УДК 517.95

Б.Х.Турметов[1,2], А.М.Мырзахасова[1,2]

[1]*Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы;*
[2]*Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан*
(E-mail: batirkhan.turmetov@iktu.kz)

О разрешимости дробных аналогов задачи Неймана для бигармонического уравнения

В статье исследованы вопросы разрешимости некоторых краевых задач для бигармонического уравнения. В качестве граничных операторов рассмотрен оператор дифференцирования дробного порядка в смысле Миллера-Росса. Изучены свойства интегро-дифференциальных операторов в классе гладких функций в единичном шаре. Исследованы свойства решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения. Рассматриваемые задачи являются обобщением известной задачи Неймана.

Ключевые слова: бигармоническое уравнение, краевая задача, дробная производная, оператор Миллера-Росса.

1. Введение

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ — единичный шар, $n \ge 3$, $\partial\Omega = \{x \in R^n : |x| = 1\}$ — единичная сфера, $u(x)$ — бигармоническая функция в области Ω, $r = |x|$, $\theta = x/|x|$.

Для любого $\alpha > 0$ выражение $J^\alpha[u](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (r-\tau)^{\alpha-1} u(\tau\theta) d\tau$ называется оператором интегрирования порядка α в смысле Римана-Лиувилля [1]. В дальнейшем будем считать $J^0[u](x) = u(x)$.

Пусть $m - 1 < \alpha \le m, m = 1, 2, \ldots$. Выражения

$$ {}_{RL}D^\alpha[u](x) = \frac{d^m}{dr^m} J^{m-\alpha}[u](x), \quad {}_C D^\alpha[u](x) = J^{m-\alpha}\left[\frac{d^m u}{dr^m}\right](x)$$

называются производными порядка α в смысле Римана–Лиувилля и Капуто [1]. Здесь $\frac{d}{dr}$ — дифференциальный оператор вида $\frac{d}{dr} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{r} \frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{d^k}{dr^k} = \frac{d}{dr}\left(\frac{d^{k-1}}{dr^{k-1}}\right), k = 2, 3, \ldots$.

Пусть далее параметр j принимает одно из значений, $j = 0, 1, \ldots, m.$ Рассмотрим семейство операторов $D_j^\alpha[u](x) = \frac{d^{m-j}}{dr^{m-j}} J^{m-\alpha} \frac{d^j}{dr^j} u(x)$. Данный оператор называется производной порядка α в смысле Миллера-Росса [2].

Введем обозначения $B_j^\alpha u(x) = r^\alpha D_j^\alpha u(x)$, $B^{-\alpha} u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} u(sx) ds$.

Пусть $0 < \alpha \le 2$. Рассмотрим в области Ω следующие задачи:

Задача 1. Пусть $0 < \alpha < 2$. Найти бигармоническую функцию $u(x) \in C^4(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, для которой $B_1^{\alpha+k}[u](x) \in C(\bar{\Omega}), k = 0, 1,$ и которая удовлетворяет краевым условиям

$$D_1^{\alpha+k}[u](x) = f_k(x),\ x \in \partial\Omega, k = 0, 1. \tag{1}$$

Задача 2. Пусть $1 < \alpha \le 2$. Найти бигармоническую функцию $u(x) \in C^4(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, для которой $B_2^{\alpha+k}[u](x) \in C(\bar{\Omega}), k = 0, 1,$ и которая удовлетворяет краевым условиям

$$D_2^{\alpha+k}[u](x) = f_k(x);\ x \in \partial\Omega, k = 0, 1. \tag{2}$$

Известно (см., например, [3]), что для всех $x \in \partial\Omega$ оператор $r\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}-1\right)...\left(r\frac{d}{dr}-k+1\right)$ совпадает с оператором $\frac{d^k}{d\nu^k}, k=1,2,...,$ ν — вектор нормали к сфере $\partial\Omega$. Тогда в случае $\alpha=1$ для всех $x \in \partial\Omega$ получаем

$$D_1^1 u(x) = \frac{du}{d\nu},\ r^2 D_j^2 u(x) = r^2 \frac{d^2 u(x)}{dr^2} = \frac{d^2 u(x)}{d\nu^2}.$$

Следовательно, при значениях $\alpha=1$ или $\alpha=2$ задачи 1 и 2 представляют собой аналоги задачи Неймана для уравнения (1).

