среднее время погрузки экскаватором одной машины — $\frac{1}{\nu}$.

Можно допустить, что в этом случае вероятность P_1 того, что машины задержатся и не подойдут к экскаваторам за время t , уменьшается с ростом времени по показательному закону

$$P_1 = e^{-\lambda t}, \quad (1)$$

а вероятность P_2 того, что время погрузки τ будет меньше некоторого наперед заданного значения времени t , подчиняется закону

$$P_2(\tau < t) = 1 - e^{-\nu t}. \quad (2)$$

Дальнейшие рассуждения основываются на этом допущении. Аналитическое исследование такой системы дает следующие выражения для вероятности поступления к экскаваторам k машин:

$$P_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^k \cdot P_0, \quad (1 \leq k \leq m), \quad (3)$$

$$P_k = \frac{n!}{m^{k-m} \cdot m!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^k \cdot P_0, \quad (m < k \leq n), \quad (4)$$

где P_0 — вероятность того, что все экскаваторы свободны.

Если законы распределения вероятности (1) и (2) имеют другой вид, то не всегда удастся получить сравнительно простые выражения типа (3) и (4). В этих случаях теория массового обслуживания предлагает иные пути анализа системы. В частности, характеристики многих процессов массового обслуживания могут быть получены путем его моделирования на ЭВМ с использованием метода статистических испытаний (метод Монте-Карло).

Теория массового обслуживания позволяет определить такие показатели функционирования системы, как среднее число ожидающих погрузки машин и число простаивающих экскаваторов, коэффициенты простоя оборудования и т.д.

Для рассматриваемого примера разберем частный случай, когда имеется три экскаватора ($m=3$), двадцать автомашин ($n=20$), среднее время рейса $\frac{1}{\lambda}=1$ час и среднее время погрузки $\frac{1}{\nu}=6$ мин = 0,1 часа.

Используя уравнения (3) и (4), можно определить $\frac{P_k}{P_0}$ для $k=1, 2, \dots, 20$. Так как

$$\sum_{k=0}^n \frac{P_k}{P_0} = \frac{1}{P_0} \sum_{k=0}^n P_k = \frac{1}{P_0}, \quad (5)$$

то $P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{P_k}{P_0}}$, и отсюда

$$P_k = \frac{P_k}{P_0} \cdot \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{P_k}{P_0}}. \quad (6)$$

Значения $\frac{P_k}{P_0}$ и P_k при k , равном от 0 до 7, для рассматриваемого случая приведены в таблице 1.

Т а б л и ц а 1

Расчетная таблица, иллюстрирующая решение задачи нахождения оптимального количества автомашин при работе заданного количества экскаваторов

k	Число машин под погрузкой	Число ожидающих машин	Число свободных экскаваторов	$\frac{p_k}{p_0}$	p_k	$(k-3)p_k$
0	0	0	3	1,000	0,136	-
1	1	0	2	2,000	0,272	-
2	2	0	1	1,900	0,259	-
3	3	0	0	1,140	0,155	-
4	3	1	0	0,646	0,088	0,088
5	3	2	0	0,324	0,047	0,093
6	3	3	0	0,172	0,023	0,070
7	3	4	0	0,085	0,011	0,044

Математическое ожидание числа машин, которые ожидают погрузки:

$$M_1 = \sum_{k=4}^{20} (k-3)p_k = 0,339. \quad (7)$$

Коэффициент простоя машин в этом случае равен

$$\frac{M_1}{n} = \frac{0,339}{20} = 0,017. \quad (8)$$

Математическое ожидание числа свободных экскаваторов

$$M_2 = \sum_{k=0}^{m-1} (m-k)p_k = \sum_{k=0}^2 (3-k)p_k, \quad (9)$$

где M_2 — среднее число свободных экскаваторов. Для рассматриваемого примера $M_2 = 1,213$.

Коэффициент простоя экскаваторов

$$\frac{M_2}{m} = \frac{1,213}{3} = 0,404. \quad (10)$$

Задачу можно варьировать, изменяя мощность экскаваторов и грузоподъемность машин (изменение времени погрузки), число машин, форму организации работ и т.д. Просчет показателей, характеризующих каждый из вариантов, позволяет экономически обоснованно выбирать оптимальный вариант.

В зарубежной практике известно использование методов теории массового обслуживания при подземном способе добычи полезных ископаемых для увеличения коэффициента использования различного горношахтного оборудования с целью повышения производительности труда и снижения издержек производства. Для таких расчетов создается математическая модель исследуемого технологического процесса исходя из геологической характеристики месторождения, плана горных работ, числа очистных забоев, количества и типов машин и времени их работы. На основании этих данных определяются оптимальный порядок использования механизмов и рациональное соотношение между числом очистных забоев и количеством машин.

Практика функционирования угледобывающих предприятий Карагандинского бассейна (8 шахт угольного департамента АО «АрселорМиттал Темиртау») показывает, что современная шахта — чрезвычайно сложный объект. Она представляет собой совокупность взаимосвязанных технологических звеньев и производственно-административных участков и отделов: очистных и горнопроходческих забоев, внутришахтного транспорта, подъема, вентиляции, энергоснабжения, водоотлива, технологического комплекса на поверхности, административной и производственно-технологической служб и т.д. Производственные процессы выполняются индивидуальными машинами или установками (водоотлив), совокупностью машин и механизмов (очистные работы), а также сложными взаимосвязанными системами машин, механизмов и людей.

Это говорит о том, что на шахте используются однородные группы элементов, подэлементов, образующие как бы самостоятельные системы: техническую, технологическую, организации производства, экономическую и т.д.

Техническая система состоит из взаимосвязанного комплекса машин, оборудования. Она наименее подвижна, медленнее адаптируется к внешней среде. Изменение технической системы обусловлено научно-техническим прогрессом, с ускорением которого машины и оборудование морально стареют, а также интенсивностью эксплуатации, от которой зависит физический износ. То и другое протекает неравномерно как во времени, так и между различными группами оборудования по процессам. Вследствие этого техническая система нуждается в выравнивании производственных мощностей путем модернизации оборудования, рациональной организации ремонта, снабжения энергией всех видов, быстрого перемещения предметов труда.

Технологическая система выражается в последовательности операций и процессов производства, в ходе которых создается продукция. Она включает в себя контроль за выполнением работы на отдельных операциях. Управление технологической системой сводится к разработке технологии производства с позиций его эффективности.

Система организации производства представляет собой производственные взаимосвязи внутри системы машин и кооперации труда. Она позволяет рационально использовать в совокупности труд, оборудование, предметы труда, производственные площади, создает условия для нормального протекания производственного процесса наиболее прогрессивными приемами и методами с наименьшими затратами.

Экономическая система выражает собой единство экономических процессов и экономических связей всех сторон производства. Она решает задачу наиболее полного использования возможностей всех систем производства для повышения его экономической эффективности.

Перечисленные системы взаимосвязаны и взаимообусловлены между собой и в единстве составляют предприятие как производственную систему, к которой относится и угольная шахта [11–14].

На самом деле, на шахте производственные подсистемы «очистные работы → подземный транспорт → подъем → технологический комплекс на поверхности» тесно взаимосвязаны. От пропускной способности последующей подсистемы зависит работа предыдущей. В этой последовательности каждую смежную пару можно считать системой массового обслуживания (СМО). Всего на шахте таких систем три пары: очистной забой (погрузочный пункт) → подземный транспорт (электровоз); электровозы → подъем (околоствольный двор); подъем → технологический комплекс на поверхности.

На примере первой пары рассмотрим методы отыскания основных характеристик для оценки процесса функционирования обслуживающей и обслуживаемой систем. За входящий поток требований принимаем прибытие электровозов к погрузочным пунктам лав. Число электровозов, поступающих к лавам в единицу времени, — величина случайная, для полной характеристики которой нужно знать ее закон распределения. Допускается, что данный поток простейший, так как он имеет три свойства:

- стационарность (при условии выполнения ритмичности погрузки среднее число требуемых электровозов в единицу времени постоянно);
- отсутствие последствия, т.е. число электровозов, поступающих в некоторый промежуток времени, не зависит от числа электровозов, обслуженных в предыдущем промежутке;
- ординарность, т.е. в данный момент под погрузку не может быть поставлено более одного электровоза.

Следовательно, поток требований подчиняется пуассоновскому закону распределения, т.е.

$$P_k(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad (11)$$

где $P_k(t)$ — вероятность того, что в обслуживаемую систему, т.е. к очистному забою, за время t прибывает k электровозов. Среднее число электровозов, поступающих под погрузку за время t , определяется как математическое ожидание

$$M[k(t)] = \lambda t, \quad (12)$$

где λ — среднее число электровозов, поступающих в единицу времени под погрузку, оно характеризует интенсивность потока.

Промежуток времени между поступлением электровозов под погрузку тоже случайная величина. Она подчиняется интегральному показательному закону распределения

$$F(t) = P\{T_{\text{пром}} \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t}, \quad (13)$$

а плотность распределения промежутков

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad (14)$$

где $T_{\text{пром}}$ — длительность промежутка между двумя требованиями.

Как показывает анализ, время обслуживания одного электровоза погрузочным пунктом на угольной шахте меняет свои значения тоже в значительных пределах. При простейшем потоке требований и показательном распределении времени обслуживания имеем

$$\begin{aligned} F(t) &= P\{T_{\text{обсл}} \leq t\} = 1 - e^{-vt}, \\ f(t) &= ve^{-vt}, \end{aligned} \quad (15)$$

где v — параметр времени обслуживания.

При этом среднее время загрузки одного состава под лавой равно математическому ожиданию

$$M[T_{\text{обсл}}] = \frac{1}{v}. \quad (16)$$

Из сопоставления закона распределения времени поступления электровозов под лавы с законом распределения времени обслуживания состава видим, что величина $\frac{\lambda}{v} = \lambda \cdot \frac{1}{v}$ означает количество электровозосоставов, поступающих под лаву в течение времени загрузки одного, находящегося под погрузкой.

В изучаемой нами системе массового обслуживания «погрузочный пункт лавы, из которого загружается уголь в вагонетки, и электровоз, транспортирующий его от лавы до стволов», участвует r очистных забоев и n электровозов. Считаем, что интенсивность потока электровозосоставов и время погрузки угля под лавами пропорциональны числу электровозов n и погрузочных пунктов r .

Учитывая, что число погрузочных пунктов лав и электровозосоставов ограниченное и определенное в течение изучаемого времени, систему можно рассматривать как замкнутую систему массового обслуживания с ограниченным потоком требования и использовать соответствующий математический аппарат для отыскания таких параметров, как длина очереди, время ожидания и др., характеризующих функционирование смежных подсистем шахты.

В исследуемой СМО, если погрузочные пункты заняты, то электровозосостав будет простаивать. Пусть λ — интенсивность потока электровозосоставов под погрузку к одному погрузочному пункту, $\frac{1}{v}$ — среднее время загрузки под лавой одного состава, тогда ε — вероятность различных состояний системы будет определяться следующим образом. *Пример:* P_k — вероятность одновременного пребывания под погрузкой k электровозосоставов из n возможных, P_0 — вероятность того, что под погрузкой в данный момент времени не находится ни одного состава.

1. $k \leq r$ ($k = 0, 1, 2, \dots, r$). При этом условии, если электровоз прибыл под лаву, погрузочный пункт свободен и имеется загруженный состав, то он немедленно обменивает порожний состав на груженный и отбывает.

Из теории массового обслуживания для $k \leq r$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} P_1 &= n \cdot P_0 \cdot \frac{\lambda}{v}, \\ P_2 &= \frac{n-1}{2} P_1 \cdot \frac{\lambda}{v}, \\ P_r &= \frac{n-(r-1)}{r} P_{r-1} \cdot \frac{\lambda}{v}. \end{aligned} \quad (17)$$

2. $k > r$ ($k = r+1, r+2, \dots, n$). При этом электровозосостав застает погрузочные пункты занятыми и становится в очередь. Соответствующие вероятности выражаются формулами:

$$\begin{aligned} P_{r+1} &= (n-r) P_r \cdot \frac{\lambda}{vr}, \\ P_{r+2} &= [n-(r+1)] P_{r+1} \cdot \frac{\lambda}{vr}, \end{aligned}$$

$$P_n = [n - (n-1)]P_{n-1} \cdot \frac{\lambda}{vr}. \quad (18)$$

Подставляя значения P_1 в P_2 , а P_2 в P_3 и т.д., получим выражение для всех P_k через P_0 : для $k \leq r$:

$$\begin{aligned} P_1 &= n \cdot P_0 \cdot \frac{\lambda}{v}, \\ P_2 &= \frac{n(n-1)}{2!} P_0 \left(\frac{\lambda}{v}\right)^2, \\ P_3 &= \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} P_0 \left(\frac{\lambda}{v}\right)^3, \\ P_r &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(r-1)]}{r!} P_0 \left(\frac{\lambda}{v}\right)^r; \end{aligned} \quad (19)$$

для $k > r$:

$$\begin{aligned} P_{r+1} &= \frac{n(n-1)\dots(n-r)}{r!} P_0 \left(\frac{\lambda}{v}\right)^r \frac{\lambda}{vr}, \\ P_{r+2} &= \frac{n(n-1)\dots[n-(r+1)]}{r!} P_0 \left(\frac{\lambda}{v}\right)^r \cdot \left(\frac{\lambda}{vr}\right)^2, \\ P_n &= \frac{n!}{r!} P_0 \left(\frac{\lambda}{v}\right)^r \cdot \left(\frac{\lambda}{vr}\right)^{n-r}. \end{aligned} \quad (20)$$

Известно, что $\sum_{k=0}^n P_k = 1$. Из этого равенства можно найти P_0 , а затем, подставляя P_0 в выражения $P_1, P_2, \dots, P_n$, — все вероятности P_k ($k=1, 2, \dots, n$). Зная P_k , можно вычислить нужные нам вероятностные характеристики изучаемой подсистемы. Обозначим через c среднее число электровозосоставов, находящихся под лавами и ожидающих очереди. Оно равно математическому ожиданию случайной величины k , т.е.

$$a = M(k) = \sum_{k=0}^n k \cdot P_k. \quad (21)$$

Тогда $a = \frac{a}{n}$ есть коэффициент простоя одного электровоза в связи с пребыванием под погрузкой и ее ожиданием. Вероятность того, что электровозам придется ожидать погрузки, т.е. все погрузочные пункты заняты, равна

$$\Pi = \sum_{k=r}^n P_k. \quad (22)$$

Среднее число электровозов, ожидающих очереди, определяется как математическое ожидание величин $(k-r)$, т.е.

$$b = M(k-r) = \sum_{k=r}^n (k-r)P_k, \quad (23)$$

и представляет собой длину очереди.

Коэффициент простоя электровозов в ожидании погрузки определяется как отношение средней длины очереди к числу обслуживаемых электровозосоставов, т.е.

$$\beta = \frac{b}{n}. \quad (24)$$

Среднее время ожидания $T_{\text{ожид}}$ определяется путем умножения среднего числа электровозов, ожидающих обслуживания, на средний промежуток времени между поступлением требований от обслуживаемой системы, т.е.

$$T_{\text{ожид}} = b \cdot \frac{1}{n\lambda}. \quad (25)$$

Среднее число свободных погрузочных пунктов равно

$$c = M(r - k) = \sum_{k=0}^r (r - k) P_k. \quad (26)$$

Коэффициент простоя очистного забоя будет

$$\mu = \frac{c}{r}. \quad (27)$$

В результате решения системы уравнений выясняются длина очереди (b), коэффициент простоя элементов обслуживающей системы (p), среднее время ожидания обслуживания $T_{\text{ожид}}$ и коэффициент простоя обслуживающей системы (μ).

Полученные данные позволяют дать оценку взаимодействия обслуживаемой и обслуживающей систем.

Изучение взаимодействия подсистем угольной шахты «очистные работы → подземный транспорт → подъем угля → техкомплекс на поверхности» с помощью теории массового обслуживания предполагает наличие таких исходных данных, процесс получения которых дает сведения, позволяющие судить о качественном состоянии взаимодействия и производственных возможностях каждого звена или подсистемы.

Исследование обслуживания начинается с изучения входящего потока. Входящим потоком называются требования, поступающие в обслуживаемую систему. Например, на первом этапе исследования взаимодействия смежных подсистем «очистной забой → транспорт» входящий поток для обслуживающей системы — это количество добываемого в лавах угля, которое необходимо вывезти электровозам от лавы до околоствольного двора.

Число требований, поступающих в единицу времени, рассматривается как случайная величина и устанавливается статистически.

Поток требований в системе массового обслуживания можно устанавливать, наблюдая либо за частотой поступления требований в обслуживающую систему, либо за временем, свободным от требований.

Для наших целей поток требований целесообразно определить на основе наблюдений за частотой их поступления от обслуживаемой системы в обслуживающую. Лучшим методом данного определения являются хронометражные наблюдения за временем, достаточным для выявления интересующих нас закономерностей. Однако возможности для проведения хронометражных наблюдений не всегда имеются, а потребность взаимоувязки смежных производственных звеньев и подсистем возникает не реже одного раза в год. Это обусловлено тем, что совершенствование технологии, организации и внедрение более совершенной производительной техники происходят неравномерно (неодновременно) по всем звеньям и подсистемам. Например, в настоящее время в угольной промышленности наиболее высокими темпами совершенствуются техника и технология на очистных работах, медленнее — на транспорте, и значительное время почти не изменяются ни технологические, ни технические условия обмена порожних вагонов на груженные в околоствольных дворах шахт, при подъеме угля и породы на поверхность, при транспортировке угля от ствола в бункер или на склад.

Неравномерность технического прогресса по производственным подсистемам, выполняющим общую цель — добычу и отгрузку угля, приводит к диспропорциям.

Итак, хронометражные наблюдения, которые в настоящее время носят эпизодический характер, недостаточны для получения нужной нам информации, хотя полностью исключить их нельзя, особенно при анализе данных о частоте поступления требований и количественной оценке взаимодействия с помощью СМО.

Мы предлагаем изучать поток требований на основе существующего на шахте учета добычи угля в течение смены по каждой лаве. Объем добычи угля на шахте и по лавам за каждый час работы отражен в книгах наряда или учета добычи. Эти данные используются для оперативного контроля за ходом производства, поэтому в них отражены зачастую причины простоев как шахты в целом, так и ее звеньев, подсистем.

В заключение хотелось бы более подробно остановиться на следующей тенденции развития подземного транспорта на предприятиях по добыче угля.

Как известно, системы подземного транспорта угольных шахт характеризуются значительной протяженностью и разнообразием оборудования. Они существуют без особых изменений техники и технологии на протяжении 10 лет и более, чем определяется консерватизм таких систем, т. е. большая

зависимость их состояния от процессов, происходящих в предшествующие периоды. Это в меньшей степени существенно для очистных или подготовительных работ, поскольку переход в новый забой позволяет изменить технику и технологию их ведения. Без ретроспективного анализа невозможно объективно оценить основные тенденции развития подземного транспорта. Для выполнения анализа необходимо выбрать соответствующие показатели, которые должны быть линейно независимыми один от другого, что минимизирует их число, и определяться по принятым в угольной промышленности формам статистической отчетности; характеризовать наиболее существенные параметры транспортной системы; давать интегральную оценку не отдельным элементам, а системе в целом. Состав и характер этих показателей будут зависеть от того, рассматривается ли отдельная шахта или группа шахт, входящих в регион (бассейн).

