УДК 517.9

А.Ш. Акыш

Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы
(E-mail: akysh41@mail.ru)

Простейший принцип максимума для уравнений Навье-Стокса

В статье показана справедливость простейшего принципа максимума для нелинейных уравнений Навье-Стокса, на основе чего в выбранном пространстве доказаны единственность слабых и существование сильных решений задачи для УНС в целом по времени $t \in [0, T]$, $\forall T < \infty$.

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса, принцип максимума для нелинейных уравнений Навье-Стокса, единственность слабых обобщенных решений уравнений Навье-Стокса, существование сильных решений уравнений Навье-Стокса.

1 Введение

Современное состояние математической теории уравнений Навье-Стокса (УНС) содержится, например, в [1], а некоторые нерешенные проблемы теории уравнений Навье-Стокса однородной жидкости приведены в [2] и др.

В ряде работ автора [3, 4] и других приведены результаты поисковых исследований с целью обоснования принципа максимума для УНС. Были установлены связи экстремальных значений вектора скорости, плотности кинетической энергии (в частности, локального максимума) и давления уравнений Навье-Стокса. Однако доказательства последних были трудоемкими в последующем подобные трудности преодолены, путем непосредственного исследования исходной системы УНС на вопрос о справедливости принципа максимума. Здесь доказан простейший вариант принципа максимума для нелинейных уравнений Навье-Стокса, что с математической точки зрения является принципиально - ключевым.

2 Постановка задачи

Рассмотрим начально-краевую задачу для УНС [1] относительно вектора скорости $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$ и давления P в области $Q = (0, T] \times \Omega$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \mu\Delta\mathbf{U} + (\mathbf{U}, \nabla)\mathbf{U} + \nabla P = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}); \quad \mathrm{div}\mathbf{U} = 0, \tag{1a}$$

$$\mathbf{U}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}); \quad \mathbf{U}(t, \mathbf{x})\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \tag{1b}$$

где $x \in \Omega \subset R_3$; Ω — выпуклая область, а $\partial\Omega$ — граница области Ω, $t \in [0, T]$, $T < \infty$; f и Φ — вектор-функции внешних сил и начальных данных; $0 < \mu$ — коэффициент вязкости; Δ и ∇

операторы Лапласа и Гамильтона; $J(\Omega)$ — пространство соленоидальных векторов, а $G(\Omega)$ состоит из $\nabla\eta$. Известно [1], что ортогональное разложение $\mathbf{L}_2(Q) = \mathbf{G}(Q) \oplus \mathring{\mathbf{J}}(Q)$; 11111 – соболевское пространство функций, равных нулю на $\partial\Omega$.

Предположим, что входные данные f и Φ задачи (1) удовлетворяют следующим требованиям:

$$\mathbf{i)}\ \mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \in \mathbf{C}(\bar{Q}) \cap \mathring{\mathbf{J}}(Q); \quad \mathbf{ii)}\ \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \in \mathbf{C}(\bar{\Omega}) \cap \mathbf{W}^1_{2,0}(\Omega) \cap \mathring{\mathbf{J}}(\Omega).$$

3 Принцип максимума

Векторное уравнение (1a) перепишем в виде системы скалярных уравнений:

$$\frac{\partial U_\alpha}{\partial t} - \mu\Delta U_\alpha + (\mathbf{U}, \nabla U_\alpha) + \frac{\partial P}{\partial x_\alpha} = f_\alpha, \quad \alpha = \overline{1,3}. \tag{2}$$

Теорема 1. Пусть $\bar{\Omega}$ - замкнутая ограниченная область в R_3 с границей $\partial\Omega$, и $\bar{Q} = ([0,T] \times \bar{\Omega})$ цилиндрическая область в пространстве переменных $t, \mathbf{x}$. Предположим, что функции

$$\{P,\, U_\alpha,\, \alpha = \overline{1,3}\} \in \mathbf{C}(\bar{Q}) \cap \mathbf{C}^2(Q)$$

