УДК Б19.1+549,4

В.С.Мулдагалиев, Б.Б.Бактыгалиев

Западно-Казахстанский государственный университет им. М.Утемисова, Уральск
(E-mail: beibut@list.ru)

Об одном свойстве бесконечных диэдральных групп

В настоящее время теория малых сокращений в комбинаторной теории групп предстает как унифицированная теория. В статье рассмотрена теорема о совпадении с бесконечной диэдральной группой нетривиального свободного произведения слова и ее доказательство. Именно нетривиальное свободное произведение является параболическим или эллиптическим для каждого медианного слова и зависит от бесконечности диэдральной группы.

Ключевые слова: диэдральная группа, нетривиальное произведение, медианное слово, некоммутаторное слово.

Пусть $\varphi = \varphi\ (x_1, x_2, ...\ ,x_n)$ есть слово от n переменных. φ-элементом группы G назовем любой элемент вида $\varphi\ (x_1, x_2, ...\ ,x_n)^{\pm 1}$ с x_i €G (i = 1,2, …, n). Подгруппа, порожденная всеми φ-элементами группы G, называется ее вербальной подгруппой и обозначается через $\varphi(G)$. Если существует натуральное число l такое, что элемент из $\varphi\ (G)$ может быть выражен как произведение e или меньшего числа φ-элементов из G, то говорим, что группа G φ-эллиптическая, если такого числа не существует, то мы говорим, что группа G φ-параболическая.

φ-эллиптические и φ-параболические группы ранее изучались Гриффитсом [1], Ито [2] и Томсоном [3], в частном случае, когда ф есть слово вида x_1^{-1}, x_2^{-1}, x_1, x_2, Такахаси [4] для произвольных слов в расширениях абелевых групп с помощью нильпотентных. Мы имеем дело со свободными произведениями, которые, за исключением нескольких тривиальных случаев, оказались φ-параболическими.

Мы предполагаем, что слово φ-тривиально тогда и только тогда, когда $\varphi\ (G)$=1 для всех φ группы G, собственным тогда и только тогда, когда $\varphi(G) = G$, и, наконец, слово φ назовем медианным, если и только если оно не является ни тривиальным, ни собственным. Свободное произведение $F = A \cdot B$ групп A и B называется нетривиальным, если обе группы A и B нетривиальны.

Нами получены основные результаты.

Теорема 1. Нетривиальное свободное произведение $F = A \cdot B$ является φ-параболическим для каждого медианного слова φ, если только F не бесконечная диэдральная группа.

Теорема 2. Если нетривиальное произведение $F = A \cdot B$ совпадает с бесконечной диэдральной группой, то она φ-эллиптическая для каждого медианного слова φ.

Замечания к доказательству. Доказательство того факта, что нетривиальная группа F является φ-эллиптической, получается из теоремы Стронца. Для дальнейшего мы определяем функции из F в Z^*, которые не ограничены на $\varphi\ (G)$, но ограничены на множествах, состоящих из произведений l букв. Доказательство разбито на два этапа, первый — посвящен случаю, когда A или B не экспоненты 2.

Слова. Будем рассматривать слова от переменных как элемент свободной группы бесконечного счетного ранга. Будем говорить, что φ — коммутаторное слово, если его значение лежит в коммутанте свободной группы. В противном случае ф назовем некоммутаторным словом.

Без ограничения обменности, мы можем написать

$$\Phi(x) = (x_1, \dots, x_n) = \varphi\ (x_1, \dots, x_n) = x_1^{r1}\, x_2^{r2}\, x_n^{rn}\ \varphi^*(x),$$

где $\varphi^*(x)$ — некоммутаторное слово. Пусть l = нод(r_1,…, r_n); φ есть некоммутаторное слово тогда и только тогда, когда $l > 0$. Для такой группы G l-тая степень каждого элемента из G является из числа некоторого слова φ и существуют целые числа из (i = 1, 2, …, n) такие, что $m_i r_i = l$, и если слева положим $x_i = r^{mi}$ (i=1, 2, …, n), то будем иметь $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = r^l$. Таким образом, $l = 1$ означает, что φ — несобственное слово. Точно так же $l > 1$ означает, что φ — собственное некоммутаторное слово. Ясно, что $\varphi(G) = 1$ для любой абелевой группы G — экспоненты l.