При оценке эффективности мероприятий по совершенствованию подземного транспорта отдельной шахты, как правило, учитываются приведенные и капитальные затраты, сокращение штата обслуживающего персонала, повышение пропускной способности отдельных транспортных звеньев, снижение аварийности и потерь добычи. При рассмотрении общих тенденций в развитии подземного транспорта шахт региона (бассейна) такие показатели неприемлемы из-за сложности их определения и малой достоверности. В этом случае наиболее представительным является показатель трудоемкости, который при довольно высокой достоверности дает интегральную оценку степени совершенствования систем подземного транспорта и эффективности проводимой технической политики.

Практика работы шахт угольного департамента АО «АрселорМиттал Темиртау» показывает, что в последние годы, по мере углубления разработок, происходили деконцентрация горных работ, снижение нагрузок на шахту, транспортные магистрали и узлы, на очистной забой. Этим отрицательным тенденциям были противопоставлены чисто транспортные факторы: рост конвейеризации горизонтальных и наклонных выработок, повышение технологического и организационного уровней транспорта, техническое перевооружение локомотивной откатки.

Как показывают прогнозные расчеты с применением математического аппарата теории массового обслуживания, в будущем должно уменьшиться значение конвейеризации. На наклонных выработках она приближается к пределу насыщения, а на горизонтальных ее эффективность уменьшается из-за низкой концентрации горных работ и связанной с этим малой нагрузки на транспортные магистрали. Особое внимание нужно уделить повышению производительности электровозов. Наибольшие ее потери связаны с нерациональным путевым развитием и простаиванием электровозов перед однопутевыми участками, с плохой организацией локомотивной откатки.

Обобщая сказанное выше, можно отметить, что в ожидаемой перспективе на шахтах Карагандинского бассейна основные резервы снижения трудоемкости подземного транспорта все-таки заключены в совершенствовании технологии и организации его работы, в первую очередь локомотивной откатки.

References

- 1 *Labeker L.G., Babeshko L.O.* The queuing theory in economic sphere: the Manual. — M.: Banks and stock exchanges, UNITI, 1998. — 319 p.
- 2 *Novikov O.A., Petukhov S.I.* Cocks of SI. Applied questions of the queuing theory. — M.: Soviet radio, 1969. — 400 p.
- 3 *Saati T.L.* Element of the queueing theory and its applications. — M.: Soviet radio, 1965. — 511 p.
- 4 *Chetyrkin E.M.* The queueing theory and its application in economy. — M.: Statistics, 1971. — 104 p.
- 5 *Aldokhin L.P.* The queueing theory in the industry. — M.: Economy, 1970. — 207 p.
- 6 *Ivchenko G.I., Kashtanov V.A., Kovalenko I.N.* The queuing theory. — M.: Higher school, 1982. — 256 p.
- 7 *Lukin A.I.* Queueing systems. — M.: Military publishing house, 1980. — 189 p.
- 8 *Gnedenko B.V., Kovalenko I.N.* Introduction in the queuing theory. — M.: Science. The main edition of the physical and mathematical literature, 1966. — 432 p.
- 9 *Astashkin N.V.* Application of probabilistic queueing systems in mining. — M.: Bowels, 1971. — 160 p.
- 10 *Shulga J.N., Suslov O. P., Anokhin B.C.* Application of methods of the queuing theory at research of processes of extraction and coal transportation. — M.: Bowels, 1971. — 160 p.
- 11 *Kosmambetova R.I., Fedorova E.M.* Perfection of industrial structure of collieries. — Alma-Ata: Science of KazSSR, 1976. — 192 p.
- 12 *Karenov R.S.* Modeling and forecasting of efficiency of mountain manufacture in market conditions. — Karaganda: IPZ "Professional formation", 2006. — 280 p.
- 13 *Karenov R.S.* Formation of the market of a mineralno-source of raw materials of Kazakhstan. — Karaganda: IPZ "Professional formation", 2008. — 276 p.
- 14 *Karenov R.S.* Priorities of strategy of industrially-innovative development and mining the industries of Kazakhstan. — Astana: Publishing house KazUeFmT, 2010. — 539 p.

Р.С.Каренов

Кен кәсіпорындағы іргелес өндірістік жүйелердің өзара ықпалдасуын зерттеуде жаппай қызмет көрсету ілімі тәсілдерінің қолданылуы

Соңғы уақытта жаппай қызмет көрсету ілімі идеялары мен тәсілдері көптеген қолданбалы салаларда кеңінен таралғаны көрсетілген. Кен өнеркәсібіндегі жаппай қызмет көрсету жүйелерінің қалыптасу шарттары, олардың негізгі элементтері және сипаттамалары қарастырылған. Жаппай қызмет көрсету ілімі тәсілдері көмегімен кен ісіндегі тәжірибелік міндеттерді шешу бойынша әдістемелік басшылық жасауға ұмтылыс жасалған. Пайдалы қазбаларды ашық әдіспен игеру ерекшеліктерінің нақты мысалында жаппай қызмет көрсетудің кейбір жүйелерінің негізгі параметрлерін қалай есептеуге болатындығы көрсетілген. Үлкен жүйелер қасиеттерінің бірі ретіндегі көмір шахтасының өндірістік құрылымын талдау барысында жаппай қызмет көрсету ілімінің математикалық аппаратын қолдана отырып, көмір өндіру кәсіпорынынның өндірістік бөлімшелері арасындағы өзара байланыс зерттелген. Ұсынылған тәсілдер мен есептеулер әдістері Қарағанды бассейні көмір шахталарының жұмыс тәжірибесінен алынған мысалдармен кескінделген.

R.S.Karenov

Application of methods of the queuing theory at research of interaction of adjacent industrial subsystems at the mining enterprises

It is underlined that lately ideas and methods of the queuing theory widely extend in many applied areas. Problems of mining industry which are solved by the queuing theory are revealed. Conditions of formation of queuing systems, their basic elements and characteristics are considered. Creating a methodical management under the decision of practical problems in mining by means of methods of the queuing theory is attempted. On a concrete example of specificity of extraction of a mineral by open way it is shown how to calculate key parameters of some queuing systems. Studying industrial structure of mine as one of properties of the big systems, interdependence between industrial divisions of the coal enterprise with application of mathematical apparatus of the queuing theory is investigated. Offered methods and receptions of calculations are illustrated by the examples taken from practice of work of collieries of the Karaganda pool.

УДК 517.5

С.С.Кудайбергенов, С.Г.Сабитова

Южно-Казахстанский государственный университет им. М.Ауезова, Шымкент (E-mail: svetamath88@mail.ru)

Восстановление решения уравнения Пуассона на классе Коробова

Рассмотрена задача восстановления решения уравнения Пуассона, представленного в виде ряда. Получена точная в степенной шкале оценка погрешности восстановления в случае, когда правая часть уравнения принадлежит классу Коробова. Для построения оператора восстановления использованы метод Шерниязова и узлы Смоляка. Доказано, что полученный результат совпадает с ранее полученным результатом Е.А.Баилова, Н.Темиргалиева, однако предложенный оператор восстановления отличается своей простотой и эффективностью при вычислениях на ЭВМ.

Ключевые слова: нормированные пространства, уравнение Пуассона, класс Коробова, сетка Шерниязова, Смоляк, неравенство Хаусдорфа-Юнга.

Постановка задачи и формулировка основных результатов

Сформулируем общую постановку задачи восстановления.

Пусть даны два нормированных пространства X и Y числовых функций, определённых соответственно на множествах Ω и Ω_1 . Пусть $F \subset X$ и $Tf = u(y; f)$ есть отображение F в Y .

Для каждого N через $\{(l^{(N)}; \varphi_N)\}$ обозначим множество всевозможных пар $(l^{(N)}; \varphi_N)$, где $l^{(N)} = (l_1, \dots, l_N)$ есть набор функционалов $l_j: F \rightarrow C$ ($j=1, \dots, N$), $\varphi_N \equiv \varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; y)$ — измеримая функция, действующая из $C^N \times \Omega_1$ в C (C — поле комплексных чисел, $C^N = C \times \dots \times C$).

Положим для $(l^{(N)}; \varphi_N) \in \{(l^{(N)}; \varphi_N)\}$

$$\delta_N((l^{(N)}; \varphi_N), T, F)_Y = \sup_{f \in F} \|u(y; f) - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); y)\|_Y \quad (1)$$

и для некоторого $D_N \subset \{(l^{(N)}; \varphi_N)\}$

$$\delta_N(D_N, T, F)_Y = \inf_{(l^{(N)}; \varphi_N) \in D_N} \delta_N((l^{(N)}; \varphi_N), T, F)_Y. \quad (2)$$

Задача восстановления $u(y; f)$ заключается в получении оценок сверху и оценок снизу для величины (2) (желательно совпадающих с точностью для констант) и в указании пары $(l^{(N)}; \varphi_N)$ из D_N , реализующей оценку сверху.

Конкретизируя в (1), (2) операторы T , множества D_N , пространства X и Y и классы F ($F \subset X$), получаем различные постановки задач.

Одной из самых распространённых конкретизаций множества D_N является случай, когда в качестве функционалов $l^{(N)} = l^{(N)}(f) = (l_1(f), \dots, l_N(f))$ берутся значения функции f в узлах сетки $\{\xi\}_{j=1}^N$, т.е. $l_j(f) = f(\xi_j)$ ($j=1, \dots, N$). В данной работе мы будем рассматривать именно эту конкретизацию D_N и в (2) вместо $\delta_N(D_N, T, F)_Y$ будем писать $\delta_N(T, F)_Y$.

При $X = Y$ и $Tf = f$ задача (1), (2) есть задача восстановления функций из класса F . Другой её конкретизацией является задача восстановления решений уравнения в частных производных, когда $Tf = u(y, f)$ есть решение уравнения с краевыми и начальными условиями или правой частью $f(x)$.

Задача восстановления решений уравнения теплопроводности изучена Хуа Ло Кеном, Вань Юанем [1] и К.Е.Шернязовым [2]. Н.С.Бахваловым [3] также рассмотрено численное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом конечных разностей с применением равномерных и неравномерных сеток.

Задача восстановления решений уравнения Пуассона по значениям в точках правой части f для классов Соболева W_2^r и классов Никольского-Бесова $B_{q,0}^r$ была рассмотрена в работах авторов [4–5].

Сначала дадим некоторые определения.

Уравнение Пуассона — эллиптическое дифференциальное уравнение в частных производных, имеющее вид

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} = f. \quad (3)$$

Если $\hat{f}(0) \neq 0$, то при любом краевом условии существует непрерывная на $[0, 1]^s$ функция $w(x)$ такая, что $\Delta w \equiv 1$ на $[0, 1]^s$, зависящая от краевого условия, и решение уравнения (3) имеет вид:

$$u_w(x, f) = w(x) \cdot \hat{f}(0) - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m \in Z^s} \frac{* \hat{f}(m)}{(m, m)} e^{2\pi i(m, x)}, \quad (4)$$

где Z^s — целочисленная решетка s -мерного пространства $R^s = R \times \dots \times R$ (звёздочка в знаке суммы означает, что $m = (0, \dots, 0)$ в суммировании не участвует).

Если же $f(x_1, \dots, x_s)$ нечетна по каждой из переменных $x_1, \dots, x_s$, то функция

$$u(x, f) = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{m \in Z^s} \frac{* \hat{f}(m)}{(m, m)} e^{2\pi i(m, x)}$$

является решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона, удовлетворяющим на $[0,1]^s$ нулевым граничным условиям [6].

Обратно, как легко проверить, всякая функция вида (4) удовлетворяет уравнению (3) на $[0,1]^s$.

Определение 1. Классом Коробова $E_s^r, r > 1$ называется множество всех 1-периодических по каждой из переменных функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье

$$\hat{f}(m) = \int_{[0,1]^s} f(x) e^{-2\pi i(m,x)} dx,$$

которые удовлетворяют условию $|\hat{f}(m)| \leq (\bar{m})^{-r}$. Здесь $m = (m_1, \dots, m_s)$, $\bar{m}_j = \max\{1, |m_j|\}$, $\bar{m} = \bar{m}_1, \dots, \bar{m}_s, r > 1$.

Всюду через $c(\dots)$ будем обозначать некоторые положительные величины, разные, вообще говоря, в различных формулах, зависящие лишь от указанных в скобках параметров. При положительном A и любом B запись $B \ll_{\alpha, \beta, \dots} A$ означает, что $|B| \leq c(\alpha, \beta, \dots)A$. При положительных A и B запись $A \succ_{\alpha, \beta, \dots} B$ означает, что $A \ll_{\alpha, \beta, \dots} B \ll_{\alpha, \beta, \dots} A$.

Н.М.Коробов доказал [6], что если $a_1, \dots, a_s$ есть оптимальные коэффициенты по модулю $p = N$ и β — их индекс, то для решения

$$u(x, f) = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \frac{* \hat{f}(m)}{(m, m)} e^{2\pi i(m, x)}$$

и сетки

$$\xi^{(n)}(a) = \left(\left\{ \frac{n}{p} a_1 \right\}, \dots, \left\{ \frac{n}{p} a_s \right\} \right) \quad (n=1, \dots, p) \quad (5)$$

справедлива оценка $\left(N_1 = \left\lceil \sqrt{N} \ln^{\frac{\beta}{2}} N \right\rceil \right)$

$$\sup_{f \in E_s^r} \sup_{x \in [0,1]^s} \left| u(x, f) - \frac{1}{4\pi^2 N} \sum_{n=1}^N f(\xi^{(n)}(a)) \cdot \sum_{m \in \Gamma_{N_1}} \frac{*1}{(m, m)} e^{2\pi i(m, x - \xi^{(n)}(a))} \right| \ll \frac{(\ln N)^{\frac{r\beta}{2} + s}}{N^{\frac{r}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{s}}}.$$

Затем Е.А.Байлов, Н.Темиргалиев [7], используя в качестве сетки $\{\xi\}_{j=1}^N$ сетку Шернизова и оператор восстановления

$$(Jf)(x) = \sum_{\substack{\tau \in \mathbb{Z}_+^s \\ \|\tau\| < n}} \frac{1}{\det A_{n, \tau}} \sum_{k \in K(n, \tau)} f\left(k(A_{n, \tau}^{-1})'\right) \left(w(x) - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m \in p(\tau)} \frac{*e^{2\pi i(m, x - k(A_{n, \tau}^{-1})')}}{(m, m)} \right),$$

получили следующий результат.

Теорема 1. Пусть даны числа $s(s=2, 3, \dots), r > 1$ и $2 \leq q \leq \infty$. Тогда справедливы соотношения при $1 - \frac{1}{p} - \frac{2}{s} > 0$

$$\delta_N(u_w, E_s^r)_{L^p(0,1)^s} \ll \frac{(\ln N)^{\left(r + \frac{2}{s}\right)(s-1)}}{N^{r - \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{2}{s}\right)}},$$

при $1 - \frac{1}{p} - \frac{2}{s} \leq 0$

$$\delta_N(u_w, E_s^r)_{L^p(0,1)^s} \ll \frac{(\ln N)^{r(\beta+s)+s}}{N^r}.$$

Таким образом, оценка Коробова была улучшена почти в «квадрат раз» и доведена до окончательной в степенной шкале.

Мы рассмотрели данную задачу в случае

$$\Omega = \Omega_1 = [0,1]^s, X = Y = L^p(0,1)^s, \quad 2 \leq p < \infty, \quad F = E_s^r, \quad 1 - \frac{1}{p} - \frac{2}{s} > 0, \text{ используя в качестве сетки } \{\xi_j\}_{j=1}^N$$

сетку Смоляка [8] и оператор восстановления:

$$(Jf)(x) = w(x) \sum_{(v_1, \dots, v_s) \in \Omega_{(v^{(0)}, q)} \subset Z_{v^{(0)}}^s} \frac{1}{2^{v_1 + \dots + v_s}} \sum_{k_1=0}^{2^{v_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{v_s}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^s (k_j-1) \operatorname{sgn}(v_j - v_j^{(0)})} f\left(\frac{k_1}{2^{v_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{v_s}}\right) -$$

$$- \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n \in V_q} \frac{*1}{(n, n)} e^{2\pi i(n, x)} \sum_{(v_1, \dots, v_s) \in \Omega_{(v^{(n)}, q)} \subset Z_{v^{(n)}}^s} \frac{1}{2^{v_1 + \dots + v_s}} \sum_{k_1=0}^{2^{v_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{v_s}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^s (k_j-1) \operatorname{sgn}(v_j - v_j^{(n)})} f\left(\frac{k_1}{2^{v_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{v_s}}\right) e^{-2\pi i\left(n, \frac{k}{2^v}\right)},$$

где $q > 0$ и $V_q = \{(n_1, \dots, n_s) : (n_1, \dots, n_s) \in Z^s, 1 \leq n_1 \cdot \dots \cdot n_s < q\}$.

Число узлов в данном операторе равно $N \asymp 2^q \cdot q^{s-1}$.

Следует отметить, что в узлах данного оператора содержатся только рациональные числа, что дает дополнительное преимущество при вычислениях на ЭВМ.

Нами была получена

Теорема 2. Пусть даны числа $s(s = 2, 3, \dots)$, $r > 1$ и $2 \leq p \leq \infty$. При $1 - \frac{1}{p} - \frac{2}{s} > 0$ справедливо

соотношение

$$\delta_N(u_w, E_s^r)_{L^p(0,1)^s} \ll \frac{(\ln N)^{(s-1)\left(r+\frac{2}{s}\right)}}{N^r},$$

где $N \asymp 2^q - q^{s-1}$.

Как видно, полученная нами оценка совпадает с результатом Е.А.Баилова, Н.Темиргалиева.

Вспомогательные утверждения

Для заданного $n = (n_1, \dots, n_s)$ определим $v(n)$ из условий $\frac{1}{4} 2^{v(n)} < |n| \leq \frac{1}{2} 2^{v(n)}$. При $n = 0$ положим,

по определению, $v(0) = 0$.

Лемма 1 [9]. При данном $v^{(0)} = (v_1^{(0)}, \dots, v_s^{(0)}) \in Z^s$, $v_j^{(0)} \geq 0$ ($j = 1, \dots, s$) имеет место равенство

$$\hat{f}(0) - \Lambda_{\Omega(v^{(0)}, q)}(f) = \Delta_{\Omega(v^{(0)}, q)}(f),$$

где $Z_{v^{(0)}}^s \equiv \{(v_1, \dots, v_s) \in Z^s : v_j \geq v_j^{(0)} (j = 1, \dots, s)\}$, $0 \leq v_1^{(0)} + \dots + v_s^{(0)} < q$,

$$\Omega(v^{(0)}; q) \equiv \{(v_1, \dots, v_s) \in Z_{v^{(0)}}^s : v_1 + \dots + v_s \leq q\},$$

$$\Lambda_{\Omega(v^{(0)}, q)}(f) = \sum_{(v_1, \dots, v_s) \in \Omega(v^{(0)}, q)} \frac{1}{2^{v_1 + \dots + v_s}} \sum_{k_1=0}^{2^{v_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{v_s}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^s (k_j-1) \operatorname{sgn}(v_j - v_j^{(0)})} f\left(\frac{k_1}{2^{v_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{v_s}}\right),$$

$$\Delta_{\Omega(v^{(0)}, q)}(f) = \sum_{(v_1, \dots, v_s) \in Z_{v^{(0)}}^s \setminus \Omega(v^{(0)}, q)} (-1)^{\sum_{j=1}^s \operatorname{sgn}(v_j - v_j^{(0)})} \sum_{(t_1, \dots, t_s) \in Z^s} \hat{f}\left(\left(2t_1 + \operatorname{sgn}(v_1 - v_1^{(0)})\right) \cdot 2^{v_1-1}, \dots, \left(2t_s + \operatorname{sgn}(v_s - v_s^{(0)})\right) \cdot 2^{v_s-1}\right).$$

Лемма 2 [9]. Для данного $n = (n_1, \dots, n_s) \in Z^s$ имеет место равенство

$$\hat{f}(n) - \Lambda_{n, q}(f) = \int_{[0,1]^s} f(x) e^{-2\pi i(n, x)} dx - \Lambda_{n, q}(f) = \Delta_{n, q}(f),$$

где

$$v(n) = (v_1(n), \dots, v_s(n)), v_j(n) \in Z, v_j(n) \geq 0 (j = 1, \dots, s),$$

$$Z_{v^{(0)}}^s \equiv \left\{ (v_1, \dots, v_s) \in Z^s : v_j \geq v_j^{(n)} (j=1, \dots, s) \right\}, 0 \leq v_1^{(n)} + \dots + v_s^{(n)} < q,$$

$$\Omega_{(v^{(n)}; q)} = \left\{ (v_1, \dots, v_s) \in Z_{v^{(n)}}^s : v_1 + \dots + v_s < q \right\},$$

$$\Lambda_{n,q}(f) = \Lambda_{\Omega(v^{(n)}; q)}(f(\cdot) e^{-2\pi i(n, \cdot)})$$

и

$$\Delta_{n,q}(f) \equiv \Delta_{\Omega(v^{(n)}; q)}(f(\cdot) e^{-2\pi i(n, \cdot)}).$$

Лемма 3 [9]. Пусть чётная по каждой из s переменных монотонная функция $D_s(y_1, \dots, y_s)$ удовлетворяет Δ_2 – условию, т.е. существует $c > 0$ такое, что для всех $(y_1, \dots, y_s) \in R_+^s$ имеет место неравенство $g(2y_1, \dots, 2y_s) \leq cg(y_1, \dots, y_s)$.