Рассматриваемые задачи в случае $\alpha=1$ изучены в работе [4], а в случае $\alpha=2$ — в работе [5]. Доказано, что в случае $\alpha=1$ для разрешимости задачи необходимо и достаточно выполнения условия

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left[f_2(x) - f_1(x) \right] ds_x, \tag{3}$$

а в случае $\alpha=2$

$$0 = \int_{\partial\Omega} f_2(x) dS_x, \tag{4}$$

$$0 = \int_{\partial\Omega} x_j \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dS_x,\ j=1,2,...,n. \tag{5}$$

Отметим также, что краевые задачи с граничными операторами дробного порядка для эллиптических уравнений исследовались в работах [6–10]. Кроме того, в работе [11] для уравнения (1) изучена краевая задача с условиями $D_0^{\alpha+k}\left[u\right](x) = f_k(x), x\in\partial\Omega, k=0,1,\ 0<\alpha<1.$

2. Свойства операторов B_j^α *и* $B^{-\alpha}$.

Следующее утверждение доказывается непосредственным подсчетом.

Лемма 1. Пусть $v_1(x) = r\frac{du(x)}{dr}, v_2(x) = r\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}-1\right)u(x).$ Тогда справедливы следующие равенства:

$$v_1(0) = v_2(0) = 0; \tag{6}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_i}(0) = 0,\ i=1,2,...,n. \tag{7}$$

Аналогичные утверждения верны и для функции $B_j^\alpha[u](x), j=0,1.$

Лемма 2. Пусть $0<\alpha\le 2.$ Тогда справедливы следующие равенства:

$$B_1^\alpha[u](0) = 0; \tag{8}$$

$$B_2^\alpha[u](0) = 0, \frac{\partial B_2^\alpha[u](0)}{\partial x_i} = 0,\ i=1,2,...,n. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $0<\alpha<1.$ Тогда по определению оператора B_1^α для функции $B_1^\alpha[u](x)$ имеем

$$B_1^\alpha[u](x) = \frac{r^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^r (r-\tau)^{-\alpha}\frac{du}{d\tau}(\tau x)d\tau = \frac{r^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dr}\int_0^r \frac{(r-\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\frac{du}{d\tau}(\tau x)d\tau =$$

$$= \frac{r^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dr}\left[-\frac{r^{1-\alpha}}{1-\alpha}u(0) + r^{1-\alpha}\int_0^1 (1-\xi)^{-\alpha}u(\xi x)d\xi\right] = -\frac{u(0)}{\Gamma(1-\alpha)} + (1-\alpha)u_1(x) + r\frac{du_1(x)}{dr},$$

где $u_1(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 (1-\xi)^{-\alpha}u(\xi x)d\xi.$

Таким образом,

$$B_1^\alpha[u](x) = -\frac{u(0)}{\Gamma(1-\alpha)} + (1-\alpha)u_1(x) + r\frac{du_1(x)}{dr}, x\in\Omega. \tag{10}$$

Отсюда с учетом равенства (6) получим

$$\lim_{x\to 0} B_1^{\alpha}[u](x) = -\frac{u(0)}{\Gamma(1-\alpha)} + (1-\alpha)\lim_{x\to 0} u_1(x) + \lim_{x\to 0} r\frac{du_1(x)}{dr} = 0.$$

Равенство (8) в случае $0<\alpha<1$ доказано.

Пусть $1<\alpha<2$ и $j=1$. Тогда по определению оператора B_1^{α} имеем

$$B_1^{\alpha}[u](x) = \frac{r^{\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{d}{dr}\int_0^r (r-\tau)^{1-\alpha}\frac{du}{d\tau}(\tau x)d\tau = \frac{r^{\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{d^2}{dr^2}\int_0^r \frac{(r-\tau)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}\frac{du}{d\tau}(\tau x)d\tau =$$

$$= -\frac{(1-\alpha)u(0)}{\Gamma(2-\alpha)} + (1-\alpha)(2-\alpha)u_2(x) + 2(2-\alpha)r\frac{du_2(x)}{dr} + r^2\frac{d^2}{dr^2}u_2(x),$$