Доказательство теоремы в случае, когда период одного из сомножителей A, B отличен от 2.

1. Рассмотрим случай, когда φ — некоммутаторное слово. Пусть φ $(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^{r1} x_2^{r2} x_n^{rn}$ φ $*(x)$ — данное среднее некоммутаторное слово от *n*–переменных. Пусть $l = (r_1, \ ..., \ r_n)$, тогда $l > 1$. Пусть $F = A \bullet B$ — данное нетривиальное свободное произведение такое, что $A \neq \{1\}$ и *в* содержит элемент в периода > *ω*. На протяжении этого раздела мы зафиксируем этот элемент и будем всегда учитывать, что $l \neq b^{-e}$. Пусть $\omega_1,..., \omega_n$ — проверенная форма произвольного элемента $x \neq 1$ из *F* такая, что факторы U_i лежат в отборочной в *A* и *B*. Если случится так, что более чем один из этих факторов U_i совпадает с *в*, то часть элемента *в*, которая заключена между двумя первыми вхождениями элемента *в*, будем называть *в*-промежуточным длины $2r - 1$, где $2r - 1$ — это число факторов между двумя вхождениями элемента *в*.

Пусть $\delta_k(x)$ означает число интервалов длины $2k-1$ $(k=1,\ 2,\ ...)$ В x, а $\delta^*_k(x)$— число k^{-1}-промежутков той же длины. Определим $\gamma(x)$ как число промежутков длины $2k-1$, для которых $\delta_k(x)=\delta^*_k(x) \,(\bmod\ 1)$. Функция γ ограничена на произведении в φ-элементов для всех l, но она не ограничена на $\varphi(G)$. Заметим, что вид любого $x \in F$

$$\delta_k(x)=\delta^*_k(x-1);$$
$$\gamma(x)=\gamma(x-1);$$
$$\delta_k(x)-\delta^*_k(x)+\delta_k(x^{-1})-\delta^*_k(x^{-1})=0.$$

Далее приведем без доказательства несколько лемм. Они доказываются путем долгих, утомительных и скучных вычислений.

Лемма 1. Для любых элементов $x,\ y$ из F имеет место соотношение

$$\delta_k(xy)-\delta^*_k(xy)=\delta_k(x)+\delta_k(y)-\delta^*_k(x)-\delta^*_k(y),$$

за исключением самых больших девяти значений k.

Лемма 2. Для любых элементов $x,\ y$ из F $\gamma(xy)\le \gamma x)+\gamma(y)+9.$

Лемма 3. Для любых элементов $x,\ y$ из $F\gamma([x,y])\le 27$ (здесь, как обычно, $[x,y]$— коммутатор).

Лемма 4. Для любого элемента x из F $\gamma(x^{-1})\le 20.$

Лемма 5. Если $F=A\cdot B$ — такое свободное произведение своих A и B, что $A\neq\{1\}\,A\neq\{1\}$, B имеет не больше двух и φ — любое серединное некоммутаторное слово, то группа F φ-параболическая.

2. Далее покажем соответствующий результат для коммутаторного слова. Как и раньше пусть $u_1,...,u_m$ — редуцированная форма элемента x из F $(x\neq 1)$. Пусть (x,b) обозначает кратность в x элемента k, т.е число, равное числу вхождений элемента k в редуцированную форму элемента x.