Тогда равномерно по $n = (n_1, \dots, n_s) \in Z^s$ имеют место соотношения

$$D_s\left(n + \left(2t + \operatorname{sgn}(v - v(n))\right)2^{v-1}\right) \asymp D_s(t \cdot 2^v).$$

Лемма 4 [9]. Если $l > v_1^{(0)} + \dots + v_s^{(0)}$, то $\sum_{\substack{(v_1, \dots, v_s) : v_1 + \dots + v_s = l \\ v_j \geq v_j^{(0)} (j=1, \dots, s)}} 1 \asymp \left(l - (v_1^{(0)} + \dots + v_s^{(0)})\right)^{s-1}$.

Лемма 5 [9]. Если $q > A$, то $\sum_{l=q}^{\infty} \frac{(l-A)^{s-1}}{2^{lr}} \asymp \frac{(q-A)^{s-1}}{2^{qr}}$.

Лемма 6 [9]. Равномерно по всем q и $n = (n_1, \dots, n_s) \in Z^s$ таким, что $v_1(n) + \dots + v_s(n) < q$,

$$\log_2(\bar{n}_1 \cdots \bar{n}_s) \asymp_s v_1(n) + \dots + v_s(n),$$

$$q - (v_1(n) + v_2(n) + \dots + v_s(n)) \asymp_s q - \log_2(\bar{n}_1 \cdots \bar{n}_s).$$

Лемма 7 [9]. Для $n = (n_1, \dots, n_s) \in Z^s$, $t > 0$ имеет место равенство $\sum_{n_1 \cdots n_s \leq t} 1 \ll t(1 + \ln t)^{s-1}$.

Лемма 8 [6]. Пусть $r > 1$, $n = (n_1, \dots, n_s) \in Z^s$, тогда $\sum_{\substack{n_1 \cdots n_s > t \\ n_j \geq 1 (j=1, \dots, s)}} \frac{1}{(n_1 \cdots n_s)^r} \leq r \left(\frac{r}{r-1}\right)^s \frac{(1 + \ln t)^{s-1}}{t^{r-1}}$.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} u_w(x, f) - (Jf)(x) &= w(x) \hat{f}(0) - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n \in Z^s} \frac{\hat{f}(n)}{(n, n)} e^{2\pi i(n, x)} - w(x) \sum_{(v_1, \dots, v_s) \in \Omega_{(v^{(0)}; q)} \subset Z_{v^{(0)}}^s} \frac{1}{2^{v_1 + \dots + v_s}} \times \\ &\times \sum_{k_1=0}^{2^{v_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{v_s}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^s (k_j-1) \operatorname{sgn}(v_j - v_j^{(0)})} f\left(\frac{k_1}{2^{v_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{v_s}}\right) + \frac{1}{4\pi^2} \times \\ &\times \sum_{n \in V_q} \frac{1}{(n, n)} e^{2\pi i(n, x)} \sum_{(v_1, \dots, v_s) \in \Omega_{(v^{(n)}; q)} \subset Z_{v^{(n)}}^s} \frac{1}{2^{v_1 + \dots + v_s}} \sum_{k_1=0}^{2^{v_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{v_s}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^s (k_j-1) \operatorname{sgn}(v_j - v_j^{(n)})} f\left(\frac{k_1}{2^{v_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{v_s}}\right) e^{-2\pi i\left(n, \frac{k}{2^v}\right)} = \\ &= w(x) \cdot \left[\hat{f}(0) - \sum_{(v_1, \dots, v_s) \in \Omega_{(v^{(0)}; q)} \subset Z_{v^{(0)}}^s} \frac{1}{2^{v_1 + \dots + v_s}} \sum_{k_1=0}^{2^{v_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{v_s}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^s (k_j-1) \operatorname{sgn}(v_j - v_j^{(0)})} f\left(\frac{k_1}{2^{v_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{v_s}}\right) \right] - \\ &- \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n \in V_q} \frac{1}{(n, n)} e^{2\pi i(n, x)} \left[\hat{f}(n) - \sum_{(v_1, \dots, v_s) \in \Omega_{(v^{(n)}; q)} \subset Z_{v^{(n)}}^s} \frac{1}{2^{v_1 + \dots + v_s}} \sum_{k_1=0}^{2^{v_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{v_s}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^s (k_j-1) \operatorname{sgn}(v_j - v_j^{(n)})} f\left(\frac{k_1}{2^{v_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{v_s}}\right) e^{-2\pi i\left(n, \frac{k}{2^v}\right)} \right] - \\ &- \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n \in Z^s / V_q} \frac{\hat{f}(n)}{(n, n)} e^{2\pi i(n, x)} = J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Далее, применяя последовательно леммы 1 и 2, получим следующие равенства для J_1 и J_2 соответственно:

$$J_1 = w(x) \cdot \sum_{(v_1, \dots, v_s) \in Z_{v_0}^s / \Omega_{v^{(0)}, q}} (-1)^{\sum_{j=1}^s \text{sgn}(v_j - v_j^{(0)})} \sum_{(t_1, \dots, t_s) \in Z^s} \hat{f} \left(\left(2t_1 + \text{sgn}(v_1 - v_1^{(0)}) \right) 2^{v_1-1}, \dots, \left(2t_s + \text{sgn}(v_s - v_s^{(0)}) \right) 2^{v_s-1} \right),$$

$$J_2 = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n \in I'_q} \frac{*e^{2\pi i(n, x)}}{(n, n)} \sum_{(v_1, \dots, v_s) \in Z_{v(n)}^s / \Omega_{v^{(n)}, q}} (-1)^{\sum_{j=1}^s \text{sgn}(v_j - v_j^{(n)})} \sum_{(t_1, \dots, t_s) \in Z^s} \hat{f} \left(n_1 + \left(2t_1 + \text{sgn}(v_1 - v_1^{(n)}) \right) 2^{v_1-1}, \dots, n_s + \right. \\ \left. + \left(2t_s + \text{sgn}(v_s - v_s^{(n)}) \right) 2^{v_s-1} \right).$$

Оценим J_1 , учитывая определение класса E_s^r :

$$\|J_1\|_{L^p} = \|w(x)\|_{L^p} \cdot \left| \sum_{(v_1, \dots, v_s) \in Z_{v_0}^s / \Omega_{v^{(0)}, q}} (-1)^{\sum_{j=1}^s \text{sgn}(v_j - v_j^{(0)})} \sum_{(t_1, \dots, t_s) \in Z^s} \hat{f} \left(\left(2t_1 + \text{sgn}(v_1 - v_1^{(0)}) \right) 2^{v_1-1}, \dots, \left(2t_s + \text{sgn}(v_s - v_s^{(0)}) \right) 2^{v_s-1} \right) \right| \leq \\ << \sum_{(v_1, \dots, v_s) \in Z_{v_0}^s / \Omega_{v^{(0)}, q}} \sum_{(t_1, \dots, t_s) \in Z^s} \frac{1}{\left(\left(2t_1 + \text{sgn}(v_1 - v_1^{(0)}) \right) 2^{v_1-1} \right)^r \dots \left(\left(2t_s + \text{sgn}(v_s - v_s^{(0)}) \right) 2^{v_s-1} \right)^r}.$$

Далее, применяя лемму 3, получим:

$$\sum_{(v_1, \dots, v_s) \in Z_{v_0}^s / \Omega_{v^{(0)}, q}} \sum_{(t_1, \dots, t_s) \in Z^s} \frac{1}{\left(\left(2t_1 + \text{sgn}(v_1 - v_1^{(0)}) \right) 2^{v_1-1} \right)^r \dots \left(\left(2t_s + \text{sgn}(v_s - v_s^{(0)}) \right) 2^{v_s-1} \right)^r} \asymp \\ \asymp \sum_{(v_1, \dots, v_s) \in Z_{v_0}^s / \Omega_{v^{(0)}, q}} \sum_{(t_1, \dots, t_s) \in Z^s} \frac{1}{\left(\bar{t}_1 \cdot 2^{v_1} \dots \bar{t}_s \cdot 2^{v_s} \right)^r} \asymp \sum_{(v_1, \dots, v_s) \in Z_{v_0}^s / \Omega_{v^{(0)}, q}} \frac{1}{2^{r(v_1 + \dots + v_s)}} \asymp \sum_{l=q+1}^{\infty} \frac{1}{2^{lr}} \sum_{\substack{v_1 + \dots + v_s = l \\ v_j \geq v_j^{(0)}}} 1.$$

В силу лемм 4 и 5 имеем

$$\sum_{l=q+1}^{\infty} \frac{1}{2^{lr}} \sum_{\substack{v_1 + \dots + v_s = l \\ v_j \geq v_j^{(0)}}} 1 \asymp \sum_{l=q+1}^{\infty} \frac{l^{s-1}}{2^{lr}} << \frac{q^{s-1}}{2^{qr}}.$$

Таким образом,

$$\|J_1\|_{L^p} << \frac{q^{s-1}}{2^{qr}}. \quad (7)$$

Применяя неравенство Хаусдорфа-Юнга, неравенство

$$(n, n) \geq (n_1 \cdot \dots \cdot n_s)^{\frac{2}{s}}, \quad (8)$$

оценим J_2 в метрике L^p $\left(2 \leq p \leq \infty, p' = \frac{p}{p-1} \right)$:

$$\|J_2\|_{L^p} = \left(\int_{[0,1]^s} \left| \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n \in I'_q} \frac{*e^{2\pi i(n, x)}}{(n, n)} \sum_{(v_1, \dots, v_s) \in Z_{v(n)}^s / \Omega_{v^{(n)}, q}} (-1)^{\sum_{j=1}^s \text{sgn}(v_j - v_j^{(n)})} \sum_{(t_1, \dots, t_s) \in Z^s} \hat{f} \left(n_1 + \left(2t_1 + \text{sgn}(v_1 - v_1^{(n)}) \right) 2^{v_1-1}, \dots, n_s + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(2t_s + \text{sgn}(v_s - v_s^{(n)}) \right) 2^{v_s-1} \right)^p dx \right|^{\frac{1}{p}} << \left(\frac{1}{4\pi^2} \sum_{n \in I'_q} \frac{1}{(n, n)^{p'}} \cdot \left| \sum_{(v_1, \dots, v_s) \in Z_{v(n)}^s / \Omega_{v^{(n)}, q}} \sum_{t \in Z^s} \hat{f} \left(n_1 + \left(2t_1 + \text{sgn}(v_1 - v_1^{(n)}) \right) 2^{v_1-1}, \dots, n_s + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \text{sgn}(v_1 - v_1^{(n)}) 2^{v_1-1}, \dots, n_s + \left(2t_s + \text{sgn}(v_s - v_s^{(n)}) \right) 2^{v_s-1} \right) \right|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Далее, применяя определение класса E_s^r , получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{(v_1, \dots, v_s) \in Z_{v(n)}^s / \Omega(v(n), q)} \sum_{t \in Z^s} \left| \hat{f} \left(n_1 + \left(2t_1 + \operatorname{sgn}(v_1 - v_1^{(0)}) \right) 2^{v_s-1}, \dots, n_s + \left(2t_s + \operatorname{sgn}(v_s - v_s^{(0)}) \right) 2^{v_s-1} \right) \right| \leq \\ & \leq \sum_{\substack{v_1 + \dots + v_s > q \\ v_j \geq v_j^{(n)}}} \sum_{t \in Z^s} \frac{1}{\left(n_1 + \left(2t_1 + \operatorname{sgn}(v_1 - v_1^{(0)}) \right) 2^{v_s-1}, \dots, n_s + \left(2t_s + \operatorname{sgn}(v_s - v_s^{(0)}) \right) 2^{v_s-1} \right)^r}. \end{aligned}$$

На основании леммы 3 имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{v_1 + \dots + v_s > q \\ v_j \geq v_j^{(n)}}} \sum_{t \in Z^s} \frac{1}{\left(n_1 + \left(2t_1 + \operatorname{sgn}(v_1 - v_1^{(0)}) \right) 2^{v_s-1}, \dots, n_s + \left(2t_s + \operatorname{sgn}(v_s - v_s^{(0)}) \right) 2^{v_s-1} \right)^r} \asymp \\ & \asymp \sum_{(v_1, \dots, v_s) \in Z_{v(n)}^s / \Omega(v(n), q)} \sum_{(t_1, \dots, t_s) \in Z^s} \frac{1}{\left(\bar{t}_1 \cdot 2^{v_1} \dots \bar{t}_s \cdot 2^{v_s} \right)^r} \asymp \sum_{(v_1, \dots, v_s) \in Z_{v(n)}^s / \Omega(v(n), q)} \frac{1}{2^{r(v_1 + \dots + v_s)}} \asymp \sum_{l=q+1}^{\infty} \frac{1}{2^{lr}} \sum_{\substack{v_1 + \dots + v_s = l \\ v_j \geq v_j^{(n)}}} 1. \end{aligned}$$

Используя последовательно леммы 4, 6 и 5, получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=q+1}^{\infty} \frac{1}{2^{lr}} \sum_{\substack{v_1 + \dots + v_s = l \\ v_j \geq v_j^{(n)}}} 1 \asymp \sum_{l=q+1}^{\infty} \frac{(l - (v_1(n) + \dots + v_s(n)))^{s-1}}{2^{lr}} \asymp \frac{q^{s-1}}{2^{qr}} \asymp \sum_{l=q+1}^{\infty} \frac{(l - \log_2(\bar{n}_1 \dots \bar{n}_s))^{s-1}}{2^{lr}} \asymp \\ & \asymp \frac{(l - \log_2(\bar{n}_1 \dots \bar{n}_s))^{s-1}}{2^{lr}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Применяя (9), продолжим оценку:

$$\begin{aligned} \|J_2\|_{L^p}^{p'} & \ll \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n \in V_q}^* \frac{1}{(n, n)^{p'}} \cdot \left(\frac{q - \log_2(\bar{n}_1 \dots \bar{n}_s)}{2^{qr}} \right)^{p'} \ll \frac{1}{2^{qrp'}} \sum_{n \in V_q}^* \frac{(q - \log_2(\bar{n}_1 \dots \bar{n}_s))^{(s-1)p'}}{(\bar{n}_1 \dots \bar{n}_s)^{\frac{2p'}{s}}} = \\ & = \frac{1}{2^{qrp'}} \sum_{1 \leq n_1 \dots n_s \leq 2^q}^* \frac{(q - \log_2(\bar{n}_1 \dots \bar{n}_s))^{(s-1)p'}}{(\bar{n}_1 \dots \bar{n}_s)^{\frac{2p'}{s}}} \ll \frac{1}{2^{qrp'}} \sum_{k=1}^q \frac{(q-k)^{(s-1)p'}}{(2^k)^{\frac{2p'}{s}}} \cdot \sum_{2^{k-1} \leq n_1 \dots n_s \leq 2^k} 1. \end{aligned}$$

На основании леммы 7 имеем $\sum_{2^{k-1} \leq n_1 \dots n_s \leq 2^k} 1 \asymp 2^k \cdot k^{s-1}$. Следовательно,

$$\|J_2\|_{L^p}^{p'} \ll \frac{1}{2^{qrp'}} \sum_{k=1}^q \frac{(q-k)^{(s-1)p'}}{(2^k)^{\frac{2p'}{s}}} \cdot 2^k \cdot k^{s-1} = \frac{1}{2^{qrp'}} \sum_{k=1}^q \frac{(q-k)^{(s-1)p'}}{2^{k\left(\frac{2p'}{s}-1\right)}} \cdot k^{s-1}. \quad (10)$$

При $1 - \frac{2p'}{s} = 1 - \frac{1}{p} - \frac{2}{s} > 0$, умножив и разделив выражение (10) на $2^{q\left(1 - \frac{2p'}{s}\right)}$, получим:

$$\|J_2\|_{L^p}^{p'} \ll \frac{1}{2^{qrp'}} \sum_{k=1}^q \frac{(q-k)^{(s-1)p'}}{2^{k\left(\frac{2p'}{s}-1\right)}} \cdot k^{s-1} = \frac{1}{2^{qrp'}} \cdot \sum_{k=1}^q \frac{(q-k)^{(s-1)p'}}{2^{(q-k)\left(1 - \frac{2p'}{s}\right)}} \cdot 2^{q\left(1 - \frac{2p'}{s}\right)} \cdot k^{s-1}.$$

Так как $\sum_{k=1}^q \frac{(q-k)^{(s-1)p'}}{2^{(q-k)\left(1 - \frac{2p'}{s}\right)}} < +\infty$ при $q \rightarrow \infty$, то $\|J_2\|_{L^p}^{p'} \ll \frac{q^{s-1}}{2^{qp\left(1 - \frac{1}{p'} + \frac{2}{s}\right)}}$. Учитывая, что $p' = \frac{p}{p-1}$, получим:

$$\|J_2\|_{L^p} \ll \frac{q^{(s-1)\left(1 - \frac{1}{p}\right)}}{2^{q\left(r - 1 + \frac{1}{p} + \frac{2}{s}\right)}}. \quad (11)$$

Теперь оценим J_3 . Применяя неравенство Хаусдорфа-Юнга, неравенство (8), а также определение класса E_s^r , имеем: $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, p' = \frac{p}{p-1} \right)$.

$$\begin{aligned} \|J_3\|_{L^p} &= \left\| -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{n \in Z^s/V_q} \frac{*f(n)}{(n,n)} e^{2\pi i(n,x)} \right\|_{L^p} << \left(\sum_{n \in Z^s/V_q} \left| \frac{*f(n)}{(n,n)} \right|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \left(\sum_{n \in Z^s/V_q} \frac{|f(n)|^{p'}}{(n_1 \cdot \dots \cdot n_s)^{\frac{2}{s} p'}} \right)^{\frac{1}{p'}} << \\ &<< \left(\sum_{n_1 \cdot \dots \cdot n_s > 2^q} \frac{1}{(n_1 \cdot \dots \cdot n_s)^{\left(\frac{2}{s} + r\right) p'}} \right)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

На основании леммы 8, учитывая, что $p' = \frac{p}{p-1}$, приходим к оценке:

$$\left(\sum_{n_1 \cdot \dots \cdot n_s > 2^q} \frac{1}{(n_1 \cdot \dots \cdot n_s)^{\left(\frac{2}{s} + r\right) p'}} \right)^{\frac{1}{p'}} << \left(\frac{(1 + \ln 2^q)^{s-1}}{(2^q)^{p' \left(\frac{2}{s} + r\right) - 1}} \right)^{\frac{1}{p'}} = \frac{q^{\left(s-1\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)}}{2^{q\left(r+\frac{2}{s}-1+\frac{1}{p}\right)}}.$$

Таким образом,

$$\|J_3\|_{L^p} << \frac{q^{\left(s-1\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)}}{2^{q\left(r+\frac{2}{s}-1+\frac{1}{p}\right)}}. \quad (12)$$

Из неравенств (7), (11) и (12) следует

$$\delta_N(u_w, E_s^r)_{L^p(0,1)^s} << \frac{q^{\left(s-1\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)}}{2^{q\left(r-1+\frac{1}{p}+\frac{2}{s}\right)}} \text{ при } 1 - \frac{1}{p} - \frac{2}{s} > 0.$$

В пересчете на число узлов

$$\delta_N(u_w, E_s^r)_{L^p(0,1)^s} << \frac{(\ln N)^{\left(s-1\right)\left(r+\frac{2}{s}\right)}}{N^{r-\left(1-\frac{1}{p}-\frac{2}{s}\right)}}.$$

Теорема доказана.