и удовлетворяют уравнениям (1a). Тогда если при некотором α' функция $f_{\alpha'}(t,\mathbf{x}) \le 0 \big(f_{\alpha'}(t,\mathbf{x}) \ge 0\big)$ в Q, то функция $U_{\alpha'}$ принимает свой положительный максимум (отрицательный минимум) в цилиндре $\bar{Q}$ на нижнем основании $\{0\} \times \bar{\Omega}$ или на его боковой поверхности $[0,T] \times \partial\Omega$, т. е.

$$U_{\alpha'}(t,\mathbf{x}) \le \max\big\{\sup_{t=0 \bigwedge \mathbf{x}\in\bar{\Omega}} U_{\alpha'}(t,\mathbf{x}), \sup_{t\in[0,T] \bigwedge \mathbf{x}\in\partial\Omega} U_{\alpha'}(t,\mathbf{x})\big\}; \tag{3a}$$

$$\Big(U_{\alpha'}(t,\mathbf{x}) \ge \min\big\{\inf_{t=0 \bigwedge \mathbf{x}\in\bar{\Omega}} U_{\alpha'}(t,\mathbf{x}), \inf_{t\in[0,T] \bigwedge \mathbf{x}\in\partial\Omega} U_{\alpha'}(t,\mathbf{x})\big\}\Big),\ (t,\mathbf{x}) \in \bar{Q}, \tag{3b}$$

где $\alpha' \in \{1,2,3\}$.

Доказательство. Для этого будем использовать идею обоснования принципа максимума для уравнения параболического типа [5; 510].

Предположим противное, т.е. функции $U_{\alpha'}$, P в какой-то момент времени t достигают своих экстремальных значений в двух различных точках области Ω соответственно:

1. Пусть функция $U_{\alpha'}(t,\mathbf{x})$ достигает положительного максимального значения в некоторой точке $M_0(t^\circ, \mathbf{x}^\circ)$ внутри области $Q = (0,T] \times \Omega$:

$$U_{\alpha'}(t^\circ,\mathbf{x}^\circ) > \max\big\{\sup_{t=0 \bigwedge \mathbf{x}\in\bar{\Omega}} U_{\alpha'}(t,\mathbf{x}), \sup_{t\in[0,T] \bigwedge \mathbf{x}\in\partial\Omega} U_{\alpha'}(t,\mathbf{x})\big\} = C \ge 0. \tag{4}$$

Обозначим $m = U_{\alpha'}(M_0) - C > 0$ и введем функцию

$$H_{\alpha'}(t,\mathbf{x}) = U_{\alpha'}(t,\mathbf{x}) + \frac{m}{2}(1 - \frac{t}{T}).$$

Отсюда при всех $(t,\mathbf{x}) \in \{0\} \times \overline{\Omega}\, \cup\, [0,T] \times \partial\Omega$ имеем цепочку неравенств

$$H_{\alpha'}(M_0) \ge U_{\alpha'}(M_0) = m + C \ge m + U_{\alpha'}(t,\mathbf{x}) \ge H_{\alpha'}(t,\mathbf{x}) + \frac{m}{2}$$

или

$$H_{\alpha'}(t,\mathbf{x}) \le H_{\alpha'}(M_0) - \frac{m}{2}, \quad \forall (t,\mathbf{x}) \in \{0\} \times \overline{\Omega} \cup [0,T] \times \partial\Omega.$$

Отсюда следует, что функция $H_{\alpha'}(t,\mathbf{x})$ также принимает свое (положительное) максимальное значение в некоторой точке $M_1(t',\mathbf{x}') \in Q$.

2. Пусть теперь в момент времени t' в какой-нибудь другой точке $\mathbf{x}'' \in \Omega$ (случай $\mathbf{x}'' = \mathbf{x}'$ не исключается) функция $P(t, \mathbf{x})$ тоже достигает экстремального значения (пусть положительного максимума).