где $u_2(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^1 (1-\xi)^{1-\alpha}u(\xi x)d\xi.$ Таким образом,

$$B_1^{\alpha}[u](x) = -\frac{(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}u(0) + (1-\alpha)(2-\alpha)u_2(x) + 2(2-\alpha)r\frac{du_2(x)}{dr} + r\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}-1\right)u_2(x). \tag{11}$$

Тогда с учетом равенств (6) и (7) получим

$$\lim_{x\to 0} B_1^{\alpha}[u](x) = -\frac{(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}u(0) + (1-\alpha)(2-\alpha)\lim_{x\to 0} u_2(x) = -\frac{(1-\alpha)u(0)}{\Gamma(2-\alpha)} +$$

$$+\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)u(0)}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^1 (1-\xi)^{1-\alpha}d\xi = -\frac{(1-\alpha)u(0)}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)u(0)}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(1)}{\Gamma(3-\alpha)} = 0.$$

Равенство (8) в случае $1<\alpha<2, j=1$ доказано.

Переходим к доказательству первого равенства из (9). По определению оператора B_2^{α} имеем

$$B_2^{\alpha}[u](x) = \frac{r^{\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^r (r-\tau)^{1-\alpha}\frac{d^2u}{d\tau^2}(\tau x)d\tau = \frac{r^{\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{d^2}{dr^2}\int_0^r \frac{(r-\tau)^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)}\frac{d^2u}{d\tau^2}(\tau x)d\tau =$$

$$= -\frac{(1-\alpha)u(0)}{\Gamma(2-\alpha)} - \frac{r}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{du(0)}{dr} + (1-\alpha)(2-\alpha)u_2(x) + 2(2-\alpha)r\frac{du_2(x)}{dr} + r^2\frac{d^2}{dr^2}u_2(x).$$

Значит,

$$B_2^{\alpha}[u] = -\frac{(1-\alpha)u(0)}{\Gamma(2-\alpha)} - \frac{r\frac{du(0)}{dr}}{\Gamma(2-\alpha)} + (1-\alpha)(2-\alpha)u_2(x) + 2(2-\alpha)r\frac{du_2(x)}{dr} + r\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}-1\right)u_2(x). \tag{12}$$

Из равенств (6) следует

$$r\frac{du_2(x)}{dr}\bigg|_{x=0} = 0, r\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}-1\right)u_2(x)\bigg|_{x=0} = 0.$$

Тогда из представления (12) получаем

$$\lim_{x\to 0} B_2^{\alpha}[u](x) = -\frac{(1-\alpha)u(0)}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)u(0)}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^1 (1-\xi)^{1-\alpha}d\xi =$$

$$= -\frac{(1-\alpha)u(0)}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)u(0)}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(1)}{\Gamma(3-\alpha)} = 0.$$

Далее, обозначим $y_i = \tau\theta_i, i=1,2,...,n.$ Тогда

$$\frac{du(\tau\theta)}{d\tau} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(\tau\theta)}{\partial y_i}\frac{dy_i}{d\tau} = \sum_{i=1}^n \theta_i\frac{\partial u(\tau\theta)}{\partial y_i}.$$

Так как $\theta = x/r, \theta_i = x_i/r,$ то

$$\frac{r}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{du(0)}{d\tau} = \frac{r}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{r}\frac{\partial u(\tau\theta)}{\partial y_i}\bigg|_{\tau=0} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial u(0)}{\partial y_i}.$$

Отсюда для любого $k=1,2,...,n$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left[-\frac{r}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{du(0)}{d\tau}\right]=-\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{\partial u(0)}{\partial y_k}.$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left[-\frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}u(0)\right]=0.$$

Далее, при любом $k=1,2,...,n$ верно равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_k}u(\xi x)=\frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_k}=\xi\frac{\partial u}{\partial y_k},$$

поэтому

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_k}u(\xi x)\right|_{x=0}=\xi\frac{\partial u(0)}{\partial y_k}.$$

Следовательно,

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_k}u_2(x)\right|_{x=0}=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{\partial u(0)}{\partial y_k}\int_0^1(1-\xi)^{1-\alpha}\xi d\xi=\frac{\partial u(0)}{\partial y_k}\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(4-\alpha)}=\frac{1}{(3-\alpha)(2-\alpha)\Gamma(2-\alpha)}\frac{\partial u(0)}{\partial y_k}.$$