References

- 1 Hua Loo Keng, Wang Yuan. Application of Number Theory of Numerical Analysis. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer Yerlag, 1981.
- 2 Sherniyazov K.E. Approximate restoration of functions and solutions of equation of heat conductivity with functions of distribution the initial temperature from E, SW classes // Diss. cand. of phis.-mat. sc. 01.01.01 — Mathematical analysis. — Almaty, 1998.
- 3 Bakhvalov N.S. About numerical solving of the Dirichlet problem for Laplace's equation // Vestnik of MSU. — 1959. — № 5. — P. 171–195.
- 4 Temirgaliev N. Theoretical numeric methods and theoretical probabilistic approach to problems of analysis. Embedding and approximation theory, absolute convergence and the transformation of Fourier series // Vestnik of the Eurasian National University. — 1997. — № 3. — P. 90–144.
- 5 Temirgaliev N. Theoretical numeric methods and theoretical probabilistic approach to problems of analysis. Embedding and approximation theory, absolute convergence and the transformation of Fourier series (continuation 1) // Vestnik of the Eurasian National University. — 2002. — № 3–4. — P. 222–272.
- 6 Korobov N.M. Theoretical numeric methods in approximate analysis. — M.: Fizmatgiz, 1963. — 224 p.
- 7 Bailov E.A., Temirgaliev N. About discretization the solutions of Poisson's equation // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2006. — Vol. 47. — № 9. — P. 1594–1604.
- 8 Smolyak S.A. Quadrature and interpolation formulae on tensor products of certain classes of functions // Rep. of AS USSR. — 1963. — Vol. 148. — № 5. — P. 1042–1045.
- 9 Temirgaliev N., Kudaibergenov S.S., Shomanova A.A. Applications of Smolyak's quadrature formulae for numerical integration of the Fourier coefficients and restoration problems // News of h.s. Matem. — 2010. — № 3. — P. 52–71.

С.С.Құдайбергенов, С.Г.Сабитова

Коробов класында Пуассон теңдеуінің шешімін қалыпқа келтіру

Пуассон теңдеуінің қатар түрінде берілген шешімінің қалыпқа келтіруі мәселесі қарастырылған. Теңдеудің оң жағы Коробов класына жатқан жағдайда қалыпқа келтірудің қателігінің дәрежелік шкалада нақты бағалануы алынған. Осындай есепті Е.Баилов пен Н.Темірғалиев қарастырған. Қалыпқа келтіру операторын құру үшін Шерниязовтың әдісі және Смоляктың түйіндері қолданылды. Алынған нәтиже Е.Баилов пен Н.Темірғалиевтің нәтижесімен сәйкес келеді, бірақ ұсынылған оператор қарапайым және ЭЕМ-де есептеу үшін ыңғайлы болып табылады.

S.S.Kudaybergenov, S.G.Sabitova

Restoration of solution of Poisson's equation on Korobov's class

The problem of restoration of solution of Poisson's equation represented as a series is considered. In case of the right part of equation belongs to Korobov's class the exact in power-mode scale estimation of inaccuracy of the restoration is received. For creating the operator of restoration the method of Sherniyazov and points of Smolyak are used. Received result coincides with result of E.Bailov, N.Temirgaliev but offered operator distinguishes oneself by simplicity and it is suitable for calculations on computer.

ӘОЖ 517.62

Н.Т.Ниханбаева

*Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті (E-mail: nazima_kz@mail.ru)***Жай дифференциалдық теңдеулерді MathCad құралдарымен шешу**

Мақалада қазіргі заманғы ақпараттық технологияларды пайдалана отырып, қарапайым есептеу әдістерін қолдануға мүмкіндік берілген. Бұл үшін барынша сәйкес келетін ең бір мықты және тиімді математикалық жүйе—Mathcad болып табылады. Mathcad—Matlab, Maple, Mathematica және тағы да басқа көптеген осындай жүйелер арасындағы айрықша орын алатын жүйе. Mathcad әдеттегі математикалық тапсырмалардың шешімін сипаттайтын бірден бір жалғыз жүйе болып қалады. Ол — сандық және аналитикалық есептеулерді орындауға мүмкіндік беретін, өте тиімді бағытталған математикалық интерфейс және керемет ғылыми графика құралы бар жүйе.

Кілтті сөздер: дифференциалдық теңдеулер, Рунге-Кутта әдісі, Эйлер әдісі, Mathcad, Коши есебі, вектор.

Жай дифференциалдық теңдеулерді шешу ғылыми-техникалық есептеулер тәжірибесінде кең қолданылады. Сызықтық жай дифференциалдық теңдеулердің арнайы функциялар түрінде шешімі болғанымен, көп физикалық жүйелер сызықтық емес және аналитикалық шешімдері жоқ сызықтық жай дифференциалдық теңдеулермен сипатталады. Бұл жағдайда дифференциалдық теңдеулерді шешуде сандық әдістерді қолдануға тура келеді.

Жай дифференциалдық теңдеулерді шешу үшін, тәуелді айнымалының мәнін және туындылардың кейбір мәндерінде тәуелсіз айнымалының мәнін білу керек [1]. Егер бұл қосымша шарттар бір мәнде тәуелсіз айнымалы түрінде болса, онда мұндай есеп Коши есебі деп аталады. Егер шарттар екі немесе көп тәуелсіз айнымалы түрінде болса, онда есеп шектік деп аталады.

Коши есебі

Коши есебін төмендегідей сипаттауға болады:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y); \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Берілген теңдеуде жеткілікті функцияны да, бастапқы шартты қанағаттандыратын $y(x)$ функцияны табу керек.

Коши есебінің сандық шешімі $y_1, y_2, \dots, y_n$. $y(x)$ теңдеудің $x_1, x_2, \dots, x_n$ нүктелеріндегі шешімдері жақын мәндердің кестесін құрастырудан тұрады. Жиірек $x_i = x_0 + ih, i = 0, 1, \dots, n$, мұндағы $h - x$ айнымалы өсімшесінің қадамы; $n - h$ қадамының шешімінің интервалдарының саны.

Коши есебінің шешімінің сандық әдістерінің екі тобын қарап шығамыз: бір қадамды және көп қадамды.

Бір қадамды әдістер — бұл $y = f(x)$ қисығындағы келесі нүктені табу үшін алдыңғы тек қана бір қадам туралы мәлімет керек болатын әдістер. Бір қадамды әдістер ішінде ең оңайы Эйлер әдісі:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h; \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2)$$

Эйлер әдісінде дәлдік жоғары болмайды (h -тың реті). Жоғары жетістіктерге жету үшін (h^4 -тің реті), төртінші ретті Рунг-Кутта әдісін пайдаланады:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3}{6}, \quad (3)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} k_0 &= h \cdot f(x_i, y_i); \quad k_2 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}); \\ k_1 &= h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0}{2}); \quad k_3 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_2)k. \end{aligned}$$

Көп қадамды әдістер

Көп қадамды әдістерде $y = f(x)$ қисығының келесі нүктесін табу үшін, алдыңғы нүктелердің бірі туралы мәліметті білу керек. $y_{i-3}, y_{i-2}, y_{i-1}, y_i$ мәні жүйелі, бірізді төрт нүктесінде табылсын. Сонымен бірге бұрын есептелген теңдеудің оң жақ бөлігіндегі мәні бар (1) $y_{i-3}, y_{i-2}, y_{i-1}, y_i$. Онда Адамс әдісінің схемасын мына түрде көрсетуге болады:

$$y_{i+1} = y_i + hf_i + \frac{h}{2} \Delta f_i + \frac{5h}{12} \Delta^2 f_i + \frac{3h}{8} \Delta^3 f_i; \quad i = 3, 4, \dots, n-1, \quad (4)$$

мұндағы x_i нүктесіндегі шекті айырымдар мынадай түрде болады:

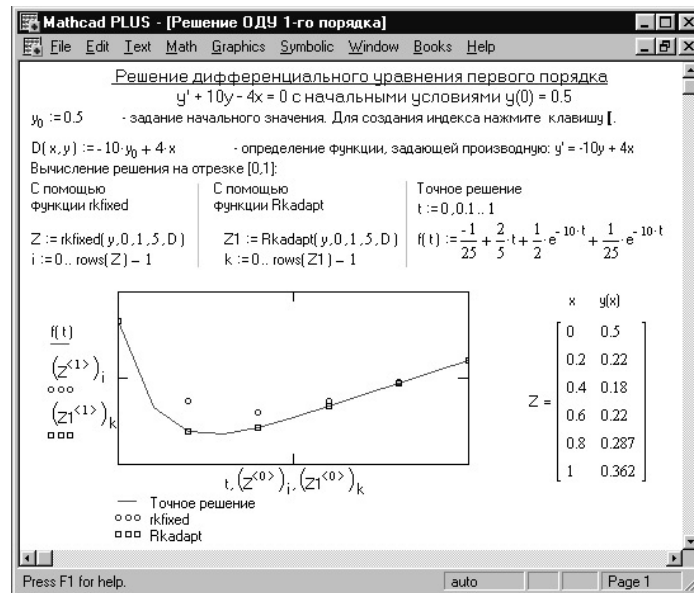
$$\begin{aligned} \Delta f_i &= f_i - f_{i-1}; \\ \Delta_2 f_i &= f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}; \\ \Delta^3 f_i &= f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}. \end{aligned} \quad (5)$$

Коши есебін MathCad құралдарымен шешу

Әр түрлі реттегі жай дифференциалдық теңдеуді шешу үшін, MathCad-та кең спектрмен кірістірілген функциялар көрсетілген [2], соның бірі (*rkfixed* — Рунге-Кутта әдісі (*rk*) төртінші ретті бекітілген (*fixed*) интегралдаулар қадамымен) 1-суретте көрсетілген.

rkfixed (y, a, b, n, D)	P+1 бағаналары және n+1 жолдары бар матрицаны қайтарады. (p — теңдеулердің саны, немесе теңдеудің реті; $n - [a, b]$ интервалындағы қадамдар саны) — жүйелер шешімдер кестесі: бірінші бағана — бұл x аргументінің мәні, ал келесі бағаналар — шешімнің ординаталарының мәні; $y - n$ -ның бастапқы шартты өлшемдерінің векторы. D (x, y)-функция — n элементтен тұратын вектор, ол алғашқы белгісіз функциялардың туындысынан тұрады
-------------------------	--

Есепті дәлірек шығаруға болады, егер h қадамын азайтатын болса, мұнда туынды жылдам өзгереді және өзін жай көрсететін жерде кадамды үлкейту керек. Ол үшін *Rkadapt*-тың функциясы ескерілген (*adaption* — адаптация) [3]. *Rkadapt* функциясымен қайтарылған аргумент пен матрица дәл солай болады *rkfixed* (1-сур.).



1-сурет. 1-ші реттегі дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешу

Шектік есептер

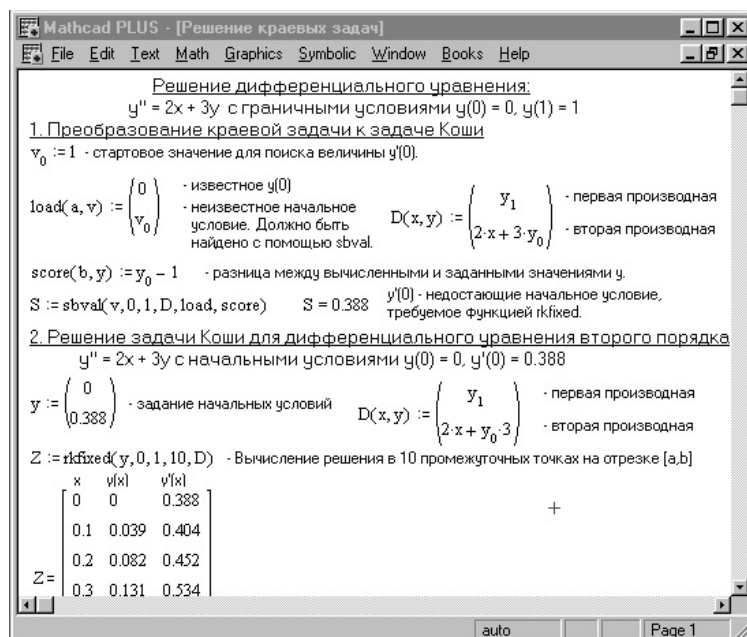
Шектік есеп төмендегіше құрастырылады: $[a, b]$ кесіндіде дифференциалдық теңдеудің шешімін табу керек болсын [4] (түсінікті болу үшін екінші ретті жай дифференциалдық теңдеуге мысалдар келтіреміз):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y'), \text{ шекті шарттарда } y(a) = A, y(b) = B. \quad (6)$$

Осы жағдайда a нүктесіндегі бастапқы жетіспейтін шарттарды табу үшін, *MathCad sbval* функциясын пайдалануды ұсынады.

Sbval (v, a, b, D, load, score)	a нүктесіндегі бастапқы жетіспейтін векторды қайтарады. V вектор бастапқы жуықтауларды береді; a, b — шешімдердің интервалының шекті нүктелері; $D(x, y)$ -функция — белгісіз функциялардың бірінші туындылары бар вектор; $\text{load}(a, v)$ — функция-вектор, a нүктесіндегі бастапқы шартты қанағаттандыратын мәнді қайтарады. $\text{score}(b, y)$ — b нүктесінің бастапқы шартында әрбір элементі айырмашылықта және ізделіп отырған шешімі бұл нүктеде болатын функция-вектор
--	--

Осыдан жетіспейтін бастапқы шарттар алынғаннан кейін, жоғарыда айтылған кез келген функцияны қолданып (1-сур.), кәдімгі бастапқы шарттардағы есепті шешуге болады, яғни Коши есебін [5]. Шектік есептің шешімінің мысалы 2-суретте көрсетілген.



2-сурет. Шектік есепті шешу

Сызықтық дифференциалдық теңдеулердің нышандық шешімі

Егер сіз MathCad 5.0 пакетімен жұмыс істесеңіз, нышандық процессордың жүктелулері үшін бастапқы *Symbolic Load Symbolic Processor* командаларын орындауды ұмытпаңыз, егер сіз MathCad 6.0 пакетімен жұмыс істеу білсеңіз, бұл пунктті тастап кетіңіз [6]. MathCad-қа сызықтық аналитикалық шешімдерді алу үшін келесі әрекеттерді орындау керек: дифференциалдау операторы мен пернелер комбинациясын қолдана отырып, бастапқы теңдеуді басып шығару [Ctrl]=; тәуелсіз айнымалыны белгілеп, Лапласстың тура өрнектеуін орындау *Symbolic Transforms Laplace Transform (Лапласстың өрнектеуі)*. Жай дифференциалдық теңдеудің нәтижесі алмасу буферінде орналастырылады. Оны F4 пернесін басып шақырыңыз; Лапласстың өрнектеулері нәтижелер бойынша алгебралық теңдеуді қолдан құрау, $L=laplace(y(t), t, s)$, $C1=y(0)$ и $C2=diff(y(0), 0)$ белгісін қабылдап, *Symbolic Solve for Variable (Айнымалы туралы шешу)* командасын қолдана отырып, L айнымалысына қатысты жасалған алгебралық теңдеуді шешуге болады.

References

- 1 Atanbayev C., Sultangazin O. Short theory of calculation methods. — Almaty: Bilim, 2001. — P. 36–67.
- 2 Gurskiy D., Turbina E. Calculations in Mathcad 12. — SPb.: Peter, 2006. — P. 476–490.
- 3 Hanova A.A. Symbolical calculation in the environment of MathCAD. — Astrakhan: Publishing house ASTU, 2001. — 34 p.
- 4 Hanova A.A. Numerical solution of equations and systems. — Astrakhan: Publishing house ASTU, 2001. — 44 p.
- 5 Zubkov V.G., Lyahovsky V.A. et al. Course of the higher mathematics. — 6 theed. — M.: MSIU, 2003. — 483 p.
- 6 Dyakonov V.P. Manual on MathCad PLUS 6.0 PRO. — M.: SK Press, 1997. — 336 p.

Н.Т.Ниханбаева

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений средствами MathCad

В данной статье показана возможность использования современных информационных технологий с помощью простейших методов вычислений. Для этого наиболее подходящей является одна из самых мощных и эффективных математических систем — Mathcad, которая занимает особое место среди множества таких систем (Matlab, Maple, Mathematica и др.). Mathcad остается единственной системой, в которой описание решения математических задач задается с помощью привычных математических формул и знаков. Mathcad позволяет выполнять как численные, так и аналитические (символьные) вычисления, имеет чрезвычайно удобный математико-ориентированный интерфейс и прекрасные средства научной графики.

N.T.Nihanbaeva

Solution of ordinary differential Equations by means of MathCad

The article reveals the possibility to apply the simplest calculation methods using modern informational technologies. One of the most powerful and effective mathematical systems — Mathcad, which has a special place among lots of similar systems (Matlab, Maple, Mathematica and others) is the most suitable for it. Mathcad remains the only one system where the description of solution of mathematical tasks is given by the help of usual mathematical formulas and signs. Mathcad allows to make both numeral and symbolic calculations. It has a very convenient mathematically-oriented interface and fine means of scientific graphic arts.

ӘОЖ 656.13.07

А.М.Омаров, Ж.Т.Есендаулетова

*Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті (E-mail: dalibiev@mail.ru)***Жүктерді тасымалдау маршруты есебінің тиімді жоспарлануы**

Мақалада жүктерді тасымалдау желісінің рационалды тасып тарату және жинақтау алгоритмі қарастырылған. Ұсынылған алгоритм жинақты маршрутты және рационалды тасып таратуды анықтайды. Тасымалдауды оперативті жоспарлаудың ең маңызды есептері болып табылатын қозғалмалы құрам қозғалысының маршрутының құрылуының жолдары мен тасымалдау маршрутизациясы келтірілген. Жүктерді тасымалдау маршрутизациясы есептерін қою практикасы мен шешілуі нақты шарттармен байланысқан көптеген шектеулерді ескереді.

Кілтті сөздер: маршрутизация, маршрут схемасы, матрица, жүктерді тасымалдау, рационалды тасып тарату, жинақтау алгоритмі.

Тасымалдауды оперативті жоспарлаудың ең маңызды есептері қозғалмалы құрам қозғалысының маршрутының құрылуы болып табылады. Тасымалдау маршрутизациясы деп қозғалу құрамының барлық бос жүрісінің еріксіз қысқартылуын қамтамасыз ететін автокөлік қозғалысының рационалды маршрутын құруды атайды.