Краткости ради будем писать $\omega(x)=(x,b)-(x,b^{-1})$, тогда

$$\omega(x)+\omega(x^{-1})=0.$$

Лемма 6. Для любых элементов $x,\ y$ из F $\omega(x)+\omega(y)-3\le\omega(xy)\le\omega(x)+\omega(y)+3.$

Лемма 7. Для любых элементов $x,\ y$ из F $|\,\omega(x,y)\,|\le|\,\omega(x)\,|+|\,\omega(y)\,|+3.$

Доказательство этой леммы непосредственно следует из предыдущей леммы.

Лемма 8. Для любого коммутаторного слова $[\,x,\ y\,]$ из F $|\,\omega([x,y])\,|\le 9.$

Этот результат получается путем трехкратного леммы 6.

Лемма 9. Группа F - φ-параболическая, для любого серединного коммутаторного слова φ.

Доказательство. Так как серединное слово φ можно выразить как произведение $S^/$ коммутаторов для некоторого числа $S^/=S^/(\varphi)$, то произвольный элемент Z, являющийся произведением φ-слов, в силу лемм 7 и 8, должен удовлетворять условию $|\,\omega(z)\,|\le 12S^/m-3.$ Отсюда для доказательства леммы необходимо показать, что $q(F)$ содержит элементы сколь угодно большого ω-значения. Выбираем произвольный неединичный элемент a и A. Пусть $\beta>2$ есть порядок элемента b и α— порядок элемента a. Нетривиальное свободное произведение $G=\{a\}\cdot\{b\}$ является подгруппой F, а так как B не является бесконечной нейтральной группой, то она как подгруппа свободной группы имеет бесконечный ранг. Таким образом, $\varphi(G)\neq 1.$ Сопрягая, если нужно, мы можем предположить, что $\varphi(G)$ содержит элемент, отличный от единицы и такой, что

$$g=a^{m_1}b^{n_1}...a^{m_r}b^{n_r}, \text{ где } m_i\neq 0\,(\bmod\ \alpha) \text{ и } n_j=0\,(\bmod\ \beta).$$

Если $|\omega(g)|>0,$ то для любого положительного числа t $|\omega(g)|=t$ или $|\omega(g)|>t.$

Если $|\omega(g)|=0,$ то выберем целое число γ следующим образом:
если $n_r\neq 1$ $(\bmod\ \beta)$, то выберем γ, удовлетворяющую условию $\gamma_{rH}\equiv 1$ $(\bmod\ \beta)$; если $n_r\equiv 1$ $(\bmod\ \beta)$, то выберем γ, удовлетворяющую условию $\gamma_{rH}\equiv -1$ $(\bmod\ \beta)$.

Так как $\beta>2,$ то $\gamma\equiv 0$ $(\bmod\ \beta)$. Пусть $g_1=b^{-\gamma}gb^{\gamma}$ и для $t>1,$ $g_t=b^{-\gamma}g_{t-0}b^{\gamma}=b^{-\gamma_t}(gb^{\gamma})^t.$ Понятно, что $g_t\in\varphi(F).$

По выбору $\gamma,$ если $u_r\equiv 1$ $(\bmod\ \beta)$, то $(gb^{\gamma},b)=(g,b)+1$ и $(gb^{\gamma},b^t)\leq(g,b^{-1}).$

Если $n_r\equiv 1$ $(\bmod\ \beta)$, то $(gb^{\gamma},b^{-1})=(g,b^{-1})+1$ и $(gb^{\gamma},b)=(g,b)-1.$ Таким образом, $\omega(g)=0$ влечет $\omega(g,b^{\gamma})\neq 0.$ Так как левый конец gb^{γ} (фактор a^m) лежит в $A,$ а правый (фактор $b^{\pm1}$) — в $B,$ то произведениям $(gb^{\gamma})(gb^{\gamma})$ нельзя произвести сокращение. Но тогда для любого целого числа t

$$|\omega((gb^{\gamma})^t)|=t, \quad |\omega(gb)|\geq t.$$

Далее поинтересуемся ω-значением элемента $gt=b^{-\gamma t}(gb^{\gamma})^t.$ Теперь $|\omega(gb^{-\gamma t})|=1.$ Применим лемму 6 к произведению $(b^{-\gamma t})(gb^{\gamma})^t$ и получим $\omega(g_i)=\omega(gb^{\gamma})^t+\omega(b^{-\gamma t}).$ Отсюда $|\omega(gt)|\geq t-1.$ Это завершает доказательство леммы.