Далее, по определению оператора $r\frac{d}{dr}$ имеем

$$r\frac{du_2(x)}{dr}=\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_i}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left[r\frac{du_2(x)}{dr}\right]=\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_k\partial x_i}+\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_k}.$$

Поэтому

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_k}\left[2(2-\alpha)r\frac{du_2(x)}{dr}\right]\right|_{x=0}=2(2-\alpha)\left.\left[\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_k\partial x_i}+\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_k}\right]\right|_{x=0}=\frac{2}{(3-\alpha)\Gamma(2-\alpha)}\frac{\partial u(0)}{\partial y_k}.$$

Далее, в силу равенства (7), следует

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\left[r\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}-1\right)u_2(x)\right]\right|_{x=0}=0.$$

Используя все эти вычисления и из представления функции $B_2^\alpha[u](x)$, получаем

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_k}B_2^\alpha[u](x)\right|_{x=0}=-\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{\partial u(0)}{\partial y_k}+\frac{1-\alpha}{(3-\alpha)\Gamma(2-\alpha)}\frac{\partial u(0)}{\partial y_k}+\frac{2}{(3-\alpha)\Gamma(2-\alpha)}\frac{\partial u(0)}{\partial y_k}=0.$$

Если $\alpha=1$ или $\alpha=2$, то $B_1^1u(x)=r\frac{du(x)}{dr}, B_1^2u(x)=r\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}-1\right)u(x)$, а для этих функций утверждение леммы вытекает из леммы 1. Лемма доказана.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть $0<\alpha<2$. Тогда для любого $x\in\Omega$ справедливы равенства

$$B^{-\alpha}\left[B_1^\alpha[u]\right](x)=u(x)-u(0), \tag{13}$$

и если $u(0)=0$, то

$$B_1^\alpha\left[B^{-\alpha}[u]\right](x)=u(x). \tag{14}$$

Данное утверждение в случае $0<\alpha\le 1$ доказано в работе [10]. Доказательство этого утверждения в случае $1<\alpha<2, j=1$ проводится аналогичным образом.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Лемма 4. Пусть $1<\alpha\le 2.$ Тогда для любого $x\in\Omega$ справедливы равенства

$$B^{-\alpha}\left[B_2^{\alpha}\left[u\right]\right](x)=u(x)-u(0)-\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial u(0)}{\partial x_i}, \qquad (15)$$

и если $u(0)=0,\dfrac{\partial u(0)}{\partial x_i}=0, i=1,2,...,n,$ то

$$B_2^{\alpha}\left[B^{-\alpha}\left[u\right]\right](x)=u(x). \qquad (16)$$

Непосредственным вычислением доказыватся следующее утверждение.

Лемма 5. Пусть $0<\alpha\le 2$ и $u(x)$— бигармоническая функция в области Ω. Тогда функции $B_j^{\alpha}[u](x), j=1,2,$ также являются бигармоническими в Ω.

3. Исследования основных задач.

Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$\begin{cases}\Delta^2 v(x)=0,\ x\in\Omega\\ v(x)=\varphi_1(x),\dfrac{dv(x)}{d\nu}=\varphi_2(x),\ x\in\partial\Omega.\end{cases} \qquad (17)$$

Известно (см., например, [12]), что если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$— гладкие функции, то решение задачи (17) существует и единственно. В работе [5] доказано следующее утверждение.

Лемма 6. Пусть $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$— гладкие функции. Тогда для функции $v(x)$ справедливы равенства

$$v(0)=\frac{1}{2\omega_n}\int_{\partial\Omega}\left[2\varphi_1(y)-\varphi_2(y)\right]dS_y; \qquad (18)$$

$$\frac{\partial v(0)}{\partial x_k}=\frac{n}{2\omega_n}\int_{\partial\Omega}y_k\left[3\varphi_1(y)-\varphi_2(y)\right]dS_y, k=1,2,...,n. \qquad (19)$$

Справедливо следующее основное утверждение.

