УДК 517.518.235

Г.Ш.Искакова

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
(E-mail: orumbayevan@mail.ru)

О многовесовом анизотропном неравенстве вложения

В статье доказаны теоремы вложения одного многовесового многопараметрического пространства Соболева для весов общего типа на областях с произвольной геометрией. Получены условия на весовые функции ρ_i $(i=1,...,n)$, υ и ω, при которых справедливо неравенство вложения $\left(\int_G |D^\alpha f|^q\,\omega\right)^{1/q} \le C\left(\sum_{i=1}^n\left(\int_G |D^{l_i} f|^{p_i}\,\rho_i\right)^{1/p_i} + \left(\int_G |f|^{p_0}\,\upsilon\right)^{1/p_0}\right)$.

Ключевые слова: анизотропное, многовесовое, многопараметрическое.

Пусть G — область в R^n, $l=(l_1,...,l_n)$, $\alpha=(\alpha_1,..,\alpha_n)$ — векторы с целыми координатами $l_i>0$, $\alpha_i\ge 0$.

Ниже нами будут использованы обозначения для

$$x=(x_i)=(x_1,\dots,x_n)\in(-\infty,+\infty)^n,\ y=(y_i)\in(0,+\infty]^n,\ \lambda=(\lambda_i)\in(0,+\infty)^n,\ t\in(0,+\infty).$$

Пусть $x\le y,\ x<y$ — запись покоординатного сравнения,

$$\lambda x=(\lambda_i x_i),(\lambda,x)=\sum_1^n\lambda_i x_i;$$

$$\frac{x}{y}=x\ :\ y=\left(\frac{x_i}{y_i}\right),\ \frac{1}{y}=\left(\frac{1}{y_i}\right),\ |\lambda|=\sum_1^n\lambda_i,\ t^\lambda=(t^{\lambda_i});$$

$$|x|_\lambda=\max_{1\le i\le n}|x_i|^{1/\lambda_i},\ \ 1=(1),\ \infty=(+\infty).$$

Для $x\in R^n$, множеств E, $F\subset R^n$ и $\lambda\in(0,+\infty)^n$ пусть

$$x\pm\lambda E=\{y\ :\ y=x\pm\lambda z,\ z\in E\},\ E\pm F=\{z\ :\ z=x\pm y,\ x\in E,\ y\in F\}.$$

Пусть $Q_0=(-1,1)^n$, область $G\subset R^n$,

$$G\left(\frac{1}{\lambda},t\right)=\{x\ :\ x=y+\left(\frac{t}{2}\right)^\lambda Q_0\}\subset G;$$

$$G_t=\{x\ :\ x\in G, dist(x,\partial G)>t\}.$$

Пусть далее $l\in N^n,\alpha\in Z^n,\alpha\ge 0$.

$$Q=Q_d=Q_d(x)\overset{\text{def}}{=}\{y\in R^n\ :\ |y_i-x_i|<d/2,\ i=1,\dots,n\}=Q_{(2d,\lambda)}(x)$$

при $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_n)$, $\lambda_1=...=\lambda_n=1$. Положим

$$\tau(x)\ \overset{\text{def}}{=}\ \min\left(1,\ \sup_{d>0}\{d\ :\ 2Q_d(x)\subset G\}\right),$$

$$Q(x)=\tfrac{1}{2}Q_{\tau(x)}(x),$$

и пусть $I_\tau^n=\bigcup_{x\in G}\{Q\ :\ Q\subset Q(x)\}$.

Через $\upsilon(Q),\tilde{\rho}_i(Q),|Q|$ будут обозначаться соответственно $\int_Q\upsilon^{1-r'}$, $\int_Q\rho_i^{1-p_i'}$, $\int_Q dx$. Для мультииндекса $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ $|\alpha|=\sum_{i=1}^n\alpha_i$, , для $x\in R^n$

$$|x|=\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2};$$

$$B(x;r)=\{y\in R^n\ :\ |y-x|<r\}.$$

Через $L_{p\upsilon}(G)$ будет обозначаться весовое лебегово пространство с нормой

$$|f;L_{p\upsilon}(G)|=\left(\int_G |f|^p\ \upsilon\right)^{1/p}.$$

Ниже запись $A<<B$ будет означать, что $A\le cB$.