Доказательство теоремы в случае, когда A и B имеют экспоненту 2.

Лемма 10. Пусть $G=A\cdot B,$ где $A=\{a\},$ $B=\{b\}$ $ca^2=b^2=1.$ Тогда $G-\varphi$-эллиптическая для каждого слова $\varphi.$

Доказательство. Конечно же, G — бесконечная группа диэдра. Пусть $c=ab.$ Тогда $C=\{c\}$ — бесконечная циклическая группа, $a^{-1}ca=a^{-1}$ и $G=\{a,b\}.$ К тому же $G=C\cup Ca.$ Пусть φ — произвольное слово. Тогда $\varphi(x)=\varphi(x_1,...,x_n)=x_1^{r_1}...x_n^{r_n}\varphi^*(x),$ где $\varphi^*(x)$ — коммутаторное слово. Если $b=Н.О.Д(r_1,...,r_2)\geq 1,$ тогда, очевидно, $x^e-\varphi$-элементарная. Отсюда каждый элемент из $c^e=\{x^e\mid x\in C\}$ является φ-элементарным и, значит, G/C^e — конечная группа. Так что $G-\varphi$-эллиптическая группа.

Если $\varphi(x)=\varphi(x_1,...,x_n)=x_{i_1}^{r_1}...x_{i_n}^{r_n}$ — коммутаторное слово, то $\varphi(G)<G.$ В случае, когда $\varphi(G)=1,$ доказать нечего. Пусть $\varphi(G)\neq 1.$ Тогда для некоторого натурального $S^{/}$ C^S есть φ-значение $x_{i_1}^{r_1}...x_{i_n}^{r_n}.$ Покажем, что каждый элемент из $C^{S^{/}}$ есть φ-значение. Пусть d — целое число. Так как $G=C\cup Ca,$ то либо $x_{ij}=c^{ij},$ либо $x_{ij}=c^{\alpha_j}a,$ где α_j — целое число. Заменим x_{ij} элементом $y_{ij}=c^{\alpha_j d},$ если $x_{ij}=c^{\alpha_j},$ и элементом $y_{ij}=c^{\alpha_j d}a,$ если $x_{ij}=c^{\alpha_j}a.$ Тогда $y_{i_1}^{r_1}...y_{i_m}^{r_m}c^y$ есть φ-значение. Лемма 7 доказана.

Рассмотрим свободное произведение $F=A\cdot B,$ где A и B имеют экспоненту два, $A\neq\{1\},$ а порядок B больше двух. Для наших целей достаточно рассмотреть свободное произведение $F=A\cdot B,$ где A — циклическая группа порядка 2, а B — элементарная группа порядка 4. Очевидно, что F есть фактор-группа группы $F,$ так как свойство «быть φ-эллиптическим» замкнуто относительно взятия гомоморфных оборотов, для данного слова φ группа $F-\varphi$-параболическая, если группа $F-\varphi$-параболическая.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$$F=A\cdot B,\ A=(1,a);\quad B=(1,b,c,d),$$

где B — элементарная абелева группа. Для любого $1\neq x$ из F пусть

$$x=u_1...u_m \tag{1}$$

— редуцированная форма элемента x такая, что конечный фактор попеременно равен a. Если случится, что более одного из этих факторов u_i совпали с элементом b, то промежуток элемента x, идущий от первого встретившегося b к следующему и включающий фактор в обоих концах, будем называть b-промежутком. И дальше $u_{i_1},...,u_{i_r}$ суть факторы $B(1)$, равные b, с $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_r \le m$. Для $1 \le j < r$ пусть $x_j = u_{ij}u_{ij+1}...u_{ij+1}$ таковы, что $u_{ij} = u_{ij+1} = b$ и только эти факторы равны b в x_j. Если элемент d выбирается однажды и только однажды в редуцированной форме b-промежутка, то мы будем называть это вложимым b-промежутком элемента x. В противном случае это невложимый промежуток.