Теорема. Пусть $0<\alpha\le 2, f_1(x)$ и $f_2(x)$— достаточно гладкие функции. Тогда:

1. а) если $0<\alpha<2, j=1,$ то для разрешимости задачи 1 необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_{\partial\Omega}\left[f_2(y)+(\alpha-2)f_1(y)\right]dS_y=0; \qquad (20)$$

б) если решение задачи 1 существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде

$$u(x)=C+B^{-\alpha}[v](x), \qquad (21)$$

где $v(x)$ — решение задачи (17), удовлетворяющее условию $v(0)=0$, с граничными значениями $\varphi_1(x)=f_1(x),\varphi_2(x)=f_2(x)+\alpha f_1(x).$

2. а) если $1<\alpha\le 2, j=2,$ то для разрешимости задачи 2 необходимо и достаточно выполнения условия (20) и

$$\int_{\partial\Omega}y_j\left[f_2(y)+(\alpha-3)\varphi_1(y)\right]dS_y=0, j=1,...,n; \qquad (22)$$

б) если решение задачи 2 существует, то оно единственно с точностью до полиномов первого порядка и представляется в виде

$$u(x)=c_0+\sum_{i=1}^{n}c_ix_i+B^{-\alpha}[v](x), \qquad (23)$$

где $v(x)$ — решение задачи (17), удовлетворяющее условиям $v(0)=0,\dfrac{\partial v(0)}{\partial x_i}=0,i=1,2,...,n,$ с граничными значениями $\varphi_1(x)=f_1(x),\varphi_2(x)=f_2(x)+\alpha f_1(x).$

Доказательство. Пусть $u(x)$ — решение задачи 1. Применим к функции $u(x)$ оператор $B_j^{\alpha}, j=1,2,$ и обозначим $v(x)=B_j^{\alpha}\left[u\right](x).$ Так как $u(x)$— бигармоническая функция, то в силу утверждения леммы 5 функция $v(x)=B_j^{\alpha}[u](x)$ также является бигармонической в Ω. По предположению $B_1^{\alpha}[u](x)\in C(\bar{\Omega})$. Тогда $v(x)\in C(\bar{\Omega})$ и $v(x)\big|_{\partial\Omega}=f_1(x)\equiv\varphi_1(x)$.

Далее, если $0<\alpha\le 1$, то по определению оператора $B_1^{\alpha+1}$

$$B_1^{\alpha+1}[u](x)==r^{\alpha+1}\frac{d}{dr}\left[r^{-\alpha}\cdot B_1^{\alpha}[u]\right](x)=r\frac{d}{dr}B_1^{\alpha}[u](x)-\alpha B_1^{\alpha}[u](x).$$

Из граничного условия (1) в случае $k=1$ следует $r\frac{d}{dr}B_1^{\alpha}[u](x)\Big|_{\partial\Omega}=f_2(x)$ и поэтому для функции $v(x)$ получаем $\frac{\partial v(x)}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega}=f_2(x)+\alpha f_1(x)\equiv\varphi_2(x)$.

Аналогично, в случае $1<\alpha<2, j=1$ по определению оператора $B_1^{\alpha+1}$ имеем

$$B_1^{\alpha+1}[u](x)=r^{\alpha+1}\frac{d}{dr}\left[r^{-\alpha}\cdot B_1^{\alpha}[u]\right](x)=r\frac{d}{dr}B_1^{\alpha}[u](x)-\alpha B_1^{\alpha}[u](x).$$

Следовательно, и в этом случае $\frac{\partial v(x)}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega}=f_2(x)+\alpha f_1(x)\equiv\varphi_2(x)$.

Таким образом, если $u(x)$ — решение задачи 1, то для функции $v(x)=B_1^{\alpha}[u](x)$ получаем задачу (17) с функциями $\varphi_1(x)=f_1(x)$, $\varphi_2(x)=f_2(x)+\alpha f_1(x)$. Кроме того, в силу равенства (8) функция $v(x)$ дополнительно удовлетворяет условию $v(0)=0$.

Пусть $0<\alpha\le 1$. Тогда в силу равенства (18) функция $v(x)=B_1^{\alpha}[u](x)$ удовлетворяет условию

$$v(0)=\int\limits_{\partial\Omega}\left[2\varphi_1(y)-\varphi_2(y)\right]dS_y=0.$$

Так как $\varphi_1(x)=f_1(x)$, $\varphi_2(x)=f_2(x)+\alpha f_1(x)$, то это условие можно переписать в виде (20). Таким образом, необходимость выполнения условия (20) для решения задачи 1 доказана. Далее, применяя к равенству $v(x)=B_1^{\alpha}[u](x)$ оператор $B^{-\alpha}$, в силу равенства (13) получаем, $B^{-\alpha}[v](x)=B^{-\alpha}\left[B_1^{\alpha}[u]\right](x)=u(x)-u(0)$, т.е. если решение задачи 1 существует, то оно представляется в виде (21).