Применяя операцию div к векторному уравнению (1a), получаем уравнение Пуассона, связывающее давление P с вектором скорости U:

$$-\Delta P = divI, \quad \text{где} \quad I = (U, \nabla)U. \tag{5}$$

Положим $K = \| divI \|_{C(Q)}$, так как по условию теоремы 1 функция $divI$ непрерывна в ограниченной области Ω при $\forall t \in [0, T]$.

Введем вспомогательную функцию

$$D(t, x) = C(t) + \frac{K\delta(t, x)}{6} \sum_{\alpha=1}^{3} (x_\alpha - x'_\alpha)^2,$$

имеющую свойства:

$$\mathbf{a})\nabla D(t, \mathbf{x}') = 0; \mathbf{b})\Delta D(t, \mathbf{x}) = K, (t, \mathbf{x}) \in Q; \mathbf{c}) \inf_{\mathbf{x}\in\Omega} D(t, \mathbf{x}') = C(t); \mathbf{d}) D(t, \mathbf{x}) - \text{неубывающая в } \Omega,$$

где $C(t) = const(t) > 0$ и имеет наибольшее значение при $t = t'$,

$$\delta(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & (t, \mathbf{x}) \in Q; \\ 0, & (t, \mathbf{x}) \in \{0\} \times \bar{\Omega} \cup [0, T] \times \partial\Omega. \end{cases}$$

Вычитая из **b**) соотношение (5), получим уравнение Пуассона

$$\Delta P_s(t, \mathbf{x}) = K - div\mathbf{I}(\mathbf{t}, \mathbf{x}), \quad \text{где} \quad P_s(t, \mathbf{x}) = P(t, \mathbf{x}) + D(t, \mathbf{x}). \tag{6}$$

Из определения функции $P_s = P + D$, в силу допущенного экстремума $P(t, \mathbf{x})$ в Ω и свойств **c**), **d**) функции $D(t, \mathbf{x})$, выводим, что функция $P_s(t, \mathbf{x})$ принимает в точке $(t', \mathbf{x}'') \in Q$ положительное максимальное значение

$$P_s(t', \mathbf{x}'') = \max_{\mathbf{x}\in\Omega} P(t', \mathbf{x}'') + C(t') + \frac{K}{6} \sum_{\alpha=1}^{3} (x''_\alpha - x'_\alpha)^2, \tag{7}$$

а в точках нижнего основания или боковой поверхности цилиндра Q не может достигать экстремума, так как там P_s определяется с помощью формулы

$$P_s(t, \mathbf{x}) = P(t, \mathbf{x}) + C(t), \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in \{0\} \times \bar{\Omega} \cup [0, T] \times \partial\Omega. \tag{8}$$

Далее из уравнения Пуассона (6) следует неравенство

$$\Delta P_s(t, \mathbf{x}) = K - div\mathbf{I}(t, \mathbf{x}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in Q.$$

Это означает [6; 306], что функция P_s является субгармонической в области Ω при каждом $t \in (0, T]$, так как удовлетворяет соотношению

$$\Delta P_s(t, \mathbf{x}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

В (7) установили, что функция $P_s(t', \mathbf{x})$ достигает максимального значения в точке $\mathbf{x}'' \in \Omega$. Тогда из свойства субгармонических функций вытекает, что $P_s(t', \mathbf{x}) = const$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$.

Далее находим
$$P(t',\mathbf{x})+D(t',\mathbf{x})=const,\quad \forall\mathbf{x}\in\Omega.$$
Отсюда $\nabla P(M_1)=0$, так как $\nabla D(M_1)=0$.