Пусть x_j — вложимый B-промежуток элемента x такой, что $u_k = d$ для некоторого k, удовлетворяющего условию $i_j < k < i_{j+1}$. Тогда мы будем говорить, что x_j — вложимый B-промежуток длины $\alpha\beta)$, где $\alpha = (k - i_j)$, $\beta = (i_{j+1} - k)$. Число вложимых B-промежутков из x длины $\alpha\beta)$ обозначим через. Пусть

$$DX(\alpha,\beta) = X(\alpha,\beta) - X(\beta,\alpha).$$

Определим $\pi(x)$ как число тех $DX(\alpha,\beta)$, для которых $DX(\alpha,\beta) \ne 0 \pmod C$. Таким образом, каждой паре $(\alpha,\beta) \equiv x(\alpha,\beta) \pmod C$ соответствует одно значение $\pi(x)$, как и раньше $l =$ н.о.д $(\gamma_1,...,\gamma_u)$, $\varphi(x_1,...,x_n) = x_1^{\gamma_1}...x_n^{\gamma_n}$ — данное n-местное слово и $\varphi^*(x)$ — коммутаторное слово.

Каждому вложимому B-промежутку длины $\alpha\beta)$ в x соответствует подходящий $в$-промежуток длины

$$\alpha\beta), \text{ в } x^{-1}\ x(\alpha,\beta) = x^{-1}(\beta,\alpha). \tag{2}$$

Таким образом,

$$DX(\alpha,\beta) + DX^{-1}(\alpha,\beta) = 0. \tag{3}$$

Лемма 11. Для любых элементов x, y из F $Dxy(\alpha,\beta) = Dx(\alpha,\beta) + Dy(\alpha,\beta)$, за исключением, самое большое, γ пар (α,β).

Доказательство. **Случай 1.** Пусть $x = u_1...u_m, v_1...v_n$ есть редуцированная форма элемента xy. В этом случае вложимый B-промежуток xy есть либо x, либо y. Вместе с тем, вообще говоря, может быть еще один, а именно тот, который заключен между последующим фактором, равным в $в_x$, и первым фактором, равным в $в_y$, если он окажется вложимым промежутком. Отсюда $xy(\alpha,\beta) = x(\alpha,\beta) + y(\alpha,\beta)$, за исключением, быть может, одной пары, скажем (α^1,β^1), соответствующей дополнительному B-промежутку, если он один. Таким образом, $(\alpha,\beta) \ne (\alpha^1,\beta^1)$ и $(\alpha,\beta) \ne (\beta^1,\alpha^1)$ и еще

$$Dxy(\alpha,\beta) = Dx(\alpha,\beta) + Dy(\alpha,\beta). \tag{4}$$

Случай 2. Пусть xy приводится к редуцированной форме уплотнением. Тогда фактор u_m из x и фактор ν_1 из y удовлетворяют условию $1 \ne u_m\nu_1 \ne t \in b$. Возможность уплотнить элементы из A исключается, так как A имеет порядок два. В действительности, возможно лишь то, что факторы u_m, ν_n, t суть элементы b, c, d, взятые в определенном порядке.

Положим $\overline{x} = u_1...u_{m-1}t$, $y^1 = \nu_2...\nu_n$, $\overline{x}y^1$ находится в редуцированной форме и случай 1 применим. Таким образом, $D\overline{x}y^1(\alpha,\beta) = D\overline{x}(\alpha,\beta) + Dy^1(\alpha,\beta)$, за исключением, самое большее, двух значений (α,β).