Покажем, что выполнение условия (20) является и достаточным для существования решения задачи 1. Действительно, если выполняется условие (20), то для решения задачи (17) с функциями $\varphi_1(x)=f_1(x)$, $\varphi_2(x)=f_2(x)+\alpha f_1(x)$ выполняется условие $v(0)=0$. Тогда в классе таких функций оператор $B^{-\alpha}$ определен и можно рассмотреть функцию $u(x)=C+B^{-\alpha}[v](x)$. Данная функция удовлетворяет всем условиям задачи 1. Действительно, так как функция $v(x)$ является бигармонической в Ω и $v(0)=0$, то в силу первого утверждения леммы 6 функция $u(x)=C+B^{-\alpha}[v](x)$ также является бигармонической в Ω. Далее, используя равенство (14), получаем

$$D_1^{\alpha}[u](x)\big|_{\partial\Omega}=B_1^{\alpha}[u](x)\big|_{\partial\Omega}=B_1^{\alpha}\left[C+B^{-\alpha}[v]\right](x)\big|_{\partial\Omega}=v(x)\big|_{\partial\Omega}=\varphi_1(x)=f_1(x);$$

$$D_1^{\alpha+1}[u](x)\big|_{\partial\Omega}=B_1^{\alpha+1}[u](x)\big|_{\partial\Omega}=r\frac{\partial}{\partial r}B_1^{\alpha}[u](x)-\alpha B_1^{\alpha}[u](x)\big|_{\partial\Omega}=$$

$$=r\frac{\partial}{\partial r}B_1^{\alpha}\left[C+B^{-\alpha}[v]\right](x)-\alpha B_1^{\alpha}\left[C+B^{-\alpha}[v]\right](x)\big|_{\partial\Omega}=$$

$$=r\frac{\partial}{\partial r}v(x)-\alpha v(x)\big|_{\partial\Omega}=\varphi_2(x)-\alpha\varphi_1(x)=f_2(x)+\alpha f_1(x)-\alpha f_1(x)=f_2(x).$$

Следовательно, функция $u(x)=C+B^{-\alpha}[v](x)$ удовлетворяет всем условиям задачи 1.

Пусть теперь $1<\alpha<2, j=1.$ И в этом случае функция $v(x)=B_1^\alpha[u](x)$ будет решением задачи (17) с функциями $\varphi_1(x)=f_1(x)$, $\varphi_2(x)=f_2(x)+\alpha f_1(x)$. Кроме того, в силу равенства (6) дополнительно выполняется условие $v(0)=0$. Тогда из равенства (17) следует $0=v(0)=\frac{1}{2\omega_n}\int\limits_{\partial\Omega}\left[2\varphi_1(y)-\varphi_2(y)\right]dS_y$. Значит, для выполнения условия $v(0)=0$ необходимо выполнение равенства $\int\limits_{\partial\Omega}\left[2\varphi_1(y)-\varphi_2(y)\right]dS_y=0$. Так как $2\varphi_1(y)-\varphi_2(y)=-\left[f_2(y)+(\alpha-2)f_1(y)\right]$, то это условие можно переписать в виде (19). Таким образом, необходимость выполнения условия (19) доказана. Далее, дословным повторением, как и в случае $0<\alpha<1$, доказывается остальная часть теоремы.

Пусть $1<\alpha<2, j=2$ и $u(x)$ — решение задачи 2. Применим к функции $u(x)$ оператор B_2^α и обозначим $v(x)=B_2^\alpha[u](x)$. Тогда из (12) и равенства

$$B_2^{\alpha+1}[u](x)=r^{\alpha+1}\frac{d}{dr}\left[r^{-\alpha}\cdot B_2^\alpha[u]\right](x)=r\frac{d}{dr}B_2^\alpha[u](x)-\alpha B_2^\alpha[u](x)$$

следует, что функция $v(x)$ будет решением задачи (17) с функциями $\varphi_1(x)=f_1(x)$, $\varphi_2(x)=f_2(x)+\alpha f_1(x)$. Кроме того, в силу утверждения леммы 2 функция $v(x)=B_2^\alpha[u](x)$ должна удовлетворять условиям $v(0)=0, \frac{\partial v(0)}{\partial x_i}=0, i=1,2,...,n.$

Далее, аналогичными рассуждениями, как и в случае $1<\alpha<2, j=1$, можно показать, что для выполнения равенства $v(0)=0$ необходимо выполнение условия (20).