Определение 1 ([1]). Область G будем называть областью с условием гибкого λ-рога (гибкого конуса при $\lambda_1=\ldots=\lambda_n$), если при некоторых $\delta_0\in(0,1]$, $T\in(0,+\infty)$ для $\forall x\in G$ существует кривая $\rho(t^\lambda)=(\rho_1(t^{\lambda_1}),\ldots,\rho_n(t^{\lambda_n}))=\rho(t^\lambda,x)$, $0\le t\le T$, со следующими свойствами:

(а) для всех $i\in\{1,\ldots,n\}$ $\rho_i(u)$ абсолютно непрерывна на $[0,T^{\lambda_i}]$; $\left|\rho_i'(u)\right|\le 1$ для п.в. $t\in[0,T]$;

(б) $\rho(0)=0,\ x+V(\lambda,x,\delta_0)=x+\cup_{0<t\le T}[\rho(t^\lambda)+t^\lambda\delta_0^\lambda Q_0]\subset G.$

Положим при этом $T(G,\lambda,\delta_0)=\sup T$, где верхняя грань берется по всем T, для которых имеют место перечисленные свойства.

Лемма 1 ([2]). Пусть $0<\varepsilon=\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}<1,\ \lambda=(\lambda_1,...,\lambda_n),\ \lambda_i>0$. Тогда из семейства параллелепипедов $\{\varepsilon_1^\lambda Q(x),\ x\in G\}$ можно извлечь B-покрытие $\{\hat{Q}^j\}$ множество G параллелепипедами $\hat{Q}^j=\varepsilon_1^\lambda Q(x^j)$. При этом семейство $\{\tilde{Q}^j=\varepsilon_2^\lambda Q(x^j)\}$ также образует B-покрытие G. Кратности покрытия $\{\hat{Q}^j\}$, $\{\tilde{Q}^j\}$ зависят соответственно только от n,ε_1,λ n,ε_2,λ.

Лемма 2 ([2]). Пусть $f\in L_{p,\upsilon}$. Тогда имеет место оценка

$$\int_{G_R}\left|Tf\right|^q d\mu\le(2\hat{\kappa}_2)^q\sum_{j\in J}\int_{\hat{Q}^j}\left(\int_{Q(x^j)}|k(x,y)f(y)|\,dy\right)^q\omega(x)dx+$$

$$+2^q\hat{\kappa}_2^q\left\|f;L_{p,\upsilon}\right\|^q\int_{G^j}\left(\int_{G\setminus c_0^\lambda\hat{Q}(x^j)}|k(x,y)|^{p'}\,\tilde{\upsilon}(y)dy\right)^{q/p'}\omega(x)dx,$$

где $c_0=2\eta$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\gamma=l-\left|\alpha\right|-n<0$.

Теорема 1. Пусть $1<p_i\le q<\infty$ $(i=0,1,...,n)$, $\gamma=l-|\alpha|-n<0$, и пусть веса ρ_i $(i=1,...,n)$, υ и ω на G удовлетворяют условиям

$$A_0=A_{pq}^{(0)}(\upsilon;\omega)=\sup_{Q\in I_\tau^n}\ \tilde{\upsilon}(Q)^{1/p'}\left(\int_Q\tau(x)^{-q(l-\gamma)}\omega(x)dx\right)^{1/q}<\infty;$$

$$B_0=B_{pq}^{(0)}(\upsilon;\omega)=\left(\int_G\tau(x)^{-q(l-\gamma|)}\omega(x)\tilde{\upsilon}(Q(x))^{q/p'}dx\right)^{1/q}<\infty.$$