Если $u_m = b$, то $\nu_1 \ne b$ и $t = b$, и $\overline{x}$ имеет на один B-промежуток меньше, чем x. Таким образом, в этом случае $x(\alpha,\beta) = \overline{x}(\alpha,\beta)$, за исключением одного значения (α,β). Так как $\nu_1 \ne b$, то B-промежуток из y^1 уже, чем в By. Таким образом, мы имеем

$$x(\alpha,\beta) + y(\alpha,\beta) = \overline{x}(\alpha,\beta) + y^1(\alpha,\beta), \tag{5}$$

за исключением, самое большее, одного значения (α,β).

Если $t=b$, то $\nu_1 \neq b$, $u_m = bu\overline{x}$, вообще говоря, имеет ur один в-промежуток больше чем x, в-промежуток из y^1 лишь однажды встречается в y. Таким образом, в этом случае имеет место (5).

Если $\nu_1 = b$, то $t \neq b, u_m = b.$ Теперь b-сегмент из $\overline{x}$ тот же, что и x, y^1 может иметь на один B-промежуток меньше, чем y. Таким образом, $x(\alpha,\beta) = \overline{x}(\alpha,\beta)$ для всех (α,β), а $y(\alpha,\beta) =^1 (\alpha,\beta)$ за исключением одного значения. Отсюда в силу (5) имеет место

$$D\overline{x}(\alpha,\beta) + Dy^1(\alpha,\beta) = Dx(\alpha,\beta) + Dy(\alpha,\beta) \tag{6}$$

за исключением двух значений (α,β). При этом если один из них (α_i,β_i), то другой (β_i,α_i).

Из (4) и (6) следует, что $Dxy(\alpha,\beta) = Dx(\alpha,\beta) + Dy(\alpha,\beta),$ за исключением четырех значений (α,β) в случае 2.

Если xy приводится к редуцированной форме сокращением, то последним шагом всегда является уплотнение. Пусть $z = u_1...u_m$ — редуцированная форма фактора x, которая сокращается с соответствующим фактором $\nu_1...\nu_{m-i} = z^{-1}$ из y. Пусть $\nu_i\nu_{m-i+1} = t \in (B - \{1\})$. Запишем $\overline{x}_1 = u_1...u_i$, $y_1 = \nu_{m-i+1}...\nu_n$. Тогда $\overline{x}_1 y^1{}_1$ — редуцированная форма элемента xy. Применяя случай 1 к произведению $x_1 z$, получим $Dx(\alpha,\beta) = Dx_1(\alpha,\beta) + Dz(\alpha,\beta),$ за исключением, самое большее, двух значений (α,β). Аналогично, $Dy(\alpha,\beta) = Dz^{-1}(\alpha,\beta) + Dy_1(\alpha,\beta),$ за исключением, самое большее, двух значений (α,β). Из этих равенств с учетом (3) получаем

$$Dx(\alpha,\beta) + Dy(\alpha,\beta) = Dx_1(\alpha,\beta) + Dy_1(\alpha,\beta), \tag{7}$$

за исключением, самое большее, четырех значений (α,β).

Так как редуцированная форма $x_1 y_1$ и $\overline{x}_1 y^1{}_1$ приводится только уплотнением, то для случая 2 получаем

$$Dx_1 y_1(\alpha,\beta) = Dx_1(\alpha,\beta) + Dy_1(\alpha,\beta), \tag{8}$$

за исключением, самое большее, четырех значений (α,β). Наконец, (7) и (8) дают требуемый результат.

Лемма 12. Для любых x, y из F $\pi(xy) = \pi(x) + \pi(y) + 8.$

Это непосредственно следует из леммы 7.

Лемма 13. Для любого коммутатора $[x, y]$ из F имеем $\pi([x, y]) \leq 24$.

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 8. Результат получаем тремя после доказательными применениями леммы 8.