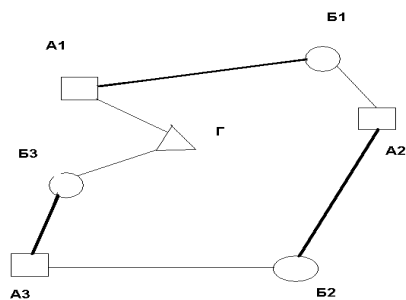
Үлкен массалы жүктердің тасымалдануында рационал маршрутты құру есебі өте маңызды болып табылады. Мысал қарастырайық [1]. Өндіріс пункттері мен жүктер қажеттілігі, автокөліктердің орналасу пункттері, сонымен қатар олардың арасындағы арақашықтық берілсін. Сондай-ақ тасымалдау тапсырыстары мен олардың өлшемдері белгілі болсын. Маркалар және автокөліктік мекемелер бойынша автокөліктер саны берілген. Жүксіз автокөлік жүрісінің минималды қосындысын қамтамасыз ететін маршруттар жиынтығын табу керек.

Осы жерде маршруттарға кейбір шектеулер қойылады, мысалы: маршрут жұмысының максималды жалғастырылуы; жүрісті пайдалану коэффициентінің максималды мәні және т.с.с. Әрбір нақты есеп үшін шектеулер жиынтығына жауап беретін маршрут жіберуші болады. Тасымалдау жоспарына тек жіберуші шешімді енгізу керек.

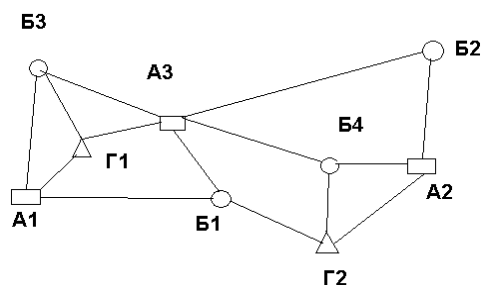
Шектеулі мәні бар маршрут бойынша жүрісті пайдалану коэффициентін салыстыратын ерекше тәсіл енгізейік [2]. β -жүрісті пайдалану коэффициенті жүктелген жүрістің жалпыға қатынасына тең болады, ол жүктелген L_{cp} және бос L_{nop} жүрістен тұрады, яғни $\beta = L_{cp} / (L_{cp} + L_{nop})$ тең. Бұдан $L_{cp} = L_{nop} \beta / (1 - \beta)$ шығады. $\lambda = \beta / (1 - \beta)$ -ны белгілейік, онда $L_{cp} = \lambda L_{nop}$ аламыз.

Егер де жіберуші маршрутта жүрісті пайдалану коэффициентінің минималды мәнін $\bar{\beta}$ -мен белгілесек, онда $\bar{\lambda} = \bar{\beta} / (1 - \bar{\beta})$ болады. Маршрутты жіберудің қажетті шартын $(L_{cp} - \bar{\lambda} L_{nop}) \geq 0$ қатынасы анықтайды. Егер де ол орындалмаса, онда жүрісті пайдалану коэффициенті берілген $\bar{\beta}$

мәнінен кіші болады. Ондай маршрут жіберілмейді. Мысалға, 1-суретте келтірілген маршруттың жүрісін пайдалану коэффициентіне сәйкес жіберілетінін анықтайық.



1-сурет.



2-сурет.

Маршрут схемасы: *тұтас сызық* — жүктемелі жүріс, *штрихталған* — бос жүріс. Айталық, $\bar{\beta}=0,55$ болса, онда $\bar{\lambda}=0,55/(1-0,55)=1,2$. $C=L_{cp}-\bar{\lambda}L_{nop}$ белгілеуін енгізейік. Сонда $L_{cp}=12+16+10=38$ және $L_{nop}=6+5+15+5=31$ сәйкес $C=38-1,2*31=0,8$, яғни маршрут жіберуші болады.

Егер алдын ала бос жүрісті $\bar{\lambda}$ -ға көбейтсек, онда C мәнін оңай алуға болады, яғни $C=-7,2+12-6+16-18+10-6=0,8$.

Маршрутты құру процесінде C өлшемі жүктемелі жол жүрісіне қосылу арқылы өзгереді. Маршрутқа алғашқыларының бірін A_1B_1 қосқанда, өлшем мынаған тең: $c^{(1)}=-7,2+12=4,8$, мұндағы жоғарыда орналасқан жақшадағы индекс жүктемелі жол жүрудің қосылу нөмірін көрсетеді. Бірінші қосылғыш — автотранспорттық мекемелердегі (АТП) 0-дік жол жүріс, мұндағы A_1 пунктсіне Γ пунктсі, екінші — A_1 пунктсінен B_1 пунктсіне дейінгі жүктемелі жол жүрісі. A_2B_2 жол жүрісін қосу арқылы мән мынаған тең: $c^{(2)}=-7,2+12-6+16=c^{(1)}-6+16=14,8$. Автокөліктің АТП-ға қайтарылатынын ескере отырып, $C=c^{(3)}-6=0,8$ аламыз. Көрініп тұрғандай, маршрутқа келесі жол жүрісті енгізу арқылы жаңа екі қосындыны аламыз: (-) таңбасы бар бос (порожний) және (+) таңбасы бар жүктемелі жол жүрісінің өлшемі.

C мәні ұлғайған сайын маршрут бойынша жол жүрісті пайдалану коэффициенті де жоғарлай түседі. Маршрутизация есебін шешудің мақсаты ретінде барлық маршруттар бойынша C максимумды қамтамасыз ететін, тасымалдау жоспарын құруды есептеуге болады.

Есепті шешу барысында бірыңғай құрылатын ($j=1,2,\dots, n$) маршруттарының және ($i=1,2,\dots, m$) тасымалдау тапсырыстардың барлық жиындары қарастырылады.

Мысал [2]. 2-суретте тасымалдау схемасы келтірілген. Екі Γ_1 және Γ_2 автотранспорттық мекеме, үш жабдықтаушы A_1, A_2, A_3 және төрт қабылдаушы B_1, B_2, B_3, B_4 бар болсын. АТП Γ_1 жолға жүк сыйымдылығы 10 т болатын КамАЗ-550, ал АТП Γ_2 жолға жүк сыйымдылығы 8 т болатын МАЗ-500 екі автокөлікті жібереді. Тасымалдау тапсырыстары 1-кестеде, ал пунктлер арасындағы арақашықтық 2-кестеде көрсетілген. Енді $\beta \geq 0,55$ және $\gamma=1,0$ болғандағы, әрбірінің жалпы ұзындығы 100–120 км-ге созылған жіберуші маршрутты құрамыз.

1 - кесте

Жабдықтаушы	Тұтынушы	Жүктер саны, т	Жабдықтаушы	Тұтынушы	Жүктер саны, т
A_1	B_1	28	A_3	B_3	28
A_2	B_2	26		B_4	18

2 - кесте

Тұтынушы	Жабдықтаушы				
	A_1	A_2	A_3	Γ_1	Γ_2
B_1	15	20	10	15	10
B_2	30	35	20	25	40
B_3	10	45	20	10	35
B_4	40	15	30	30	5
Γ_1	5	35	5	-	-
Γ_2	25	10	20	-	-

Берілген төрт автокөлік үшін маршрутты құру барысында матрица толтырылады (3-кесте), оның жолдары — тасымалдау тапсырыстары, ал бағаны маршруттар болады. Алғашқы екі маршрут АТП Γ_1 -ге, ал екінші екеуі АТП Γ_2 -ге қатысты деп келесіп алайық. 3-кесте торларына i жүктелген жол жүрісін j маршрутына қосуда тиімді болатын c_{ij} бағалары жазылады. c_{ij} бағаларын есептеуді қыстарту үшін, теріс мәндерімен алынған, $\bar{\lambda}$ ($\bar{\lambda}=1,2$ $\bar{\beta}=0,55$ болған жағдайда) коэффициенттеріне көбейтілгеннен кейінгі нәтижелерді 4-кестеде бос жол жүру арақашықтықтары жазылған.

3 - кесте

Тасымалдау тапсырыстары	Маршрут				Жүктер саны, т
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
A_1B_1	9	9	-15	-15	28
A_2B_2	-7	-7	23	23	26
A_3B_3	14	14	-4	-4	28
A_3B_4	24	24	6	6	18
Ең үлкен бағалар айырмашылығы	10	10	17	17	-

Есептеудің бірінші қадамында кез келген бағананы таңдау екі жол жүрістен тұратын: порождық және жүктелеген маршруттық фрагментінің ұйымдастырылуын білдіреді.

4 - кесте

Тұтынушы	Жабдықтаушы				
	A_1	A_2	A_3	Γ_1	Γ_2
B_1	-18	-24	-12	-18	-12
B_2	-36	-42	-24	-30	-48
B_3	-12	-54	-24	-12	-42
B_4	-48	-18	-36	-36	-6
Γ_1	-6	-42	-6	-	-
Γ_2	-30	-12	-24	-	-

№ 1 маршрутымен A_1B_1 жол жүруді байланыстыратын бағаны санау үшін, Γ_1 пунктисінен A_1 пунктисіне (4-кесте) дейінгі порождық жол жүру ұзындығына A_1B_1 (2-кесте) жүктелген жол жүрісінің ұзындығын қосу керек. Сонда $c_{11} = -6 + 15 = 9$ аламыз. № 4 маршрутына A_3B_3 жол жүрісін қосу бағасы үшін жоғарыдағы амалдарды қайталап, $c_{34} = -24 + 20 = -4$ аламыз. Матрицаны бірінші рет толтырғаннан кейін 3-кестені аламыз, келесі амалдарды орындау керек:

- 1) матрицаның әрбір бағанасынан екі үлкен бағалар $c_{i1,j}$ және $c_{i2,j}$ табу;
- 2) матрицаның әрбір бағанасынан $\Delta_j = c_{i1,j} - c_{i2,j}$ есептеу;
- 3) Δ_{j_0} мәнінің әрқайсысы үшін максималды j_0 бағанасын табу;
- 4) j_0 маршрутына i_1 жол жүрісін тағайындау;
- 5) j_0 маршрутының жалғасы болатындығын анықтау. Егер де жалғасатын болса, онда j_0 бағанасының c_{i,j_0} бағаларын қайта есептеу керек, керісінше жағдайда, j_0 бағанасының барлық c_{i,j_0} бағаларына үлкен теріс санын меншіктеу;
- 6) i_1 (матрицаның соңғы бағанасы) тапсырысы бойынша жоспарланбаған тасымалдаудың көлемін j_0 маршрутын орындайтын автокөліктің жүктерді көтеру өлшеміне азайту;
- 7) барлық маршруттарға i_1 тапсырысын келесіде енгізуде мүмкін болатынын тексеру керек. Сәйкес келетін $c_{i,j}$ бағаларына (-M) мәндеріне меншіктеу;
- 8) матрицаларда $c_{i,j} \neq -M$ бағасы бар екендігін тексеру. Егер де бар болса — 1-пункт, керісінше жағдайда 9-пункт орындалады;
- 9) есептеулер тоқтатылады.

$c_{23}=23$ бағасымен $\Gamma_2-A_2B_2$ маршрут фрагменті алынады. Матрицадағы тордың ортасында тасымалдау жүрісінің саны жазылады. A_2B_2 тапсырысы бойынша 18 т тасымалдау ғана қалады. Бұл мәндерді келесі матрицаға жазамыз (5-кесте).

5 - к е с т е

Тасымалдау тапсырыстары	Маршрут				Жүктер саны, т
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
A_1B_1	9	9	2	-15	28
A_2B_2	-7	-7	16	23 8	18
A_3B_3	14	14	19	-4	28
A_3B_4	24	24	29	6	18
Ең үлкен бағалардың айырмашылығы	10	10	10	17	-

№ 3 маршрут жалғасатын болғандықтан, 5-кестеде бағалар бойынша қайта есептеулерді келесі формула бойынша жүргіземіз:

$$c_{i,j0} = c_{i1,j0} + l_{nop} + l_{zp}, \quad (1)$$

мұндағы $c_{i1,j0}$ — берілген қадамдағы таңдалынған баға; l_{nop} — тұтынушыдан жабдықтаушыға дейінгі бос жүрісі (4-кесте); l_{zp} — i жүктелген жол жүрудің ұзындығы (2-кесте).

Тексерістен кейін A_2B_2 тапсырысын кез келген маршрутқа тағайындауға болады. Матрицада (5-кесте) барлық бағалар $c_{i,j} \neq -M$ болғандықтан, барлық сипатталған амалдар қайталанады. Δ_j есептеулерінен кейін 5-кестеде оның максималды мәнін анықтаймыз. Нәтижесінде № 4 және № 3 маршруттарына A_2B_2 жол жүрісін қосамыз.

Кестеге тасымалдау көлемін жазамыз. № 4 және № 3 маршруттары жалғасу керек, сондықтан оның бағалары (1) формула бойынша қайта есептелінеді және жоспарланбаған A_2B_2 тасымалдануы өлшемінің кемуімен бірге келесі матрица жазылады (6-кесте).

6 - к е с т е

Тасымалдау өтініштері	Маршрут				Жүктер саны, т
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
A_1B_1	9	9	2	2	28
A_2B_2	-7	-7	16	16	10
A_3B_3	14	14	19	19	28
A_3B_4	24 10	24	29	29	18
Ең үлкен бағалар айырмашылығы	10	10	10	10	-

Тексеру нәтижесі бойынша A_2B_2 өтініші кез келген маршрутқа енгізілуіне болады.

Үшінші қадам шешімінде 6-кестедегі барлық Δ_j мәндері өзара тең болып табылады, сондықтан кез келген маршрутқа жолды тағайындауға болады. A_3B_4 жолын қосқан № 1-маршрутты таңдаймыз. Тордың дәл ортасынан тасымалдау өлшемін бекітеміз. № 1-маршрут қайталануды талап ететініне көзіміз жетіп, № 1-бағана бағаларын қайта есептеп жаңа 7-кестеге жазамыз. Маршруттың мүмкін болатын тексерілуі бойынша, A_3B_4 өтінішінің жоспарланбаған қалдығы № 1 және № 2-маршруттардағы 10 т жүкті көтеретін автокөлікпен жеткізуге мүмкін болмайтынын көрсетеді, яғни

$$c_{41}=c_{42}=-M.$$

7 - кесте

Тасымалдау өтініштері	Маршрут				Жүктер саны, т
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
A_1B_1	-9	-9	2	2	28
A_2B_2	41 10	-7	16	16	10
A_3B_3	8	14	19	19	28
A_3B_4	-М	-М	29	29	8
Ең үлкен бағалар айырмашылығы	33	5	10	10	-

7-кестеде № 1 маршруттағы ең үлкен мәні $\Delta_1 = 33$, оған A_2B_2 жолы тағайындалады. Енді № 1-маршрут 85 км-ге созылған $\Gamma_1-A_3B_4-A_2B_2$ екі жүктелген жолдан тұрады. B_2 пунктiсiнен АТП Γ_1 пунктiсiне қайтып келуiн ескере отырып, оның ұзындығы 110 км-ден тұрады. № 1-маршруттағы жүрісті пайдалану коэффициенті $\beta = 65 / 110 = 0,59$ тең болады. Сонымен, маршруттың мүмкін болатын барлық талаптарына жауап беретін № 1 маршрут аяқталды. 8-кестедегі № 1 бағананың барлық c_{i1} элементтері «-М» мәніне ие болады. Дәл осындай мәндерге 2-қатардың c_{2j} элементтері ие болады, себебі A_2B_2 ұсынысы бойынша барлық жүктер жоспарланған.

8 - кесте

Тасымалдау өтініштері	Маршрут				Жүктер саны, т
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
A_1B_1	-М	9	2	2	28
A_2B_2	-М	-М	-М	-М	0
A_3B_3	-М	14	19	19	28
A_3B_4	-М	-М	29 8	29	8
Ең үлкен бағалар айырмашылығы	0	5	10	10	-

8-кестеде A_3B_4 жолы № 3-маршрутқа белгіленеді. Осы жолменен № 3 маршрут аяқталады. Матрицаларды түрлендіруді жалғастыру арқылы, басқа маршруттарды аламыз. Есептеулер нәтижелері 9-кестеде келтірілген.

9 - кесте

Маршрут	Жүріс, км			Жүрісті пайдалану коэффициенті
	жүктелген	бос	жалпы	
$\Gamma_1-A_3B_4-A_2B_2-\Gamma_1$	65	45	110	0,59
$\Gamma_1-A_3B_3-A_1B_1-A_3B_3-A_1B_1-\Gamma_1$	70	50	120	0,58
$\Gamma_2-A_2B_2-A_3B_4-\Gamma_2$	65	35	100	0,65
$\Gamma_2-A_2B_2-A_3B_3-A_1B_1-\Gamma_2$	70	50	120	0,58

Сипатталған әдіс қадамдар бойынша тиімділеу әдісіне жатады. Мұнда тек қана берілген қадамда ғана ең жақсы бағалар таңдауы жүргізіледі. Маршрутқа жолды енгізгеннен және (1) формуласы бойынша c_{i,j_0} бағасына қайта есептеулер жүргізгеннен кейін j_0 бағанасында бірде-бір оң баға табылмауы мүмкін болады. Бұл j_0 маршрутының кез келген жалғасы жүрісті пайдалануда 0,55-тен төмен коэффициентті береді, ал ол мүмкін болатын маршруттың ережелеріне сәйкес келмейді. Шешімін жоққа шығармау және әдісті күшейту үшін, маршрутқа жолды енгізер алдында, оның бағаларына қайта есептеулер жасалады. Олардың арасында оң мәндер болмаған жағдайда, жол маршрутқа енгізілмейді. Бұл маршрут үшін Δ_{j_0} қайта есептелінеді және әрі қарай барлық бағаналары бойынша Δ_j максималды мәнін іздеуден бұрын сипатталған амалдар орындалады.

References

- 1 *Larionov A.I., Jurchenko T.I.* Economic-mathematical methods in planning. — M.: Higher school, 1984. — 248 p.
- 2 *Kozhin A.P.* Mathematical methods in planning and management of freight traffic. — M.: Higher school, 1991. — 296 p.

А.М.Омаров, Ж.Т.Есендаулетова

Оптимальное планирование задачи маршрутизации перевозок грузов

В статье рассматриваются сети перевозок рациональной поставки грузов и сборочные алгоритмы. Представленный алгоритм определяет рациональность поставки и сборочный маршрут. Рассмотрена одна из важных задач оперативного планирования перевозок и маршрутизации перевозок — составление маршрутов движения подвижного состава. Практика постановки и решения задач маршрутизации перевозки грузов учитывает множество ограничений, вызываемых конкретными условиями работы.

A.M.Omarov, Zh.T.Esendauletova

Optimum planning of problem of transportation cargoes routing

In the article networks of rational transportations delivery of cargoes and assembly algorithms are considered. The presented algorithm defines and considers rationality of delivery and assembly route. One of important problems of operational planning of transportations and routing is considered. It is drawing up of movement routes of rolling stock. Practice of statement and decision of problems router transportations of cargoes considers set of the restrictions caused by concrete working conditions.

ӨОЖ 656.13.07

А.М.Омаров, Ж.Т.Есендаулетова

Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті (E-mail: dalibiev@mail.ru)

Итерациялық әдістің негізінде рационалды маршрутты табу

Мақалада жүктерді тасымалдау және итерациялық әдістің негізінде тиімді маршрутты табу туралы белгілі бір торлық есеп қарастырылды. Анықталған шектеулері ескерілген итерациялық әдістің талқыланған алгоритмі келтірілген, яғни есеп қойлымының нақты шарттарымен белгіленген. Есептің шешімі итерациялық әдістің жеке бөлімі болып табылатын «қосынды» әдісімен анықталды. Осы мысалдың негізінде жуықталған «қосынды» әдістің екі кезеңі толық талқыланған.

