ӘОЖ 517.946

К.Т.Муханмедина[1], А.М.Сыздыкова[2], Г.Н.Шайхова[2]

[1]Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті;
[2]Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана
(E-mail: kama_2007@mail.ru)

Екі компонентті Хирота теңдеуінің солитондық шешімдері

Мақалада Хиротаның екі компонентті теңдеуі қарастырылды. Зерттеу әдісі ретінде көп солитондық шешімдерді құрудың ең тиімді әдісі болып табылатын бисызықты әдіс қолданылды. Солитондық шешімдер интегралдану шартын ескере отырып, құрылған.

Кілт сөздер: Хирота теңдеуі, солитон, бисызықты әдіс, шешім, сызықты емес теңдеу.

Кіріспе

Соңғы жылдары көп компонентті сызықты емес теңдеулерді зерттеу сызықты емес оптикада, соның ішінде оптикалық коммуникация, биофизика және тағы басқа түрлі салаларда көп көңіл бөлінген. Көп модалы талшықтарда және көптеген талшықтардың басқада түрлерінде солитон типті импульстің таралуы көп компонентті Шредингердің сызықты емес теңдеуімен модельденеді [1]. Шредингердің көп компонентті сызықты емес теңдеулері [2, 3] жұмыстарында зерттелген. Авторлар интегралдаудың шартын тауып, көп солитондық шешім құрды. Хирота теңдеуі Шредингердің сызықты емес теңдеуінің жалпыланған түрі болып саналады. Бұл [4] жұмыста зерттелген. Берілген мақалада Хиротаның екі компонентті теңдеуін келесі түрде қарастырамыз:

$$iu_z + c_1 u_{tt} + 2(\alpha|u|^2 + \beta|\upsilon|^2)u - i\varepsilon[u_{ttt} + (2\mu_1|u|^2 + \nu_1|\upsilon|^2)u_t + \nu_1 u\upsilon^*\upsilon_t] = 0; \tag{1}$$

$$i\upsilon_z + c_2 \upsilon_{tt} + 2(\beta|u|^2 + \gamma|\upsilon|^2)\upsilon - i\varepsilon[\upsilon_{ttt} + (\nu_2|u|^2 + 2\mu_2|\upsilon|^2)\upsilon_t + \nu_2 u^*\upsilon u_t] = 0, \tag{2}$$

мұндағы $u(z,t), \upsilon(z,t)$ — комплексті функция және $\alpha, \beta, \gamma, c_1, c_2, \varepsilon, \mu_1, \nu_1, \nu_2, \mu_2 \in const$.

(1,2) теңдеулер [2] жұмыста ұсынылған, онда автор интегралдау шартын қарастырған. Берілген жұмыс [2] жұмыстың жалғасы болып саналады, яғни, бисызықты әдіспен Хиротаның екі компонентті теңдеуі қарастырылады. Бисызықты әдіс дербес туындылы интегралданатын дифференциалдық теңдеулерден көп солитондық шешім алудың тура әдісі болып табылады [5]. Бұл әдіс көп солитондық шешімді толқындардың суперпозициясы түрінде келтіруге мүмкіндік береді. Бұл жерде біз Хиротаның екі компонентті теңдеуінің бір солитондық шешімін нақты түрін құрумен шектелеміз. Келесі бөлімде Хиротаның екі компонентті теңдеуі үшін бисызықты әдісті қарастырамыз.

1. Бисызықты әдіс

Хиротаның екі компонентті теңдеуі интегралданылады және солитондық шешімге ие. Теңдеу шешімінің нақты түрі бисызықты әдіс арқылы алынуы мүмкін. Осы әдіс арқылы (1, 2) теңдеудің шешімін келесі түрде іздейміз:

$$u = \frac{G}{F}; \tag{3}$$

$$\upsilon = \frac{H}{F}, \tag{4}$$

мұндағы $G(z,t), H(z,t)$ — комплексті функция; $F(z,t)$ — нақты функция. (1, 2) теңдеулерге (3, 4) түрлендірулерді қойып, алгебралық есептеулер жасасақ, бисызықты теңдеулер жүйесі алынады [2]:

$$[iD_z + c_1 D_t^2 - i\varepsilon D_t^3](G \cdot F) = 0; \tag{5}$$

$$[iD_z + c_2 D_t^2 - i\varepsilon D_t^3](H \cdot F) = 0; \tag{6}$$

$$[D_t^2](F \cdot F) = \frac{2}{c_1}(\alpha GG^* + \beta HH^*); \tag{7}$$

$$[D_t^2](F\cdot F)=\frac{2}{3}(\mu_1 GG^*+\nu_1 HH^*); \tag{8}$$

$$[D_t^2](F\cdot F)=\frac{2}{c_2}(\gamma HH^*+\beta GG^*); \tag{9}$$

$$[D_t^2](F\cdot F)=\frac{2}{3}(\nu_2 GG^*+\mu_2 HH^*), \tag{10}$$

мұндағы D_z, D_t — бисызықты әдістің операторлары, олар келесі түрде анықталады:

$$D_z^p D_t^n (F(z,t)\cdot G(z,t))=(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z'})^p(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'})^n(F(z,t)\cdot G(z',t'))|_{z'=z,t'=t}\,. \tag{11}$$

Төменде бисызықты оператордың кейбір қасиеттері берілген

$$D_z^2(G\cdot 1)=(\frac{\partial}{\partial z})^2 G; \tag{12}$$

$$D_z^2(F\cdot 1)=(\frac{\partial}{\partial z})^2 F; \tag{13}$$

$$D_z^2(G\cdot F)=G_{zz}F-2G_zF_z+GF_{zz}; \tag{14}$$

$$D_t^2(F\cdot F)=2F_{tt}F-2F_t^2; \tag{15}$$

$$D_z^2(\exp(p_1z)\cdot\exp(p_2z))=(p_1-p_2)^2\exp[(p_1+p_2)z]. \tag{16}$$

$H(z,t)$ функциясы үшін жоғарыда көрсетілген қасиеттер ұқсас болып келеді.

2. Солитондық шешім

Бисызықты әдіске сәйкес (5–10) теңдеулер жүйесінде келесі функцияларды $G(z,t), H(z,t), F(z,t)$ қатарға жіктейміз:

$$G=\varepsilon G_1+\varepsilon^3G_3+\varepsilon^5G_5+\ldots; \tag{17}$$

$$H=\varepsilon H_1+\varepsilon^3H_3+\varepsilon^5H_5+\ldots; \tag{18}$$

$$F=1+\varepsilon^2F_2+\varepsilon^4F_4+\varepsilon^6F_6+\ldots, \tag{19}$$

мұнда ε — жіктеудің формалды параметрі. (17–19) қатарларды (5–10) бисызықты теңдеулер жүйесін қойып, алатынымыз

$$[iD_z+c_1D_z^2-\mathrm{i}\varepsilon D_t^3]\cdot((\varepsilon G_1+\varepsilon^3G_3+\varepsilon^5G_5+\ldots)\cdot(1+\varepsilon^2F_2+\varepsilon^4F_4+\varepsilon^6F_6+..))=0; \tag{20}$$

$$[iD_z+c_2D_t^2-i\varepsilon D_t^3]\cdot((\varepsilon H_1+\varepsilon^3H_3+\varepsilon^5H_5+\ldots)\cdot(1+\varepsilon^2F_2+\varepsilon^4F_4+\varepsilon^6F_6+\ldots))=0; \tag{21}$$

$$\begin{gathered}[D_t^2](F\cdot F)=\frac{2}{c_1}(\alpha(\varepsilon G_1+\varepsilon^3G_3+\varepsilon^5G_5+\ldots)\cdot(\varepsilon G_1^*+\varepsilon^3G_3^*+\varepsilon^5G_5^*+\ldots))+\\ +(\beta(\varepsilon H_1+\varepsilon^3H_3+\varepsilon^5H_5+\ldots)(\varepsilon H_1^*+\varepsilon^3H_3^*+\varepsilon^5H_5^*+\ldots));\end{gathered} \tag{22}$$

$$\begin{gathered}[D_t^2](F\cdot F)=\frac{2}{3}(\mu_1(\varepsilon G_1+\varepsilon^3G_3+\varepsilon^5G_5+\ldots)\cdot(\varepsilon G_1^*+\varepsilon^3G_3^*+\varepsilon^5G_5^*+\ldots)+\\ +\nu_1(\varepsilon H_1+\varepsilon^3H_3+\varepsilon^5H_5+\ldots)(\varepsilon H_1^*+\varepsilon^3H_3^*+\varepsilon^5H_5^*+\ldots));\end{gathered} \tag{23}$$