Лемма 14. Для любого элемента x из F $\pi(x^l) \leq 18.$

Доказательство. Напишем $x^l = z^{-1}y^l z$, где y^l приведен к редуцированной форме, за исключением случая, когда $y \in (A \cup B) - 1$, то $y^l \in (A \cup B)$ и $Dy(\alpha,\beta) = 0$ для всех значений (α,β). Если $y \notin (A \cup B)$, то $y^l(\alpha,\beta) = ly(\alpha,\beta)$, за исключением, самое большее, одного значения (α,β). Это действительно так, потому что каждый B-промежуток (вложимый или невложимый) в y^1 повторяется l раз, а в y^l, который имеет, вообще говоря, $l-1$ дополнительных промежутков одинаковой длины, формируемой первым, равным в, фактором, встречающимся в y. Отсюда $y^l(\alpha,\beta) - y^l(\beta,\alpha) = l(y(\alpha,\beta) - y(\beta,\alpha))$, за исключением, самое большее, двух значений (α,β). Таким образом, для $y \in (A \cup B) - \{1\}$ имеем

$$Dy^l(\alpha,\beta) = lDy(\alpha,\beta), \tag{9}$$

за исключением, самое большее, двух значений (α,β). Дважды применяя лемму 8, получаем

$$Dx^l(\alpha,\beta) = Dz^{-1}(\alpha,\beta) + Dy^l(\alpha,\beta) + Dz(\alpha,\beta), \tag{10}$$

за исключением, самое большее, 16 значений (α,β). Из (9), (10) и (3) следует, что $Dx^l(\alpha,\beta)=lDy(\alpha,\beta)$, за исключением, самое большее, 18 значений (α,β). Так как, $lDy(\alpha,\beta)\equiv 0(\bmod l)$ для всех (α,β), то $\pi(x^l)\le 18$.

Для завершения доказательств основной теоремы достаточно показать, что $\varphi(F)$ содержит элементы произвольной π-длины. Это мы получим из лемм 3, 4, 5, используя рассуждения, аналогичные тем, которые использовались при доказательстве леммы 9.

Пусть $g=u_1u_2...u_m$ — редуцированная форма произвольного элемента g из $\varphi(G)$: $u_i\in(A\cup B)\setminus\{1\}$, $(i=1,2,...,m)$ $(i = 1,2,\ldots m)$. Так как $\varphi(F)\ne 1$, то мы можем предположить, что $m\ge 4$ и $u_1\ne u_m$. Отсюда если $u_1=a$, то $u_m\in B$, и пусть тогда $u_m=c$ и будем рассматривать $gcg^{-1}c$ вместо y, если это необходимо. Если u_i и u_m оба из B, то заменим g на $u^{-1}{}_1gu_m=u_2...u_{m-1}(u_mu_2)$ и первый фактор теперь есть $u_2=a$. Отсюда можно считать, что $g=u_1u_2...u_m$ есть редуцированная форма с $u_1=a$, $u_m=c$. В силу последнего мы можем предложить, что k — другой элемент из $\varphi(F)$, удовлетворяющий для редуцированной формы $k=\nu_1...\nu_n$ условиям $\nu_1=d$, $\nu_n=a$, $g=aU_2...U_{m-1}c$.

Пусть $g=(dad)^{-1}g(dad)=dadau_2...u_{m-1}bad$ — редуцированная форма g. Пусть γ — такое произвольное число, что $\gamma>\max(m,u)$, и пусть $z_1=(ac)^{-\gamma}y(ac)^{\gamma}k$. Редуцированная форма этого элемента имеет вид $z_1=(ac)^{-\gamma}dadau_2...u_{m-1}bad(ac)^{-\gamma}ab\nu_2...\nu_{n-1}a$. Он содержит вложимый промежуток $bad(ac)^{\gamma-1}ab$ длины $(2,\ 2\gamma)$. По выбору γ элемент z_1 не имеет другого B-промежутка этой длины. Для произвольного числа $t\ge 1$ пусть $z_{t+1}=(ac)^{-\gamma-t}(z+y)(ac)^{\gamma+t}k$. Тогда

$$z_{t+1}=(ac)^{-(t-1)(\gamma+\frac{t}{2})}[y(ac)^{\gamma}k]\times[y(ac)^{\gamma+t}]...[y(ac)^{\gamma+t}k]\ x[y(ac)^{\gamma+t}]...[y(ac)^{\gamma+t}k]. \quad (11)$$