Теперь проверим, что для выполнения равенств $\frac{\partial v(0)}{\partial x_i}=0, i=1,2,...,n$, необходимо выполнение условий (22). Для этого воспользуемся представлением (19) из леммы 6. В силу этого равенства для $v(x)$ имеет место равенство $\frac{\partial v(0)}{\partial x_i}=\frac{n}{2\omega_n}\int\limits_{\partial\Omega}y_j\left[3\varphi_1(y)-\varphi_2(y)\right]dS_y$.

Так как $\varphi_2(y)-3\varphi_1(y)=f_2(x)+\alpha f_1(x)-3f_1(x)=f_2(x)+(\alpha-3)f_1(x)$, то для выполнения равенств $\frac{\partial v(0)}{\partial x_i}=0, i=1,2,...,n$, необходимо выполнение условий (22).

Далее, применяя к равенству $v(x)=B_1^\alpha[u](x)$ оператор $B^{-\alpha}$, в силу равенства (10) получаем $B^{-\alpha}[v](x)=B^{-\alpha}\left[B_1^\alpha[u]\right](x)=u(x)-u(0)-\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial u(0)}{\partial x_i}$. Если в последнем равенстве обозначим $c_0=u(0), c_i=\frac{\partial u(0)}{\partial x_i}, i=1,2,...,n$, то получим представление (23). Таким образом, если решение задачи 2 существует, то оно представляется в виде (23).

Покажем, что выполнение условий (20) и (22) является достаточным и для существования решения задачи 2. Действительно, если выполняются условия (20) и (22), то для решения задачи (17) с функциями $\varphi_1(x)=f_1(x)$ и $\varphi_2(x)=f_2(x)+\alpha f_1(x)$ выполняются условия $v(0)=0$, $\frac{\partial v(0)}{\partial x_i}=0, i=1,2,...,n.$ Тогда в классе таких функций оператор $B^{-\alpha}$ определен и можно рассмотреть функцию $u(x)=c_0+\sum_{i=1}^n c_i x_i+B^{-\alpha}[v](x)$. Как и в случае $0<\alpha\le 1$, можно показать, что данная функция удовлетворяет всем условиям задачи 2. Теорема доказана.

Замечание. Если в равенстве (20) $\alpha=1$, то условие разрешимости задачи 1 совпадает с условием (3). Аналогично в случае $\alpha=2$ условие разрешимости задачи 2 совпадает с условиями (4) и (5).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта МОН РК (Грант № 0819/ГФ4).

Список литературы

1 *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Math Studies. Elsevier. — 2006. — 541 p.

2 *Miller K.S., Ross B*. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. — John Wiley & Sons INC. — 1993. — 384 p.

3 *Карачик В.В.* Построение полиномиальных решений некоторых краевых задач для уравнения Пуассона // Журн. вычислительной математики и математической физики. — 2011. — Т. 51. — № 5. — С. 1674–1694.

4 *Karachik V.V., Turmetov B.Kh., Bekaeva A.E.* Solvability conditions of the Neumann boundary value problem for the biharmonic equation in the unit ball // Int. J. Pure Appl Math. — 2012. — Vol. 81. — No. 3. — P. 110–118.

5 *Turmetov B.Kh., Ashurov R.R.* On Solvability of the Neumann Boundary Value Problem for Non-homogeneous Biharmonic Equation // British Journal of Mathematics & Computer Science. — 2014. — Vol. 4. — No. 4. — P. 557–571.

6 *Бердышев А.С., Турметов Б.Х., Кадиркулов Б.Ж.* Некоторые свойства и применения интегродифференциальных операторов типа Адамара–Маршо в классе гармонических функций // Сибирский математический журн. — 2012. — Т. 53. — № 4. — С. 752–764.