Для $i\in\{1,...,n\}$

$$A_i=A_{p_iq}^{(i)}(\rho_i;\omega)=\sup_{Q\in I_\tau^n}\left\{\upsilon rai\sup_{y\in Q}\left(\int_{\hat{Q}}\left|y-x\right|^{q\gamma}\omega(x)dx\right)^{1/q}\tilde{\rho}_i(Q)^{1/p_i'}\right\}<\infty;$$

$$B_i=B_{p_iq}^{(i)}(\rho_i;\omega)=\left(\int_G\tau(x)^{\gamma q}\tilde{\rho}_i(Q(x))^{q/p_i'}\omega(x)dx\right)^{1/q}<\infty.$$

Тогда имеет место вложение

$$\left(\int_G|D^\alpha f|^q\ \omega\right)^{1/q}\le C\left(\sum_{i=1}^n\left(\int_G|D^{l_i}f|^{p_i}\ \rho_i\right)^{1/p_i}+\left(\int_G|f|^{p_0}\ \upsilon\right)^{1/p_0}\right)$$

с точной постоянной

$$C \le \sum_{i=0}^{n} (A_i + B_i).$$

Доказательство. Рассмотрим представление [1; 17] и вытекающие из него оценки

$$\left|f^{(\alpha)}(x)\right| \le c_1 \tau(x)^{-n-|\alpha|} \int_{Q(x)} \left|f(y)\right| dy + c_2 \sum_{i=1}^{n} \int_0^{T_x} t^{\gamma-1} \int_{2\delta Q_t(x)} \left|D_i^l f(y)\right| \left|\kappa_i^{(\alpha)}\left(\frac{y-x}{t}, 1, 1\right)\right| dy dt \le \tag{1}$$

$$\le c_1 \tau(x)^{-n-|\alpha|} \int_{Q(x)} \left|f(y)\right| dy + c_2 \sum_{i=1}^{n} \int_{2\delta Q_t(x)} \left|D_i^l f(y)\right| \int_0^{T_x} t^{\gamma-1} H(\delta t - |y-x|) dt dy \le$$

$$\le c_3 \left(\tau(x)^{-n-|\alpha|} T_0(|f|)(x) + \sum_{i=1}^{n} T_1(|D_i^l f|)(x)\right),$$

где $c_3 = \max(c_1, c_2) = c(\alpha, l, n, p, q)$, а

$$T_i g(x) = \int_G k_i(x,y) g(y) dy, \quad i = 0,1,$$

$$k_0(x,y) = \chi(x,y), \quad k_1(x,y) = \chi(x,y) |y-x|^{\gamma}.$$

В силу (1)

$$\left|f^{(\alpha)}(x); L_{q\omega}\right| \le_3 \left|T_0 f; L_{q\omega_0}\right| + c_3 \sum_{i=1}^{n} \left|T_1(|D_i^l f|)(x); L_{p_i, \rho_i}\right|, \tag{2}$$

где $\omega_0(x) = \tau(x)^{-q(n+|\alpha|)} \omega(x)$. Оценка нормы $\left|T_0 f; L_{q\omega_0}\right|$ приведена при доказательстве теоремы в [3]. Мы имеем из (15–17)

$$\left|T_0 f; L_{q\omega_0}\right| \le (2\hat{k}_2)^q \, |f; L_{p_0 \upsilon}|^q \left(\hat{k}_2 A_0^q + B_0^q\right). \tag{3}$$

Для оператора T_1 и $g \in L_{ps}$ имеем

$$\int_{G_R} |T_1 g|^q \, \omega(x) dx \le (2\hat{k}_2)^q \left(S_1^{(1)}(\omega; R) + S_2^{(1)}(\omega; R)\right), \tag{4}$$

где

$$S_1^{(1)}(\omega; R) = \sum_j \int_{\hat{Q}^j} \left(\int_{Q^j} k_1(x,y) |g(y)| dy\right)^q \omega(x) dx.$$