$$\begin{gathered}[D_t^2](F\cdot F)=\frac{2}{c_2}(\gamma(\varepsilon H_1+\varepsilon^3H_3+\varepsilon^5H_5+\ldots)(\varepsilon H_1^*+\varepsilon^3H_3^*+\varepsilon^5H_5^*+\ldots)+\\ +\beta(\varepsilon G_1+\varepsilon^3G_3+\varepsilon^5G_5+\ldots)\cdot(\varepsilon G_1^*+\varepsilon^3G_3^*+\varepsilon^5G_5^*+\ldots));\end{gathered} \tag{24}$$

$$\begin{gathered}[D_t^2](F\cdot F)=\frac{2}{3}(\nu_2(\varepsilon G_1+\varepsilon^3G_3+\varepsilon^5G_5+\ldots)\cdot(\varepsilon G_1^*+\varepsilon^3G_3^*+\varepsilon^5G_5^*+\ldots)+\\ +\mu_2(\varepsilon H_1+\varepsilon^3H_3+\varepsilon^5H_5+\ldots)\cdot(\varepsilon H_1^*+\varepsilon^3H_3^*+\varepsilon^5H_5^*+\ldots)).\end{gathered} \tag{25}$$

(20–25) теңдеулер жүйесі көп солитондық шешімдерді алудың жалпы түрі болып табылады. Осы теңдеулер жүйесінде солитондық шешімдердің ретіне байланысты $G(z,t)$, $H(z,t)$, $F(z,t)$ функциялар үшін қатарлар түзіледі.

2.1 Бір солитондық шешімдер. Бір солитондық шешім үшін $G(z,t), H(z,t), F(z,t)$ функцияларының жіктелуі келесідей түрге ие:

$$G = \varepsilon G_1; \tag{26}$$

$$H = \varepsilon H_1; \tag{27}$$

$$F = 1 + \varepsilon^2 F_2, \tag{28}$$

мұндағы $G_1 = ae^{\theta_{11}}$, $H_1 = be^{\theta_{12}}$. (26–28) жіктеулерді ескере отырып, (20–25) теңдеулер жүйесінен бір солитондық шешімін табу үшін келесі жүйені аламыз:

$$[iD_z + c_1 D_t^2 - i\varepsilon D_t^3](G \cdot 1) = 0; \tag{29}$$

$$[iD_z + c_1 D_t^2 - i\varepsilon D_t^3](G_1 \cdot F_2) = 0; \tag{30}$$

$$[iD_z + c_2 D_t^2 - i\varepsilon D_t^3](H \cdot 1) = 0; \tag{31}$$

$$[iD_z + c_2 D_t^2 - i\varepsilon D_t^3](H_1 \cdot F_2) = 0; \tag{32}$$

$$[D_t^2](F_2 \cdot 1 + 1 \cdot F_2) = \frac{2}{c_1}(\alpha G_1 G_1^* + \beta H_1 H_1^*); \tag{33}$$

$$[D_t^2](F_2 \cdot F_2) = 0; \tag{34}$$

$$[D_t^2](F_2 \cdot 1 + 1 \cdot F_2) = \frac{2}{c_2}(\gamma H_1 H_1^* + \beta G_1 G_1^*); \tag{35}$$

$$[D_t^2](F_1 \cdot 1 + 1 \cdot F_2) = \frac{2}{3}(\mu_1 G_1 G_1^* + \gamma_1 H_1 H_1^*); \tag{36}$$

$$[D_t^2](F_1 \cdot 1 + 1 \cdot F_2) = \frac{2}{3}(\nu_2 G_1 G_1^* + \mu_2 H_1 H_1^*). \tag{37}$$

Жалпы бисызықты шарттар, [2] жұмыста көрсетілгендей, келесі түрде болады:

$$\frac{\alpha}{c_1} = \frac{\mu_1}{3} = \frac{\beta}{c_2} = \frac{\nu_2}{3}; \ \frac{\beta}{c_1} = \frac{\nu_1}{3} = \frac{\gamma}{c_2} = \frac{\mu_2}{3}.$$

Солитондық шешімдерді алу үшін келесі интегралдану шарттары орындалу қажет:

$c_1 = c_2$, $\alpha = \beta = \gamma$, $\mu_1 = v_1 = \mu_2 = v_2 = 3$ және $c_1 = -c_2$, $\alpha = -\beta = \gamma$, $\mu_1 = -v_1 = -\mu_2 = v_2 = 3$.