7 *Karachik V.V., Turmetov B.Kh., Torebek B.T.* On some integro-differential operators in the class of harmonic functions and their applications // Siberian Advances in Mathematics. — 2012. — Vol. 22. — No. 2. — P. 115–134.

8 *Киране М., Татар. Н.-е.* Отсутствие решений уравнения Лапласа с динамическим краевым условием дробного типа // Сибирский математический журнал. — 2007. — Т. 48. — № 5. — С. 1056–1064.

9 *Muratbekova M.A., Shinaliyev K.M., Turmetov B.Kh.* On solvability of a nonlocal problem for the Laplace equation with the fractional-order boundary operator // Boundary Value Problems — 2014. — doi:10.1186/1687-2770-2014-29.

10 *Torebek B.T., Turmetov B.Kh.* On solvability of a boundary value problem for the Poisson equation with the boundary operator of a fractional order // Boundary Value Problems. — 2013. — doi: 10.1186/1687-2770-2013-93.

11 *Berdyshev A.S., Cabada A., Turmetov B.Kh.* On solvability of a boundary value problem for a nonhomogeneous biharmonic equation with a boundary operator of a fractional order // Acta Mathematica Scientia. — 2014. — Vol. 34B. — No. 6. —P. 1695–1706.

12 *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions // I. Comm Pure Appl Math. — 1959. — Vol. 12 (4). — P. 623–727.

Б.Х.Тұрметов, А.М.Мырзахасова

Бигармониялық теңдеу үшін Нейман есебінің бөлшек ретті аналогтарының шешілімділігі туралы

Мақалада бигармониялық теңдеу үшін кейбір шеттік есептердің шешілімділігі мәселесі зерттелді. Шекаралық операторлар есебінде Миллер-Росс түріндегі бөлшек ретті дифференциалдық операторлар қарастырылды. Бірлік шарда тегіс болған функциялар класында кейбір интегро-дифференциалдық операторлардың қасиеттері анықталды. Бигармониялық теңдеу үшін Дирихле есебі шешімінің қасиеттері зерттелді. Қарастырылатын есеп белгілі Нейман есебінің жалпыламасы болып табылады.

B.Kh.Turmetov, A.M.Myrzakhasova

On solvability of fractional analogues of the Neumann problem for biharmonic equation

In the paper we research the questions about solvability of some boundary value problems for biharmobic equations. As a boundary operator we consider the differentiation operator of fractional order in Miller-Ross sense. Consider properties of integral-differential operators of fractional order in the class of functions, which are smooth in the unit ball. We study properties of the solution of the Dirichlet problem for a biharmonic equation. The considered problem is a generalation of the well known Neumann problem.

References

1 Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Math Studies, Elsevier, 2006, 541 p.

2 Miller K.S., Ross B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley & Sons, INC, 1993, 384 p.

3 Karachik V.V. *Comput Math Math Phys.*, 2011, 51, 9, p. 1567–1587.

4 Karachik V.V., Turmetov B.Kh., Bekaeva A.E. *Int. J. Pure Appl Math*., 2012, 81, 3, p. 110–118.

5 Turmetov B.Kh., Ashurov R.R. *British Journal of Mathematics & Computer Science*, 2014, 4, 4, p. 557–571.

6 Berdyshev A.S., Turmetov B.Kh., Kadirkulov B.Zh. *Siberian Mathematical Journal*, 2012, 53, 4, p. 600–610.

7 Karachik V.V., Turmetov B.Kh., Torebek B.T. *Siberian Advances in Mathematics*, 2012, 22, 2, p. 115–134.

8 Kirane M., Tatar N.-e. *Siberian Mathematical Journal*, 2007, 48, 5, p. 1056–1064.

9 Muratbekova M.A., Shinaliyev K.M., Turmetov B.Kh. *Boundary Value Problems*, 2014, doi:10.1186/1687-2770-2014-29.

10 Torebek B.T., Turmetov B.Kh. *Boundary Value Problems*, 2013, doi: 10.1186/1687-2770-2013-93.

11 Berdyshev A.S., Cabada A., Turmetov B.Kh. *Acta Mathematica Scientia*, 2014, 34B, 6, p. 1695–1706.

12 Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. *Comm Pure Appl Math*., 1959, 12 (4), p. 623–727.