В итоге выпишем все необходимые условия максимума функции $H_{\alpha'}$ в точке $M_1(t',\mathbf{x}')$
$$\frac{\partial H_{\alpha'}}{\partial t}\geq 0;\quad \Delta H_{\alpha'}\leq 0;\quad \nabla H_{\alpha'}=0;\quad \nabla P=0. \tag{9}$$
Из уравнения (2), с учетом условий (9), найдем для точки M_1 цепь неравенств
$$\mathbb{L}H_{\alpha'}(M_1)\equiv\frac{\partial H_{\alpha'}}{\partial t}-\mu\Delta H_{\alpha'}+(\mathbf{H},\nabla H_{\alpha'})+\frac{\partial P}{\partial x_{\alpha'}}(M_1)-f_{\alpha'}+\frac{m}{2T}\geq\frac{m}{2T}>0.$$
Это означает, что неравенство (4) неверно. Следовательно, справедливо ($3a$). Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1, следуя [5], нетрудно получить доказательство следующего утверждения:

Следствие 1. Если вектор-функции $\mathbf{f}$, $\mathbf{\Phi}$ удовлетворяют условиям **i)** и **ii)**, то для решений $\mathbf{U}(t,\mathbf{x})$ задачи (1) справедлива оценка
$$\|\mathbf{U}\|_{\mathbf{C}(\bar{Q})}\leq\|\mathbf{\Phi}\|_{\mathbf{C}(\bar{\Omega})}+T\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{C}(\bar{Q})}\equiv A_1,\ \forall T<\infty, \tag{10}$$
где $\|\mathbf{U}\|_{\mathbf{C}(\bar{Q})}=\max\limits_{1\leq\alpha\leq 3}\sup\limits_{\bar{Q}}|U_\alpha(t,\mathbf{x})|$.

На основе чего в выбранном пространстве [3] доказаны единственность слабых и существование сильных решений задачи для уравнений Навье-Стокса в целом по времени $t\in[0,T],\forall T<\infty$.

Список литературы

1 *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970. — 288 с.

2 *Ладыженская О.А.* Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье-Стокса, существование гладкости // Успехи матем. наук. — 2003. — Т. 58. — Вып. 2(350). — С. 45–78.

3 *Akysh A.Sh.* About the new version of maximum principle of Navier-Stokes equations // Bull. of the Karaganda University, Mathematics ser.— 2015. — No. 2(78). — P. 11–17.

4 *Акыш А.Ш.* Об одном варианте принципа максимума для уравнений Навье-Стокса // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем: сб. ст. IX Междунар. науч.-техн. конф. (Россия, г. Пенза, 28-31 октября 2014 г.) / Под ред. И.В.Бойкова. — Пенза: Изд-во ПГУ, 2014. — С. 3–9.

5 *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1988. — 512 с.

6 *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964.— 830 сю

А.Ш. Ақыш

Навье-Стокс теңдеулеріне максимум принципінің жай түрі

Мақалада бейсызықты Навье-Стокс теңдеулеріне (НСТ) максимум принципінің жай түрінің орындалатындығы көрсетілген. Соның негізінде таңдалған кеңістікте барлық уақытта $t\in[0,T]$, $\forall T<\infty$ НСТ-ға қойылған есептің әлсіз жалқы және әлді шешімдерінің бар болатындығы дәлелденген.

A.Sh. Akysh

The simplest maximum principle for Navier-Stokes equations

The work shows a fairly simple maximum principle for nonlinear Navier-Stokes equations. On that basis, the selected space to prove the uniqueness of the weak and the existence of strong solutions of the problem for Navier–Stokes equations the whole time $t \in [0, T]$, $\forall T < \infty$.

References

1 Ladyzhenskaya O.A. *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Moscow: Nauka, 1970, 288 p.

2 Ladyzhenskaya O.A. *Russian Mathematical Surveys*, 2003, 58, 2 (350), p. 45–78.

3 Akysh A. Sh. *Bull. of the Karaganda University, Mathematics ser.*, 2015, 2(78), p. 11–17.

4 Akysh A. Sh. *Analytical and Numerical Methods of Modelling of Natural Science and Social Problems (ANM-2014)*: proceedings of the Ninth International Conference ANM 2014 (Penza, Russian Federation, October, 28-31, 2014) / Edit. I.V.Boikov, Penza: Publ. PSU, 2014, p. 3–9.

5 Vladimirov V.S. *Equations of mathematical physics*, Moscow: Nauka, 1988, 512 p.

6 Courant R. *Partial Differential Equations*, Moscow: Mir, 1964, 830 p.