Бисызықты операторлардың қасиеттерін (12–16) және жоғарыда көрсетілген интегралдану шарттарын ескерсек, екі компонентті Хирота теңдеуінің бір солитондық шешімдері келесі түрге ие болады:

$$u = \frac{ae^{\theta_{11}}}{1 + e^{\theta_{11} + \theta_{11}^* + Ru}},$$

мұнда

$$e^{Ru} = \frac{\alpha |a| + \beta |b|}{c_1 (k + k^*)^2}$$

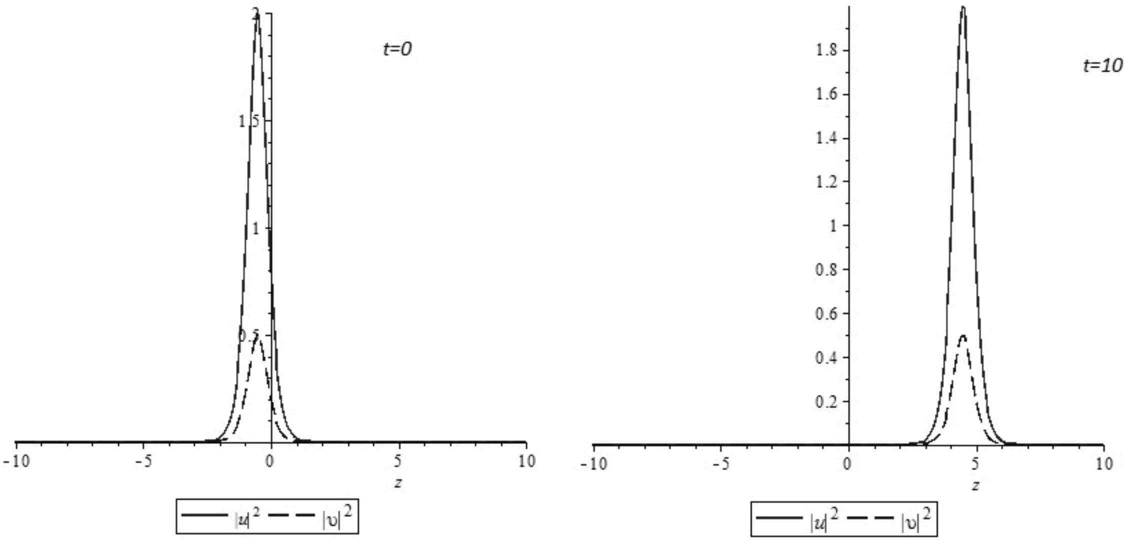
және

$$\upsilon = \frac{be^{\theta_{12}}}{1 + e^{\theta_{12} + \theta_{12}^* + R\upsilon}},$$

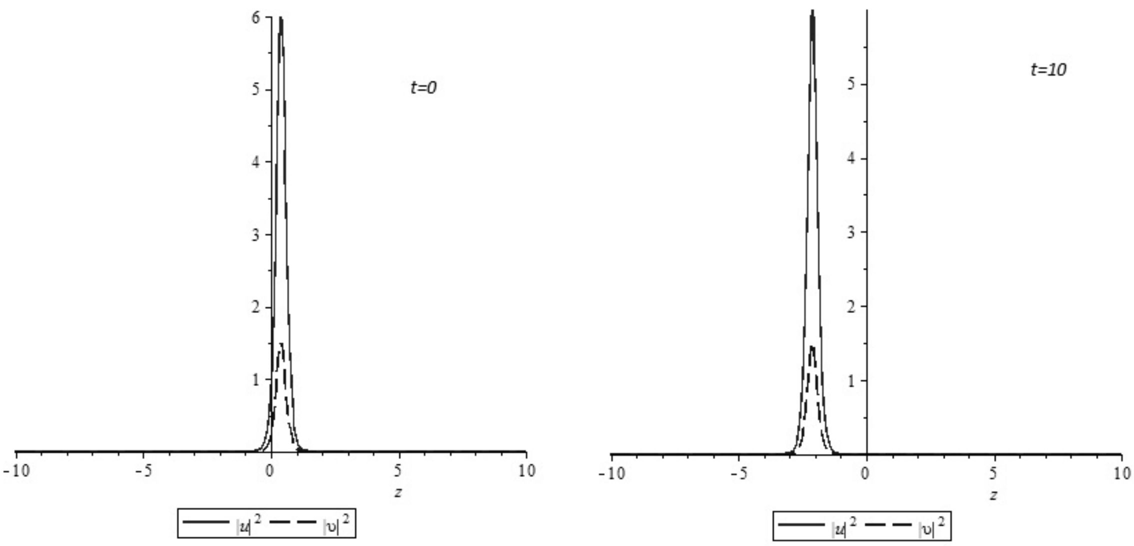
мұнда

$$e^{R\upsilon} = \frac{\gamma |b| + \beta |a|}{c_2 (k + k^*)^2}, \ \theta_{11} = kt + (\varepsilon k^3 + ic_1 k^2) z + \theta_{11}^{(0)}, \ \theta_{12} = kt + (\varepsilon k^3 + ic_2 k^2) z + \theta_{12}^{(0)}, \ \theta_{11}^{(0)}, \theta_{12}^{(0)} \in const.$$