Покажем это методом математической индукции по определению

$$z_2=(ac)^{-\gamma-1}(z_1y)(ac)^{\gamma+1}k=(ac)^{-2\gamma-1}[y(ac)^{\gamma}k][y(ac)^{\gamma+1}k].$$

Предположим, что $z_t=(ac)^{-t(\gamma+t-\frac{1}{2})}[y(ac)^{\gamma}k]...[y(ac)^{\gamma+t-1}k]$. Тогда

$$z_{t+1}=(ac)^{-\gamma-i}(z+y)(ac)^{\gamma+t}=(ac)^{-(t+1)(\gamma+t/2)}[y(ac)^{\lambda}k]...[y(ac)^{\gamma+t}k].$$

Редуцированная форма каждой из квадратных скобок $[y(ac)^{\gamma+i}k]$ правой части равенства (11) имеет вид

$$dadau_2...u_{m-1}bad(ac)^{\gamma+i-1}ab\nu_2...\nu_{n-1}a. \quad (12)$$

Выражение (12) имеет один вложенный *в*-промежуток длины $(2,2\gamma+2i)$, и по выбору γ число факторов в каждом другом *в*-сегменте меньше, чем γ. Первый фактор из (12) есть d, а последний фактор есть a. Также последний фактор из $(ac)^{-(t+1)(\gamma+t/2)}$ есть a. Таким образом, редуцированная форма (11) получается сопоставлением $(ac)^{(t+1)(\gamma+t/2)}$ и редуцированной формы каждой из квадратных скобок. Отсюда $Dz_{t+1}(2,2\gamma+2i)=1$; $i=0,1,2,...,t$, и $Dz_{t+1}(2\gamma+2i,2)=0$ по выбору γ. Таким образом, $\pi(z_{t+1})\ge t+1$ для любого целого $t\ge 1$.

Доказательство основной теоремы завершено.

Список литературы

1 *Griffiths H.B.* A note on commentators free product/-Proc // Cambridge Phil. Soc, 100. — 2000. — P. 245–262.

2 *Ito N.* Two generator discrete free products // Math Z. — 154. — 2010. — P. 87–92.

3 *Thompson R.J.* The order problem and the product sixth-groups // Glasgow Math. J. — 51. — 2010. — P. 375–381.

4 *Takahashi M.* On partitions of free products of groups // Osaka Math. J. — 67. — 2010. — P. 19–51.

В.С.Молдағалиев, Б.Б.Бақтығалиев

Шексіз диэдралды топтың бір қасиеті туралы

Қазіргі кезде топтық комбинаторика теориясындағы кіші қысқарту теориясын зерттеу маңызды болып табылады. Мақалада тривиалды емес еркін сөздің шексіз диэдралды тобымен сәйкестігі туралы теорема және оның дәлелдемесі берілді. Атап айтқанда, тривиалды емес еркін көбейтінді әрбір медиандық сөз үшін параболалық немесе эллипстік болуы диэдралды топтың шексіздігінен тәуелді екендігі толық қарастырылды.

V.S.Muldagaliyev, B.B.Baktygaliyev

About one property of infinite dihedral groups

Currently, the theory of small reduction sin combinatorial group theory is presented as unified theory. The articles discusses the theorem of matching of non-trivial free product of word with infinite dihedral group, and its proof. A non-trivial free product is parabolic or elliptical median for each word, regardless of the infinite dihedral group.

References

1 Griffiths H.B. *Cambridge Phil. Soc*, 100, 2000, p. 245–262.

2 Ito N. *Math Z*, 154, 2010, p. 87–92.

3 Thompson R.J. *Glasgow Math. J.*, 51, 2010, p. 375–381.

4 Takahashi M. *Osaka Math. J.*, 67, 2010, p. 19–51.