Кілтті сөздер: рационалды маршрут, жол желілерінің схемасы, максималды артылуы, симметриялы матрицалар, жуықталған «қосынды» әдісі.

Әр түрлі кішігірім жүктерді тасымалдауды ұйымдастыру кезінде, ұсынушы бір жіберушіден жүкті қабылдап алып, оны белгілі бір қабылдаушыларға жеткізеді, олардың әрқайсысына жүктің белгілі бір бөлігін қалдырады немесе, керісінше, жүкті бірнеше ұсынушылардан жинап алып, оны пайдаланушыға жібереді, осы жерде жүгіріс пен уақытты қысқарту және пункттерді айналып өту тізбегі мәселесі пайда болады [1, 2]. Осыған қол жеткізу үшін, қозғалмалы құрам маршрутының рационалды қозғалысын жоспарлау, немесе, басқаша айтқанда, жүктерді тасымалдау маршрутизациясын жүргізу керек. Тасымалдау маршрутизациясы — бұл қозғалмалы құрам қозғалысының маршрутын құрастыру, немесе оның корреспонденциялық нүктелер арасындағы тізбектер реті, болып табылады.

Жүктерді тасымалдау маршрутизациясы есептерін қою практикасы мен шешілуі автокөлік және жүктерді тасымалдау жұмыстарының нақты шарттарымен байланысқан көптеген шектеулерді

ескереді. Оларға мыналарды жатқызуға болады: берілген жүктердің тұтынушылар мен ұсынушылар пункттерінің жиынтығы, жүктерді тұтынушылар мен ұсынушылардың жүктер айналымының көлемі, жүктердің сипаттамасы, оларды жеткізу уақыты, қозғалмалы құрам паркінің бар болуы мен құрылымы, автотранспорттық мекемелердің орналасуы мен қуаттылығы, автотранспорттық мекемелердің жұмыс режимі мен клиенттері, мақсаттық функцияның минималды бар болатын мәндері [3].

Аз партиялы жүктерді тасымалдаудағы қабылдаушылар немесе жіберушілер арасындағы автокөліктер қозғалысының тізбегі тасымалдаушы немесе жинаушы маршрут деп аталады. Кейбір жағдайда, автокөлік жүктерді тасымалдаумен қатар жинау жұмыстарын да жүргізеді. Мұнда, біріншіден, айырмашылығы болмаса да, есептің шешілуі бірқатар қиындатылады. Егер де автокөлік аз партиялы жүктерді тасымалдаумен қатар жинау жұмыстарын жүргізетін болса, онда маршрут тасымалдаушы-жинаушы деп аталады.

Дамыған жол желілерінің (мысалы, үлкен қалада) шарты бойынша пункттерді айналып өтуде әр түрлі маршруттардың варианттар саны өте үлкен болуы мүмкін, ондай жағдайда ең аз деген маршрутты таңдау үшін көп уақыт қажет болады, сондықтан оларды қысқарту үшін математикалық әдістеме пайдаланылады.

Осы есепті шешудің бірнеше математикалық әдістері белгілі. Бұл жерде «қосынды» әдісі деп аталатын жуықталған әдіс қарастырылады [3].

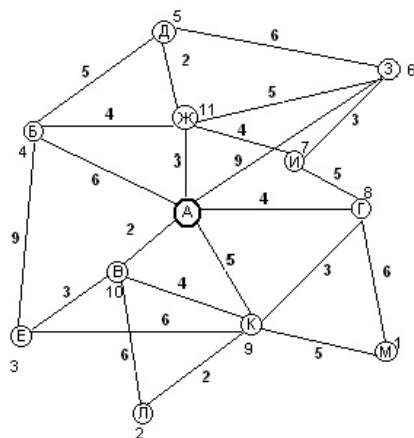
Мысалы, *A* қоймасынан *B, B, Г, Д, Е, Ж, З, И, К, Л, М* нүктелеріне жүктер жеткізіледі. Қайта осы нүктелерден қоймаға 1-кестеде келтірілген сандар бойынша жүктер түсіріледі.

1 - к е с т е

Пункттердің жүктер айналымы (жүктің біреуі)

Пунктілер	Енгізу	Шығару
Б	5	5
В	3	10
Г	2	4
Д	4	6
Е	9	-
Ж	7	8
З	2	3
И	5	4
К	4	-
Л	5	5
М	5	6
Барлығы	51	51

Пункттерді байланыстыратын жол желілерінің схемасы төмендегі суретте көрсетілген.



Сурет. Жол желілерінің схемасы

Бір автокөліктің сыйымдылығы бірыңғай жүктің 30 бірлігінен аспайтындай болу керек. Тасымалдауды қозғалмалы құрамның жүрісі минималды өлшемге ие болатындай етіп ұйымдастыру қажет болады.

Жол желісінің схемасында сағат бағыты бойынша, ең алыстатылғанынан бастап A нүктесінің концентрлі шеңбер айналасындағы пункттерге номер тағайындайды. A нүктесіне 0 -дік номер тағайындалады.

Осы жерде дайындық жұмысы аяқталады да, бірнеше кезеңнен тұратын есептің шешімін алу басталады.

Бірінші кезең. Бұл кезеңде әрбір маршрутқа арналған пункттерді жинақтау жұмысы жүргізіледі.

1-маршрутқа пункттерді жинақтау 1-пунктінің A нүктесінен өшірілген өзін енгізуден басталады. Содан кейін осы пунктпен байланысқан жол желілерінің буындары қарастырылады.

Қарастырылған мысалда мұндай буындар екеу: 6 км ұзындығы бар — 1–8 және 5 км ұзындығы бар — 1–9. Осы буындар арасынан ең аз буын таңдалынады және оның екінші төбесі 9 бірінші маршрутқа енгізіледі. Әрі қарай осыған дейін маршрутқа енгізілген 1 және 9 пункттермен байланысты буындар қарастырылады. Сонымен, осыған дейін маршрутқа енгізілген екі байланысқан пункт ескерілмейді.

Маршрутқа 1 және 9 пункттері енгізілгеннен кейін бес буындар: 1–8; 9–8; 9–10; 9–2 және 9–3 ұзындықтарын салыстыру керек. Ең аз ұзындыққа (2 км) 9–2 буыны ие болады. Демек, 2-пункт бірінші маршруттың үшінші пунктісі болады.

Маршрутты толығымен жинақтау үшін, дәл сол сияқты қозғалмалы құрамның жүктерінің сыйымдылық бірлігін максималды пайдалануға мүмкін болатын пункттері таңдалынады. Осыған байланысты маршрутқа пункттерді жинақтау процесінде, автокөлікте орналасқан жүктер саны өзінің сыйымдылығынан аспауын міндетті түрде бақылау керек.

Маршрутты толығымен жинақтау жұмысын ыңғайлату үшін 2-кесте құрастырылады, ондағы маршрутқа енгізілетін пункттер сызылып тасталынады. 1-маршрутқа пункттер жинақталғаннан кейін, 1, 9, 2, 8, 10, 3 пункттері сызылады.

2 - кесте

Пункттер нөмірлері										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Қарастырылып отырған мысалда автокөліктің максималды артылуы жүктің 30 бірлігінен тұрады. Осы шектеулерді ескере отырып, пункттер екі тасымалды-жинақтау маршруты бойынша топталады.

3 - кесте

Пунктінің жүк айналымы, дана	Маршрут пункттері						Барлығы
	1	9	2	8	10	3	
Енгізу	5	4	5	2	3	9	28
Шығару	6	-	5	4	10		25

4 - кесте

Пунктінің жүк айналымы, дана	Маршрут пункттері					Барлығы
	4	11	5	7	6	
Енгізу	5	7	4	5	2	23
Шығару	5	8	6	4	3	26

Белгіленген пунктте бағытталған барлық жүкті автокөлікке сыйдыра алмағандықтан, маршрутқа пункттерді жинақтау кезінде, алдын ала таңдалған пунктіден ең аз арақашықтықта жатқан қандайда бір пункт маршрутқа енгізілмеуі мүмкін. Мұндай жағдайда берілген пунктін автокөлікке сыйатын жүк көлемі бар, алдын ала таңдалынған жақын пунктте ауыстыру керек. Автокөлік жүрісінің кейбір ұлғайюна қарамастан, бұл жүктің автокөлікке сыйымдылығын пайдалануға мүмкіндік береді. 2-кестедегі барлық пункттер сызылып тасталса, онда маршрутқа пункттерді жинақтау аяқталады, ал тасымалдау көлемінің қосындысы берілген өлшемді құрайтын болады (3, 4-кестелер).

Екінші кезең. Бұл кезеңнің мақсаты маршрут пункттерінен айналып өтудің қысқа жолын табу болып саналады, 0 пунктінен бастап (А қоймасы). Ол үшін арнайы әрбір маршрут пункттерінің арасындағы арақашықтық матрицалары құрастырылады. Матрица симметриялы болуы мүмкін, егер барлық жол желілер бөліктерінде қозғалыс екі бағытты болатын болса, немесе симметриялы емес, егер желілер бөліктеріндегі қозғалыс бір бағытты болатын болса. Симметриялы және симметриялы емес матрицалар есептеулері бірдей жүргізіледі. Қарастырылып отырған мысалда жол желілеріндегі қозғалыс шектеулері көрсетілмеген, сондықтан арақашықтық матрицалары симметриялы болады. 1-маршрут бойынша арақашықтық матрицасы 5-кестеде келтірілген.

5 - к е с т е

1-маршруттың арақашықтық матрицасы

0	10	5	7	4	2	5
10	1	5	7	6	9	11
5	5	9	2	3	4	6
7	7	2	2	5	6	8
4	6	3	5	8	6	9
2	9	4	6	6	10	3
5	11	6	8	9	3	3
33	48	25	35	33	30	42

Диагональ бойынша маршрут пункттерінің нөмірлері жазылады. i -ші жол мен j -ші бағаналар қиылысуында i және j пункттерінің арасындағы арақашықтық көрсетіледі. Матрицаның қорытынды жолы қосындылар жолы деп аталады. Онда әрбір бағана бойынша қосындылар арақашықтығы көрсетіледі. Басында қосындылар жолындағы ең үлкен мәндер сәйкес келетін үш пунктін айналып өту маршруты белгіленеді. Кестедегі ең үлкен мәндер 1, 3 және 2-пунктілеріне сәйкес келіп тұр. Бұл 1, 3 және 2-пункттері алғашқы сақиналы маршрутты жасайды: 3–2–1–3. Бұл маршрутқа 4-пункт қосылады, оған қосындылар жолындағы максимумы бойынша қосындылар арақашықтық мәнінің келесісі сәйкес келеді. 0 пунктін алайық. Оны алғашқы маршруттың қандай пункттерінің арасына қою керектігін анықтау үшін, осы пунктін маршруттына қосылу арқылы шақырылатын, Δ_{i-j} маршруты ұзындығының мүмкін болатын минималды ұлғаятын өлшемін анықтау қажет. Алғашқы маршруттың әрбір көршілес қос пункттері 3–2, 2–1, 1–3 үшін Δ_{i-j} мәні келесі формула бойынша анықталады:

$$\Delta_{i-j} = l_{i-k} + l_{k-j} - l_{i-j},$$

мұндағы l — пункттер арасындағы арақашықтық (км); i — буынның бірінші пунктін нөмірі; j — буынның екінші пунктін нөмірі; k — енгізілетін пунктін нөмірі.

1-маршруттың алғашқы қос 3–2 пункттері үшін:

$$\Delta_{3-2} = l_{3-0} + l_{0-2} - l_{3-2}, \text{ немесе } \Delta_{3-2} = 5 + 7 - 8 = 4 \text{ км.}$$

2–1 пункттері үшін: $\Delta_{2-1} = 7 + 10 - 7 = 10 \text{ км.}$

1–3 пункттері үшін: $\Delta_{1-3} = 10 + 5 - 11 = 4 \text{ км.}$

Барлық алынған өсімше мәндердің ішінен ең аз арақашықтықты таңдаймыз және оған сәйкес келетін пункттер арасына 0-ші пунктін қоямыз. Берілген жағдайда минималды өсімше 0-ші пунктін 2 немесе 1–3 буындарына қосқанда орындалады. Олардың арасынан кез келгенін алайық. Мысалы, 1–3 буыны. Онда маршрут мынадай: 3–2–1–0–3 пункттері тізбегіне ие болады. Маршрут қозғалысы 0-ші пунктіден басталып және өзімен аяқталатындықтан, пункттерді айналып өту тізбегі келесі түрде келтіріледі: 0–3–2–1–0. Содан кейін 5-кестеден қосындылар жолындағы арақашықтық өлшемі мәнінің кемуі бойынша келесісіне сәйкес келетін пунктін таңдалады. Ол 8-пункт болып табылады.

Алдындағы маршруттардың барлық буындарын талдай отырып, 8 тәуірлеу рационалдық пунктін 1 және 0 пункттер арасында қосылатынына сенімді бола аламыз. Көрсетілген амалдарды 10 және 9 пункттер үшін қайталау арқылы, 1-маршруттың барлық пункттерін рационалды айналып өту ретін аламыз, ол мынадай: 0–10–3–9–2–1–8–0.

2-маршрутты пунктін айналып өту тізбегін анықтау үшін, алдын ала 2-маршруттың арақашықтық матрицасын құрып, ұқсас есептеулерді жүргізу керек.

Сонымен, математикалық жоспарлау әдісінің көмегімен құрастырылған, қозғалмалы құрамның рационалды маршрут бойынша жұмысы, келтірілмейтін аралықты минимумға дейін қысқартуға және соның арқасында жүктерді ең аз транспорттық шығынмен тасымалдауды іске асыруға мүмкіндік береді.

References

- 1 *Larionov A.I., Jurchenko T.I.* Economic-mathematical methods in planning. — M.: Higher school, 1984. — 248 p.
- 2 *Akulich L.I.* Mathematical programming in examples and problems. — M.: Higher school, 1986. — 496 p.
- 3 *Kozhin A.P.* Mathematical methods in planning and management of freight traffic. — M.: Higher school, 1991. — 296 p.

А.М.Омаров, Ж.Т.Есендаулетова

Нахождение рационального маршрута на основе итерационного метода

В статье рассматривается одна сетевая задача поставки грузов и нахождения оптимального маршрута на основе итерационного метода. Приведен подробный алгоритм итерационного метода с учетом определенных ограничений, который вызывается конкретными условиями поставленной задачи. Решение задачи определяется методом «сумм», который является частным случаем итерационного метода. На основе приведенного примера детально разобраны два этапа решения задачи метода «сумм».

A.M.Omarov, Zh.T.Esendauletova

Finding of rational route on the basis of iterative method

In article one network problem of delivery of cargoes and a finding of an optimum route on the basis of an iterative method is considered. The detailed algorithm of an iterative method taking into account certain restrictions which is caused by concrete conditions of a task in view is resulted. The problem decision is defined by a method of "Sums" which is a special case of an iterative method. The problem decision is defined by a method of "Sums". This method is a special case of an iterative method. Two stages of the decision of a problem of a method of "Sums" are considered. On the basis of the resulted example it is in details disassembled two stages of the decision of a problem of a method of "Sums".

А.П.Солдатов¹, М.И.Рамазанов², Б.А.Шалдыкова³

¹Белгородский государственный университет, Россия;

²Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова;

³Рудненский индустриальный институт (E-mail: bahyt21@mail.ru)

О граничной задаче для спектрально-нагруженного параболического оператора II

В данной работе продолжено исследование граничных задач для спектрально-нагруженных уравнений параболического типа в неограниченных областях, когда порядок производной нагруженного слагаемого совпадает с порядком дифференциальной части уравнения и точка нагрузки по пространственной переменной движется с переменной скоростью. Показано, что движение точки нагрузки происходит по закону $x = \alpha(t)$, где $\alpha(t) = [t(1 + \alpha(t))]^\omega$ и $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t)}{\sqrt{t}} = \infty$.

Ключевые слова: характеристические уравнения, особые интегральные уравнения Вольтерра второго рода, метод регуляризации, условия ортогональности.

Данная статья является продолжением работы [1], в которой были рассмотрены граничные задачи для спектрально-нагруженного уравнения теплопроводности и обобщенные спектральные задачи (1–4), которые были сведены к решению союзных особых интегральных уравнений Вольтерра второго рода (17) и (21).

Для решения данных особых интегральных уравнений Вольтерра были построены соответствующие характеристические интегральные уравнения (25), (26) [2–6].

4. *Исследование характеристических интегральных уравнений.* Для исследования характеристических уравнений (25) и (26) произведем в них замены переменных:

$$\alpha(t) = [(1 - 2\omega)t_1]^{\frac{\omega}{1-2\omega}}, \quad \alpha(\tau) = [(1 - 2\omega)\tau_1]^{\frac{\omega}{1-2\omega}}$$

и введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \varphi(t_1) &= t_1^{\frac{3/2+\omega}{1-2\omega}} \mu \left(\{(1-2\omega)t_1\}^{\omega/(1-2\omega)} \right), \quad f_2(t_1) = t_1^{\frac{3/2+\omega}{1-2\omega}} f_1 \left(\{(1-2\omega)t_1\}^{\omega/(1-2\omega)} \right), \\ \psi(t_1) &= t_1^{\frac{\omega-3/2}{1-2\omega}} \nu \left(\{(1-2\omega)t_1\}^{\omega/(1-2\omega)} \right), \quad g_2(t_1) = t_1^{\frac{\omega-3/2}{1-2\omega}} g_1 \left(\{(2\omega-1)t_1\}^{\omega/(1-2\omega)} \right), \end{aligned} \quad (35)$$

$$k(t_1 - \tau_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(t_1 - \tau_1)^{3/2}} \exp \left(-\frac{1}{4(t_1 - \tau_1)} \right), \quad 0 < \tau_1 < t_1 < \infty, \quad (36)$$

$$k^*(\tau_1 - t_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(\tau_1 - t_1)^{3/2}} \exp \left(-\frac{1}{4(\tau_1 - t_1)} \right), \quad 0 < t_1 < \tau_1 < \infty. \quad (37)$$

Тогда рассматриваемые уравнения преобразуются в уравнения типа свертки:

$$k_\lambda \varphi \equiv (I - \lambda k) \varphi \equiv \varphi(t_1) - \lambda \int_0^{t_1} k(t_1 - \tau_1) \varphi(\tau_1) d\tau_1 = f_2(t_1), \quad 0 < \tau_1 < t_1 < \infty, \quad (38)$$

$$k_\lambda^* \psi \equiv (I - \lambda k^*) \psi \equiv \psi(t_1) - \lambda \int_{t_1}^\infty k(\tau_1 - t_1) \psi(\tau_1) d\tau_1 = g_2(t_1), \quad 0 < t_1 < \tau_1 < \infty. \quad (39)$$

Эти уравнения были исследованы ранее. Используя полученные ранее результаты, запишем решения союзных характеристических интегральных уравнений (38) и (39) в следующем виде:

$$\varphi_\lambda(t_1) = \lambda \int_0^{t_1} r_{\lambda+}(t_1 - \tau_1) f_2(\tau_1) d\tau_1 + f_2(t_1), \quad t_1 \in R_+, \quad (40)$$

$$\psi_\lambda(t_1) = \bar{\lambda} \int_{t_1}^\infty r_{\lambda-}(t_1 - \tau_1) g_2(\tau_1) d\tau_1 + g_2(t_1) + \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \exp(-iz_k t_1), \quad t_1 \in R_+, \quad (41)$$