Хиротаның екі компонентті теңдеуінің бір солитондық шешімдерінің графигі төменде 1 және 2-суреттерде келтірілген.



1-сурет. $c_1 = c_2$, $\alpha = \beta = \gamma, \mu_1 = \nu_1 = \mu_2 = \nu_2 = 3$, $k = 1 - i$ кезіндегі екі компонентті Хирота теңдеуінің бір солитондық шешімінің қозғалу графигі



2-сурет. $c_1 = -c_2$, $\alpha = -\beta = \gamma, \mu_1 = -\nu_1 = -\mu_2 = \nu_2 = 3$, $k = 1 - i$ кезіндегі екі компонентті Хирота теңдеуінің бір солитондық шешімінің қозғалу графигі

2.2 Көп солитондық шешімдер. Сонымен қатар осы әдістің көмегімен Хиротаның екі компонентті теңдеуі үшін көп солитондық шешімдерді де алуға болады. Екі солитондық шешім үшін (17–19) қатарлар келесі түрде алынады:

$$G = \varepsilon G_1 + \varepsilon^3 G_3;$$
$$H = \varepsilon H_1 + \varepsilon^3 H_3;$$
$$F = 1 + \varepsilon^2 F_2 + \varepsilon^4 F_4.$$

Үш солитондық шешім алу үшін (17–19) қатарлар келесі түрде алынады:

$$G = \varepsilon G_1 + \varepsilon^3 G_3 + \varepsilon^5 G_5;$$
$$H = \varepsilon H_1 + \varepsilon^3 H_3 + \varepsilon^5 H_5;$$
$$F = 1 + \varepsilon^2 F_2 + \varepsilon^4 F_4 + \varepsilon^6 F_6.$$

Қорытынды

Бұл жұмыста екі компонентті Хирота теңдеуі қарастырылды. Бисызықты әдістің көмегімен бисызықты теңдеулер жүйесі құрылды. Жоғарыда көрсетілгендей, солитондық шешімдердің нақты түрін алудың ең тиімді әдісі — бисызықты әдіс болып табылады. Мақалада біз нақты түрде бір солитондық шешімдерді интегралдау шарттарын ескере отырып алдық.

Мақала ҚР ғылыми зерттеулерінің гранттық қаржыландырудың (N0888/ГФ4) аясында орындалды.

References

1 *Dodd R., Gibson D., Morris H.* Solitons and nonlinear wave equations // Edit A.B.Shabata. — Moscow: Mir, 1988.

2 *Porsezian K.* Bilinearization of Coupled Nonlinear Schrodinger Type Equations: Integrability and Solitons // Journal of Non-linear Mathematical Physics. — 1998. — Vol. 5. — No. 2. — P. 126–131.

3 *Radhakrishnan R., Lakshmanan M.* Inelastic Collision and Switching of Coupled Bright Solitons in Optical Fibers// arXiv: solv-int/ 9703008v2

4 *Gui Mu, Zhenyun Qin.* Construction of Nth-order rogue wave solutions for Hirota equation by means of biinear method // arXiv: 1409.6403v1

5 *Hietarinta J.* Introduction to the Hirota bilinear method // arXiv: solv-int/ 970806v1

К.Т.Муханмедина, А.М.Сыздыкова, Г.Н.Шайхова

Солитонные решения двухкомпонентного уравнения Хироты

В статье рассмотрено двухкомпонентное уравнение Хироты. В качестве метода исследования использован билинейный метод, который является одним из эффективных методов построения многосолитонных решений. Солитонные решения построены с учетом условия интегрируемости.

K.T.Mukhanmedina, A.M.Syzdykova, G.N.Shaikhova

Soliton solutions of two-component Hirota equation

In this paper, we consider two-component Hirota equation. As a research method we use the bilinear method, which is one of the most effective methods of construction of multi-soliton solutions. Soliton solutions constructed with condition of integrability.