где $r_{\lambda-}(\theta)$ и $r_{\lambda+}(\theta)$ есть сужения на отрицательную и положительную полуоси оригинала Фурье $R_{\lambda}^{-}(\theta)$, $R_{\lambda}^{+}(\theta)$, определяемые по формулам

$$r_{\lambda-}(\theta) = 2 \sum_{k=-\infty}^{-(N_1+1)} \sqrt{iz_k} \exp(-iz_k \theta) + 2 \sum_{k=N_2+1}^{\infty} \sqrt{iz_k} \exp(-iz_k \theta) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}(-\theta)^{3/2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\lambda^m} \exp\left(\frac{m^2}{4\theta}\right), \quad \operatorname{Re}\{iz_k\} < 0, \quad |\lambda| > 1, \quad \theta \in R_{-}, \quad (42)$$

$$r_{\lambda-}(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(-\theta)^{3/2}} \sum_{m=1}^{\infty} m \lambda^m \exp\left(\frac{m^2}{4\theta}\right), \quad |\lambda| \leq 1, \quad \theta \in R_{-},$$

$$r_{\lambda+}(\theta) = 2 \sum_{k=-\infty}^{-(N_1+1)} \sqrt{-iz_k} \exp(iz_k \theta) + 2 \sum_{k=N_2+1}^{\infty} \sqrt{-iz_k} \exp(iz_k \theta) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\lambda^m} \exp\left(-\frac{m^2}{4\theta}\right), \quad \operatorname{Re}\{-iz_k\} > 0, \quad |\lambda| > 1, \quad \theta \in R_{+}, \quad (43)$$

$$r_{\lambda+}(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} \sum_{m=1}^{\infty} m \lambda^m \exp\left(-\frac{m^2}{4\theta}\right), \quad |\lambda| \leq 1, \quad \theta \in R_{+},$$

где числа z_k , N_1 , N_2 определяются по формулам

$$z_k = s_k + i\sigma_k = 2(\arg \lambda + 2k\pi) \ln |\lambda| - i \left[\ln^2 |\lambda| - (\arg \lambda + 2k\pi)^2 \right], \quad k \in Z, \quad (44)$$

$$-N_1 \leq k \leq N_2, \quad N_1 = \left\lfloor \frac{\ln |\lambda| + \arg \lambda}{2\pi} \right\rfloor, \quad N_2 = \left\lfloor \frac{\ln |\lambda| - \arg \lambda}{2\pi} \right\rfloor. \quad (45)$$

Теперь в (25) и (26) произведем обратные замены переменных:

$$t_1 = \left\{ (1-2\omega) [\alpha(t)]^{-\frac{1-2\omega}{\omega}} \right\}^{-1}, \quad \tau_1 = \left\{ (1-2\omega) [\alpha(\tau)]^{-\frac{1-2\omega}{\omega}} \right\}^{-1},$$

$$\varphi(t_1) = \left\{ (1-2\omega) [\alpha(t)]^{-\frac{1-2\omega}{\omega}} \right\}^{\frac{\omega-3/2}{1-2\omega}} \mu(t), \quad f_2(t_1) = \left\{ (1-2\omega) [\alpha(t)]^{-\frac{1-2\omega}{\omega}} \right\}^{\frac{\omega-3/2}{1-2\omega}} f_1(t),$$

$$\psi(t_1) = \left\{ (1-2\omega) [\alpha(t)]^{-\frac{1-2\omega}{\omega}} \right\}^{\frac{3/2-\omega}{1-2\omega}} v(t), \quad g_2(t_1) = \left\{ (1-2\omega) [\alpha(t)]^{-\frac{1-2\omega}{\omega}} \right\}^{\frac{3/2-\omega}{1-2\omega}} g_1(t).$$

Тогда согласно (25) и (26) решения сопряженных характеристических интегральных уравнений (3) и (4) будут определены равенствами

$$v(t) = \bar{\lambda} \int_t^{\infty} \left[\frac{\alpha(\tau)}{\alpha(t)} \right]^{-\frac{3/2-\omega}{\omega}} \frac{[(\alpha(\tau))^{1/\omega}]'}{(\alpha(\tau))^2} r_{-} \left\{ \frac{1}{1-2\omega} \left([\alpha(\tau)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}} - [\alpha(t)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}} \right) \right\} g_1(\tau) d\tau + g_1(t) + (1-2\omega)^{\frac{\omega-3/2}{1-2\omega}} [\alpha(t)]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \exp\left(-\frac{iz_k}{1-2\omega} [\alpha(t)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right), \quad t \in R_{+}, \quad (46)$$

$$\mu(t) = \lambda \int_0^t \left[\frac{\alpha(\tau)}{\alpha(t)} \right]^{-\frac{3/2-\omega}{\omega}} \frac{[(\alpha(\tau))^{1/\omega}]'}{(\alpha(\tau))^2} r_{+} \left\{ \frac{1}{1-2\omega} \left([\alpha(t)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}} - [\alpha(\tau)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}} \right) \right\} f_1(\tau) d\tau + f_1(t), \quad t \in R_{+}. \quad (47)$$

Данные решения удовлетворяют следующим условиям:

$$\varphi_{\lambda}(t) \in L_1(R_{+}), \quad \psi_{\lambda}(t) \in L_{\infty}(R_{+}). \quad (48)$$

5. *О разрешимости интегральных уравнений (1) и (2) методом регуляризации.* Покажем, что исходные интегральные уравнения можно регуляризовать решениями характеристических уравнений (25), (26).

Введем следующее обозначение:

$$\tilde{K}(\tau, t) = K_2(\tau, t) - K(\tau, t). \quad (49)$$

Учитывая уравнение (4), запишем интегральное уравнение (2) в виде

$$K_{\lambda}^* v \equiv v(t) - \bar{\lambda} \int_t^{\infty} K(\tau, t) v(\tau) d\tau = \bar{\lambda} \int_t^{\infty} \tilde{K}(\tau, t) v(\tau) d\tau + g_1(t), \quad t \in R_+. \quad (50)$$

Будем решать последнее уравнение как характеристическое, считать правую часть последнего уравнения временно известной. Тогда решение уравнения (50) запишем, согласно формуле (46), в виде

$$v(t) = g_1(t) + \bar{\lambda} \int_t^{\infty} \tilde{K}(\tau, t) v(\tau) d\tau + \bar{\lambda} \int_t^{\infty} \left[\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)} \right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \frac{[(\alpha(\tau))^{1/\omega}]'}{(\alpha(\tau))^2} r_- \left\{ \frac{1}{1-2\omega} \left([\alpha(\tau)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}} - [\alpha(t)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}} \right) \right\} \cdot \\ \left[g_1(\tau) d\tau + \bar{\lambda} \int_{\tau}^{\infty} \tilde{K}(\tau, \eta) v(\eta) d\eta \right] d\tau + (1-2\omega)^{\frac{\omega-3/2}{1-2\omega}} [\alpha(t)]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \exp \left(-\frac{iz_k}{1-2\omega} [\alpha(t)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}} \right).$$

Приведем данное уравнение к следующему виду:

$$\hat{K}_{\lambda}^* v \equiv (I - \bar{\lambda} \hat{K}^*) v \equiv v(t) - \bar{\lambda} \int_t^{\infty} \hat{K}(\tau, t) v(\tau) d\tau = \\ = \hat{g}_1(t) + (1-2\omega)^{\frac{\omega-3/2}{1-2\omega}} [\alpha(t)]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \exp \left(-\frac{iz_k}{1-2\omega} [\alpha(t)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}} \right), \quad t \in R_+, \quad (51)$$

где

$$\hat{K}(\tau, t) = \tilde{K}(\tau, t) + \bar{\lambda} \int_t^{\tau} \left[\frac{\alpha(t)}{\alpha(\eta)} \right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \frac{[(\alpha(\eta))^{1/\omega}]'}{(\alpha(\eta))^2} r_- \left\{ \frac{1}{1-2\omega} \left([\alpha(\eta)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}} - [\alpha(t)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}} \right) \right\} \cdot \tilde{K}(\tau, \eta) d\eta = \tilde{K}(\tau, t) + \bar{\lambda} \tilde{\tilde{K}}(\tau, t), \quad (52)$$

$$\hat{g}_1(t) = g_1(t) + \bar{\lambda} \int_t^{\infty} \left[\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)} \right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \frac{[(\alpha(\tau))^{1/\omega}]'}{(\alpha(\tau))^2} r_- \left\{ \frac{1}{1-2\omega} \left([\alpha(\tau)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}} - [\alpha(t)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}} \right) \right\} g_1(\tau) d\tau. \quad (53)$$

Покажем, что интегральное уравнение (51) разрешимо методом последовательных приближений, т.е. является регулярным. Для этого достаточно показать справедливость следующей оценки:

$$|\hat{K}(t, \tau)| \leq C(\omega) \frac{t^{-\varepsilon}}{\tau^{-1-\omega-\varepsilon} \sqrt{\tau-t}}, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1-2\omega}{2}, \quad 0 < t < \tau < \infty. \quad (54)$$

Вначале преобразуем интегральное уравнение (20) на конечном интервале. Для этого в данном уравнении произведем замены переменных

$$t = t_1^{-1}, \quad \tau = \tau_1^{-1}, \quad \alpha(t) = \frac{1}{\alpha(t_1)}, \quad \alpha(\tau) = \frac{1}{\alpha(\tau_1)},$$

получим

$$v(t_1) - \bar{\lambda} \int_0^{t_1} K'(t_1, \tau_1) v(\tau_1) d\tau_1 = \bar{\lambda} \int_0^{t_1} \tilde{K}'(t_1, \tau_1) v(\tau_1) d\tau_1 + g_1(t_1), \quad (55)$$

где

$$\tilde{K}'(t_1, \tau_1) = K'_2(t_1, \tau_1) - K'(t_1, \tau_1) \quad (56)$$

и ядра $K'_2(t_1, \tau_1)$, $K'(t_1, \tau_1)$ определяются из равенства (32). Тогда равенства (51)–(53) примут вид

$$\hat{K}_{\lambda}^* v \equiv (I - \bar{\lambda} \hat{K}^*) v \equiv v(t_1) - \bar{\lambda} \int_0^{t_1} \hat{K}'(t_1, \tau_1) v(\tau_1) d\tau_1 = \\ = \hat{g}_1(t_1) + (1-2\omega)^{\frac{\omega-3/2}{1-2\omega}} [\alpha(t_1)]^{\frac{\omega-3/2}{\omega}} \cdot \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \exp \left(-\frac{iz_k}{1-2\omega} [\alpha(t_1)]^{\frac{2\omega-1}{\omega}} \right), \quad (57)$$

где

$$\hat{K}'(t_1, \tau_1) = \tilde{K}(t_1, \tau_1) + \bar{\lambda} \int_{\tau_1}^{t_1} \left[\frac{\alpha(\eta)}{\alpha(t_1)} \right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \frac{[(\alpha(\eta))^{1/\omega}]'}{[\alpha(\eta)]^{\frac{2-2\omega}{\omega}}} r_- \left\{ \frac{1}{1-2\omega} \left([\alpha(t_1)]^{\frac{2\omega-1}{\omega}} - [\alpha(\eta)]^{\frac{2\omega-1}{\omega}} \right) \right\} \tilde{K}'(\eta, \tau_1) d\eta = \tilde{K}'(t_1, \tau_1) + \bar{\lambda} \tilde{\tilde{K}}'(t_1, \tau_1), \quad (58)$$

$$\hat{g}_1(t_1) = g_1(t_1) + \bar{\lambda} \int_0^{t_1} \left[\frac{\alpha(\tau_1)}{\alpha(t_1)} \right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \frac{[(\alpha(\tau_1))^{1/\omega}]'}{[\alpha(\tau_1)]^{\frac{2-2\omega}{\omega}}} r_- \left\{ \frac{1}{1-2\omega} \left([\alpha(t_1)]^{\frac{2\omega-1}{\omega}} - [\alpha(\tau_1)]^{\frac{2\omega-1}{\omega}} \right) \right\} g_1(\tau_1) d\tau_1. \quad (59)$$

Теперь покажем, что интегральное уравнение (57) действительно является регулярным, т.е. разрешимо методом последовательных приближений. Вначале преобразуем оценку для резольвенты:

$$\begin{aligned} & \left| r_{\lambda-} \left\{ \frac{1}{1-2\omega} \left([\alpha(\eta)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}} - [\alpha(t_1)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}} \right) \right\} \right| \leq \\ & \leq M_1 \frac{(1-2\omega)^{1/2} (\alpha(t_1)\alpha(\eta))^{\frac{1-2\omega}{2\omega}}}{\left([\alpha(t_1)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}} - [\alpha(\eta)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}} \right)^{1/2}} \exp \left(-\frac{\delta_0}{1-2\omega} \frac{[\alpha(t_1)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}} - [\alpha(\eta)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}}{[\alpha(t_1)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}} [\alpha(\eta)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}} \right) + \\ & + M_2 \frac{(1-2\omega)^{3/2} (\alpha(t_1)\alpha(\eta))^{\frac{3(1-2\omega)}{2\omega}}}{\left([\alpha(t_1)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}} - [\alpha(\eta)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}} \right)^{3/2}} \exp \left(-\delta_0 (1-2\omega) \frac{[\alpha(t_1)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}} [\alpha(\eta)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}}{[\alpha(t_1)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}} - [\alpha(\eta)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}} \right). \end{aligned}$$

Далее, при условии, что $\alpha(t) = [t(1 + \alpha_0(t))]^{\omega}$ и $|\alpha_0(t_1) + t_1 \alpha_0'(t_1)| < 1$, будем иметь:

$$\begin{aligned} & \left| r_{\lambda-} \left\{ \frac{1}{1-2\omega} \left([\alpha(\eta)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}} - [\alpha(t_1)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}} \right) \right\} \right| \leq \\ & \leq \tilde{M}_1 \frac{\sqrt{t_1} \eta^{-\omega+1/2}}{\sqrt{t_1 - \eta}} \exp \left(-C_1(\omega) \frac{t_1 - \eta}{t_1 \eta^{1-2\omega}} \right) + \tilde{M}_2 \frac{t_1^{3/2} \eta^{\frac{3}{2}(1-2\omega)}}{(t_1 - \eta)^{3/2}} \exp \left(-C_2(\omega) \frac{t_1 \eta^{1-2\omega}}{t_1 - \eta} \right). \end{aligned} \quad (60)$$

Здесь $C_j(\omega)$, $\tilde{M}_j(\omega)$, $j = 1, 2$ – постоянные, зависящие только от ω .

Справедлива следующая лемма:

Лемма 3. Если $0 < \varepsilon < \frac{1-2\omega}{2}$, $0 < \tau_1 < t_1 < \infty$, то имеет место оценка

$$|\hat{K}'(t_1, \tau_1)| \leq C \frac{t^{1/2+\varepsilon}}{\tau^{\omega+1/2+\varepsilon} \sqrt{t_1 - \tau_1}}. \quad (61)$$

Доказательство леммы 1 будет следовать из оценок для резольвенты (60), оценки (33) и [1].

Итак, в силу оценки (61) уравнение (57), а вместе с ним и уравнение (51) имеют только единственное решение, существование которого можно показать методом последовательных приближений.

Из соотношений (50) и (51) следует, что однородное уравнение

$$K_{2\lambda}^* v \equiv (I - \lambda K_2^*) v \equiv v(t) - \lambda \int_0^t K_2(\tau, t) v(\tau) d\tau = 0, \quad t \in R_+ \quad (62)$$

равносильно неоднородному уравнению

$$\hat{K}_{\lambda}^* v \equiv v(t) - \lambda \int_t^{\infty} \hat{K}(\tau, t) v(\tau) d\tau = (1-2\omega)^{\frac{\omega-3/2}{1-2\omega}} [\alpha(t)]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \exp \left(i z_k \frac{[\alpha(t)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}}{1-2\omega} \right), \quad t \in R_+. \quad (63)$$

Рассмотрим вместо (63) семейство интегральных уравнений:

$$\hat{K}_\lambda^* v \equiv v(t) - \lambda \int_t^\infty \hat{K}(t, \tau) v(\tau) d\tau = (1 - 2\omega)^{\frac{\omega-3/2}{1-2\omega}} [\alpha(t)]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \exp\left(\frac{iz_k}{1-2\omega} [\alpha(t)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right), \quad (64)$$

$$k = -N_1, \dots, 0, \dots, N_2, \quad t \in R_+.$$

В силу того, что каждое из уравнений (64) имеет единственное нетривиальное решение $v_{\lambda k}(t)$, $k = -N_1, \dots, 0, \dots, N_2$ (соответствующее правой части уравнения (64) $[\alpha(t)]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \exp\left(\frac{iz_k}{1-2\omega} [\alpha(t)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)$), то для каждого значения параметра $\lambda \in C \setminus D_0$ эти функции $v_{\lambda k}(t)$, $k = -N_1, \dots, 0, \dots, N_2$, будут соответствующими собственными функциями однородного уравнения (62) (а значит, и однородного для (21) уравнения).

Справедливы следующие леммы:

Лемма 4. Значения $\lambda \in D_0$ являются регулярными числами оператора $K_{2\lambda}^*$ (21).

Лемма 5. Множество $C \setminus D_0$ составляет характеристические числа оператора $K_{2\lambda}^*$ (21). Причем, если $\lambda \in D_m \cup \Gamma_{m-1} \setminus \{(-1)^m e^{m\pi}\}$, $m = 1, 2, \dots$, то $\dim \text{Ker}(K_{2\lambda}^*) = \chi(\lambda) = m$; и соответствующими собственными функциями будут решения уравнений (64):

$$v_{\lambda k}(t) = [\hat{K}_\lambda^*]^{-1} \left[[\alpha(t)]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \exp\left(-\frac{iz_k}{1-2\omega} [\alpha(t)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right) \right], \quad k = 1, \dots, m = N_1 + N_2 + 1.$$

Замечание 5. Общим решением неоднородного интегрального уравнения (21) будет функция

$$v_\lambda(t) = [\hat{K}_\lambda^*]^{-1} \hat{g}(t) + \sum_{k=1}^{m=N_1+N_2+1} c_k v_{\lambda k}, \quad t \in R_+, \quad (65)$$

где c_k , $k = 1, \dots, m$, — произвольные постоянные.

Перейдем к рассмотрению интегрального уравнения (1), являющегося союзным для уравнения (2). Однородное интегральное уравнение, соответствующее уравнению (1), для любого $\lambda \in C$ имеет только тривиальное решение. Таким образом, справедлива

Лемма 6.1. Каждое значение $\lambda \in C$ является регулярным числом оператора $K_{2\lambda}$ (17).

2. Неоднородное интегральное уравнение (17) однозначно разрешимо при любой правой части $f_1(t)$, если $\tilde{\lambda} \in D_0$.

3. Если $\lambda \in D_m \cup \Gamma_{m-1} \setminus \{(-1)^m e^{m\pi}\}$, $m = 1, 2, \dots$, то для однозначной разрешимости неоднородного интегрального уравнения (17) необходимо и достаточно, чтобы функции $f_1(t)$ удовлетворяли следующим условиям ортогональности:

$$\int_0^\infty v_{\lambda k}(t) f_1(t) dt = 0, \quad k = 1, \dots, m = \chi(\lambda) = N_1 + N_2 + 1. \quad (66)$$

Замечание 6. Согласно утверждениям леммы 6 решением неоднородного интегрального уравнения (17) будет функция

$$\mu_\lambda(t) = [K_{2\lambda}]^{-1} f_1(t), \quad t \in R_+. \quad (67)$$

Замечание 7. Из изложенных выше результатов непосредственно следует, что

$$\mu_\lambda(t) \in L_1(R_+), \quad v_\lambda(t) \in L_\infty(R_+). \quad (68)$$

6. Исследование граничных задач (1) и (2). Решение задачи (1) запишем в виде

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t (\alpha(\tau))^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} K_0(x, t - \tau) \mu_\lambda(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (69)$$

где функции $\mu_\lambda(t)$ определяются из (67) и $\alpha(t)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} f(x, t) \in L_1(Q)$. Учитывая неотрицательность функций $K_0(x, t - \tau)$ (13) и $G(x, \xi, t - \tau)$ (6), заключаем, что функция (69) полностью удовлетворяет граничной задаче (1) и принадлежит классу (7).

Далее, запишем решение задачи (2) в виде

$$v(x, t) = -\lambda \int_t^\infty (\alpha(\tau))^{\frac{\omega-3/2}{\omega}} G_{\xi\xi}(x, \xi, \tau-t)|_{\xi=\alpha(\tau)} v_\lambda(\tau) d\tau + \int_0^\infty \int_0^\infty G(x, \xi, \tau-t) g(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (70)$$

где функция $v_\lambda(t) \in L_\infty(R_+)$ из (65).

Сформулируем полученные результаты по разрешимости граничных задач (1) и (2) в виде следующих теорем.

Теорема 3. Если $\lambda \in D_0$, то для $\forall f$ граничная задача (1) имеет единственное решение $u \in U$.

Если $\lambda \in \{C \setminus D_0\} \cap \{D_m \cup \Gamma_{m-1} \setminus \{(-1)^m e^{m\pi}\}\}$, то для однозначной разрешимости граничной задачи (1) в классе U необходимо и достаточно, чтобы функция f удовлетворяла условиям ортогональности:

$$\int_0^\infty v_{\lambda k}(x, t) f(x, t) dx dt = 0, \quad k=1, \dots, m=\chi(\lambda)=N_1+N_2+1. \quad (71)$$

Теорема 4. Если $\lambda \in D_0$, то для $\forall g$ граничная задача (2) имеет единственное решение $v \in V$.

Если $\lambda \in \{C \setminus D_0\} \cap \{D_m \cup \Gamma_{m-1} \setminus \{(-1)^m e^{m\pi}\}\}$, то для $\forall g$ граничная задача (2) имеет общее решение $v \in V$, состоящее из решений $v_{одн.}(x, t)$ однородного уравнения:

$$v_{одн.}(x, t) = \sum_{k=1}^m c_k v_{\lambda k}(x, t), \quad (72)$$

$$v_{\lambda k}(x, t) = -\bar{\lambda} \int_t^\infty (\alpha(\tau))^{\frac{\omega-3/2}{\omega}} K_0(x, t-\tau) v_{\lambda k}(\tau) d\tau, \quad (73)$$

где $v_{\lambda k}(t) = [\hat{K}_\lambda^*]^{-1} \left[\exp\left(-\frac{iz_k}{1-2\omega} (\alpha(t))^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right) \right]$, $k=1, \dots, m$, c_k , — произвольные постоянные, и частного решения $v_{част.}(x, t)$:

$$v_{част.}(x, t) = -\bar{\lambda} \int_t^\infty (\alpha(\tau))^{\frac{\omega-3/2}{\omega}} K_0(x, t-\tau) [\hat{K}_\lambda^*]^{-1} \hat{g}(\tau) d\tau + \int_0^\infty \int_0^\infty (\alpha(\tau))^{\frac{\omega-3/2}{\omega}} G(x, \xi, t-\tau) \tau^{3/2-\omega} g(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (74)$$

7. Обобщенная спектральная задача. Непосредственно из утверждений лемм 3–6 получаем:

Теорема 3. Множество значений $\lambda \in C$ есть резольвентное множество оператора L_1 (3).

Теорема 4. Открытое множество D_0 является резольвентой для оператора L_1^* (4), а его дополнение $C \setminus D_0$ составляет спектр оператора L_1^* (4). Причем, если $\lambda \in D_m \cup \Gamma_{m-1} \setminus \{(-1)^m e^{m\pi}\}$, $m = 1, 2, \dots$, то $\dim \text{Ker}(L_1) = \chi(\lambda) = m$; и соответствующие собственные функции оператора L_1^* (4) определяются согласно формулам

$$v_{\lambda k}(x, t) = -\bar{\lambda} \int_t^\infty (\alpha(\tau))^{\frac{\omega-3/2}{\omega}} K_0(x, t-\tau) v_{\lambda k}(\tau) d\tau, \quad k=1, \dots, m=\chi(\lambda)=N_1+N_2+1, \quad (75)$$

где

$$v_{\lambda k}(t) = [\hat{K}_\lambda^*]^{-1} \left[\exp\left(\frac{iz_k}{1-2\omega} (\alpha(t))^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right) \right], \quad k=1, \dots, m=\chi(\lambda)=N_1+N_2+1.$$

References

- 1 Soldatov A.P., Ramazanov M.I., Shaldykova B.A. About the boundary value problems for the spectrally-loaded parabolic operator. I // Vestnik of KarSU. Mathematics series. — 2011. — № 2 (61). — P. 10–18.
- 2 Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I. On the boundary value problem for the spectrally-loaded heat conduction operator // Siberian Mathematical Journal. — 2006. — Vol. 47. — № 3. — P. 527–547.

3 *Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I.* On a boundary value problem for a spectrally-loaded heat operator. I // Siberian Mathematical Journal. — 2007. — Vol. 43. — № 4. — P. 498–508.

4 *Amangalieva M.M., Ahmanova D.M., Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I.* The boundary value problems for the spectrally-loaded heat conduction operator with approaching loaded line in zero or infinity // Different. equations. — 2011. — Vol. 47. — № 2. — P. 231–243.

5 *Dzhenaliev M.T., Shaldykova B.A., Kusainova B.S.* Sliding boundary problem for spectrally-loaded heat conduction operator. I // Vestnik of KarSU. Mathematics series. — 2010. — № 1 (57). — P. 12–19.

6 *Shaldykova B.A.* Sliding boundary problem for spectrally-loaded heat conduction operator. II // Vestnik of KarSU. Mathematics series. — 2010. — № 2 (58). — P. 75–82.

А.П.Солдатов, М.И.Рамазанов, Б.А.Шалдыкова

Спектралды жүктелген парабодалық операторына қойылған шекаралық есеп туралы II

Мақалада шексіз облыстардағы спектралды-жүктелген парабодалық түрдегі шекті есептердің зерттелуі жалғастырылған, бұл жерде жүктелген қосынды туындының реті тендеудің дифференциалды бөлігі ретімен дәл келіп, жүк нүктесі кеңістік айнымалысымен ауыспалы жылдамдықпен қозғалуда. Жүк нүктесінің қозғалысы $x = \alpha(t)$ заңы бойынша жүзеге асады, мұнда

$$\alpha(t) = [t(1 + \alpha(t))]^0; \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t)}{\sqrt{t}} = \infty.$$

A.P.Soldatov, M.I.Ramazanov, B.A.Shaldykova

On the boundary value problem for the spectrally loaded parabolic operator II

The object of this research is to continue investigation of the boundary value problems for the spectrally-loaded parabolic equations in unbounded domain, when the order of initial in a loaded term is equal to the order of a differential part of equation and loaded point in space variable moves with variable speed. The loaded

point is moving according to law $x = \alpha(t)$, where $\alpha(t) = [t(1 + \alpha(t))]^0$, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t)}{\sqrt{t}} = \infty$.

УДК 517.62

K.B.Uxikbayev

Suleyman Demirel University, Almaty (E-mail: kanamath@gmail.com)

Approximated solution of differential equations with vertical asymptotes

In this article the method of finding an approximate solution of differential equations with vertical asymptote is considered. We propose a modification of single-step numerical methods by which to measure and consider maximum interval of existence of solutions of the Cauchy problem for ordinary differential equations in order not to build a meaningless "approximated solutions" beyond the boundaries of this interval, if it is finished. We consider the convergence of offered method and accuracy.

Key words: step-by-step methods, problem of Cauchy, Euler's method, the approached solution, high-quality affinity.

Application of step-by-step methods of the solution of a problem of Cauchy for the ordinary differential equation

$$y' = f(x, y), x \geq 0; \quad (1)$$

$$y(0) = \alpha \quad (2)$$

meets serious difficulties if the solution at $y(x)$ is not continuous on all numerical axis.

Really, customary definition of the solution as x , value forces to choose argument functions as a step. Calculations with such step do not allow to "notice", for example, a vertical asymptote of the solution.

In this study I offer modified version of the single-step methods which allows to estimate and consider the maximum interval of existence of the solution of a problem of Cauchy for the ordinary differential equations [1–6].

This modification is based on geometrical idea of consideration of the solution as a curve on a plane Oxy. At such point of view as a step it is obvious to choose the distance between points $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$, which approximates the solution.

Let's apply this idea to Euler's method described by formulas $x_{i+1} = x_i + h$, $y_{i+1} = y_i + h_i f(x_i, y_i)$. As here the integrated curve is replaced with a straight line as constant step H we will choose distance between points $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$.

$$H = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} = h_i \sqrt{1 + f^2(x_i, y_i)}.$$

From here, $h_i = \frac{H}{\sqrt{1 + f^2(x_i, y_i)}}$. Thus, Euler's method can be written in such type:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{H}{\sqrt{1 + f^2(x_i, y_i)}}, \quad y_{i+1} = y_i + \frac{Hf(x_i, y_i)}{\sqrt{1 + f^2(x_i, y_i)}}. \quad (3)$$

Let's result conditions of an extremity of the maximum interval of existence of the solution of a problem (1), (2) and we will find out behavior under these conditions of the approached solution constructed under formulas (3). The interval $[0, b)$ is considered as the maximum interval of existence of the solution $y(x)$, if $b = \infty$ or if there is no final limit $\lim_{x \rightarrow b^-} y(x)$. The corresponding solution $y(x)$ defined on $[0, b)$, is called as full. Let's note that continuity of f enough for existence of the full solution and continuity of any solution on the maximum interval.

THEOREM 1. Let $\delta > 0$ and there exist such positive numbers A, δ , which $\forall x \geq 0, y \geq \alpha$ fulfill the inequality:

$$f(x, y) \geq Ay^{1+\delta}. \quad (4)$$

Then: If there exist full solution $y(x), x \in [0, b)$, of problem (1), (2),

$$b \leq \frac{1}{A\delta\alpha^\delta} < \infty, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} y(x) = \infty;$$

For the approximated solution constructed under formulas (3), limiting parities take place $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i < \infty$, $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = \infty$.

Theorem 1 indicates the "high-quality affinity" between the approximate and exact solutions of (1), (2). To study the convergence of the proposed method is convenient to replace the problem (1), (2), the Cauchy problem for a system of two equations:

$$\begin{cases} y'_t = \frac{f(x, y)}{\sqrt{1 + f^2(x, y)}}; \\ x'_t = \frac{1}{\sqrt{1 + f^2(x, y)}}; \end{cases} \quad (5)$$

$$x(0) = 0, y(0) = \alpha. \quad (6)$$

Solution of this system are the functions $x = x(t), y = y(t)$, defining the parametric equations of the integral curve of (1), (2). Formula (3) are the formulas of Euler's method solution to problem (5), (6) with the step H of the parameter t. Require the following statement about the continuous dependence of solutions $(x(t), y(t))$ to (5) of the initial conditions. Choose an arbitrary number $T > 0, \beta, \gamma$. Denote by $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ is the solution to (5), for which $\bar{x}(T) = x(T) + \beta, \bar{y}(T) = y(T) + \beta$.

THEOREM 2. Let for $x \geq 0, y \geq \alpha > 0$, function $f(x, y)$ satisfies the inequality (4) and has continuous partial derivatives, and $\exists B > 0$, such that

$$|f'_x(x, y)| \leq Bf(x, y), \quad |f'_y(x, y)| \leq Bf(x, y). \quad (7)$$

Then there exist such decreasing function $N(E)$, known for $E \in [\alpha, \infty)$, which for any $x(T), y(T), \beta, \gamma$ from inequalities $x(T) \geq 0, x(T) + \beta \geq 0, y(T) \geq E, y(T) + \beta \geq E$ implies inequality

$$\sup |\bar{x}(t) - x(t), \bar{y}(t) - y(t)| \leq N(E)|\beta, \gamma|. \quad (8)$$

Theorem 3 estimates the accuracy of solution taken from formulas (3).

THEOREM 3. Let function $f(x, y)$ satisfies the conditions of theorem 2. Then $\exists M > 0$, such for the solution $(x(t), y(t))$ of problem (5), (6) and it's approximation constructed by formulas (3), the inequality $\sup_{i=1,2,\dots} |(x_i - x(iH))|_{R^2} \leq MH^2$ is true.

Example: Let's consider a problem

$$\begin{cases} y' = y^2 + 1; \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Here, $f(x, y) = y^2 + 1$, let $H = 0.1$; $x_0 = 0, y_0 = 0, f_0 = 0$. Let's use formulas (3), so, we have step 1:

$$x_1 = 0 + \frac{0.1}{\sqrt{1+1^2}} = \frac{0.1}{\sqrt{2}} \approx 0.07,$$

$$y_1 = 0 + \frac{0.1 \cdot 1}{\sqrt{2}} \approx 0.07;$$

$$f_1 = 1 + 0.07^2 \approx 1.0049;$$

step 2:

$$x_2 = 0.07 + \frac{0.1}{\sqrt{1+1.0049^2}} \approx 0.141;$$

$$y_2 = 0.07 + \frac{0.1 \cdot 1.0049}{\sqrt{1+1.0049^2}} \approx 0.142;$$

$$f_2 = 1 + 0.142^2 \approx 1.019;$$

step 3:

$$x_3 = 0.141 + \frac{0.1}{\sqrt{1+1.019^2}} \approx 0.210;$$

$$y_3 = 0.142 + \frac{0.1 \cdot 1.019}{\sqrt{1+1.019^2}} \approx 0.212;$$

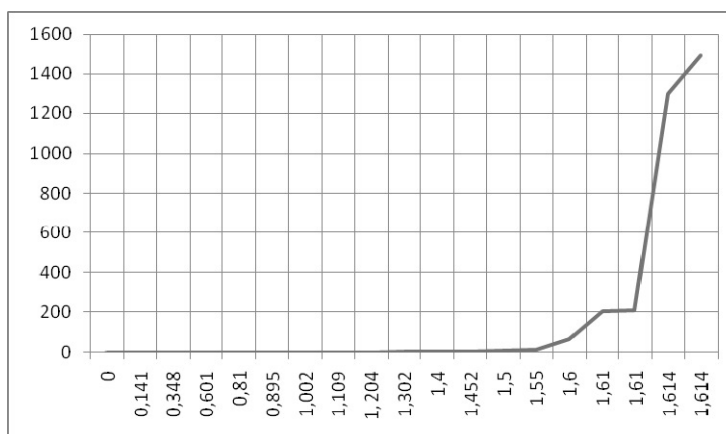
$$f_3 = 1 + 0.212^2 \approx 1.044.$$

The further calculations are similar. All value x, y are shown in the table

T a b l e

Steps	Approximated x	Approximated y	$y(x_i)$ -exact solution
0	0	0	0
2	0,141	0,142	0,142
5	0,348	0,359	0,363
9	0,601	0,669	0,686
13	0,810	1,009	1,051
15	0,895	1,190	1,247
19	1,002	1,471	1,564
23	1,109	1,856	2,009
28	1,204	2,346	2,603
36	1,302	3,140	3,630
51	1,400	4,637	5,798
66	1,452	6,136	8,378
92	1,500	8,736	14,101
160	1,550	15,435	49,078
660	1,600	65,535	-
2095	1,610	209,035	-
2101	1,610	209,635	-
12965	1,614	1296,035	-
14905	1,614	1489,935	-

This is the graph of the table shown above.



The exact solution of a problem (9) is function $y = \tan x$. Its vertical asymptote is $x = \frac{\pi}{2}$. As we see, we also have found an asymptote by the approximated calculation.

References

- 1 *Hartman F.* Ordinary differential equations. — M., 1970.
- 2 *Kamke E.* The guide on the ordinary differential equations. — M.: Science, 1976.
- 3 *Bahvalov N.S.* Numerical methods (the analysis, algebra, the ordinary differential equations): The main edition of the physical and mathematical literature of publishing house. — M.: Science, 1975.
- 4 *Gavrilov N.I.* Methods, theories of the ordinary differential equations. The state publishing house. — M.: Science, Higher school, 1962.
- 5 *Pak V.V., Nosenko Y.L.* Calculus: Textbook. — D.: Stalker, 1997.
- 6 *Zaguskin V.L.* The guide on numerical methods of the solution of the equations // M.: Fizmatgiz, 1960. — 216 p.

К.Б.Өксікбаев

Тік асимптотасы бар дифференциалдық теңдеулердің жуықталған шешімі

Мақалада тік асимптотасы болатын дифференциалды теңдеулердің жуықталған шешімін табу әдісі қаралады. Бірінші дәрежелі дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебінің шешімінің максималды болу интервалын бағалау және ескеру үшін бір кадамдық сандық әдістердің өзгертілген түрі ұсынылған. Сонымен қатар ол әдістің жинақтылығы және ауытқу шамасы қарастырылған.

К.Б.Уксикбаев

Приближенное решение дифференциальных уравнений, имеющих вертикальные асимптоты

В статье рассматривается метод нахождения приближенного решения дифференциальных уравнений, имеющих вертикальные асимптоты. Предлагается модификация одношаговых численных методов, позволяющая оценивать и учитывать максимальный интервал существования решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с тем, чтобы не строить лишние смысла «приближенные решения» за границами этого промежутка, если он конечен. Рассмотрены сходимость предлагаемого метода и погрешность.

АВТОРЛАР ТУРАЛЫ МӘЛІМЕТТЕР СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Alimagambetova A.Z. — candidate of physical and mathematical science, Kazakh University of Economy, Finance and International Trade, Astana.

Akhazhanov T.B. — PhD student, Eurasian National University named after L.N.Gumilyov, Astana.

Akysh A.Sh. — doctor physical-mathematical science, Main scientific collaborator, Institute of mathematical MES RK, Almaty.

Bokayev N.A. — doctor physical-mathematic science, Eurasian National University named after L.N.Gumilyov, Astana.

Ibraev Sh.Sh. — candidate of physical and mathematical science, Professor of “Mathematics, Informatics and Information technologies”, „Bolashak“ university, Kyzylorda.

Iskenderova D.A. — Agrotechnical University named after S.Seyfullina, Astana.

Karenov R.S. — managing chair of Management, the Doctor of Economics, the Professor, the Academician of the International Academy of Information, Karaganda State University named after E.A.Buketov.

Kudaibergenov S.S. — candidate of physical and mathematical sciences, docent of Mathematical Methods and Modeling chair of the South Kazakhstan State university named M.Auezov, Shymkent.

Nikhanbayeva N.T. — senior teacher, Karaganda State University named after E.A.Buketov.

Omarov A.M. — candidate of physical and mathematical science, Karaganda State University named after E.A.Buketov.

Ramazanov M.I. — doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Karaganda State University named after E.A.Buketov.

Sabitova S.G. — magistant, first year master of Mathematical Methods and Modeling chair of the South Kazakhstan State University named after M.Auezov, Shymkent.

Soldatov A.P. — doctor of physical and mathematical sciences, Professor, of the mathematical chair analysis, Belgorod State University, Russia.

Shaldykova B.A. — candidate of physical and mathematical science, senior teacher, Rodney Industrial Institute.

Uxikbayev K.B. — magistant, Suleyman Demirel University, Almaty.

Yessendauletova G.T. — senior teacher, Karaganda State University named after E.A.Buketov.