Из обобщенного неравенства Минковского следует, что

$$\int_{\hat{Q}^j} \left(\int_{Q^j} k_1(x,y) |g(y)| dy\right)^q \omega(x) dx = \left|\int_{Q^j} k_1(\cdot, y) |g(y)| dy; L_{q\omega}(\hat{Q}^j)\right|^q \le$$

$$\le \left(\int_{Q^j} \left|k_1(\cdot, y) |g(y)| dy; L_{q\omega}(\hat{Q}^j)\right| dy\right)^q = \tag{5}$$

$$= \left[\int_{Q^j} |g(y)| \rho^{1/p}(y) \rho^{-1/p}(y) \left(\int_{\hat{Q}^j} \left|k_1(x,y)\right|^q \omega(x) dx\right)^{1/q} dy\right]^q \le$$

$$\le \left[\int_{Q^j} \tilde{\rho}(y) \left(\int_{\hat{Q}^j} \left|k_1(x,y)\right|^q \omega(x) dx\right)^{p'/q}\right]^{q/p'} \left(\int_{Q^j} |g(y)|^p \rho(y) dy\right)^{q/p} \le$$

$$\le \left[\tilde{\rho}(Q^j)^{1/p'} \operatorname*{vrai\,sup}_{y \in Q^j} \left(\int_{\hat{Q}^j} \left|y-x\right|^{q(l-|\alpha|-n)} \omega(x) dx\right)^{1/q}\right]^q \left(\int_{Q^j} |g(y)|^p \rho(y) dy\right)^{q/p}.$$

Из (5) следует, что для любого $R > 0$

$$S_1^{(1)}(\omega; R) \le \left(A_{pq}(\rho; \omega)\right)^q \left(\sum_j \int_{\hat{Q}^j} |g(y)|^p \rho(y) dy\right)^{q/p} \le$$

$$\le k_2 \left(A_{pq}(\rho; \omega)\right)^q |g; L_{p\rho}|^q. \tag{6}$$

Второе слагаемое в правой части (4)

$$S_2^{(1)}(\omega;R)=\left|g;L_{p\rho}\right|^q\int_G\left(\int_{G\setminus 2\eta Q(x)}|k_1(x,y)|^p\,\tilde\rho(y)dy\right)^{q/p'}\omega(x)dx=$$

$$=\left|g;L_{p\rho}\right|^q\int_G\left(\int_{Q(x)\setminus 2\eta Q(x)}|y-x|^{p'(l-|\alpha|-n)}\,\tilde\rho(y)dy\right)^{q/p'}\omega(x)dx.$$

Если $y\notin 2\eta Q(x)$, то найдется $i=\{1,2,...,n\}$, для которого $|y_i-x_i|\geq\eta\tau(x)$, откуда оценки $\left|y-x\right|\geq\eta\tau(x)$ и

$$S_2^{(1)}(\omega;R)\leq\eta^{\gamma q}\int_G\tau(x)^{q(l-|\alpha|-n)}\,\tilde\rho(Q(x))^{q/p'}\,\omega(x)dx\times\left|g;L_{p\rho}\right|^q=$$

$$=\left(\eta^\gamma B_{pq}(\rho;\omega)\right)^q\left|g;L_{p\rho}\right|^q. \tag{7}$$

В силу (4), (6), (7) имеем

$$|T_1(|D_i^l f|);L_{q\omega}|\leq 2^{1+1/q}\kappa_2\left(k_2^{1/q}A_{p_iq}(\rho_i;\omega)+\eta^\gamma B_{p_iq}(\rho_i;\omega)\right)|D_i^l f;L_{p_i\rho_i}|.$$

В итоге, обращаясь к (3), а затем к (2), получим окончательную оценку. Теорема доказана.

Список литературы

1 *Бесов О.В.* Интегральные представления функций и теоремы вложения для области с условием гибкого рога // Тр. Математического ин-та АН СССР. — 1984. — Т. 170. — С. 12–29.

2 *Кусаинова Л.К.* Об ограниченности одного класса операторов в весовых пространствах Лебега // Труды Междунар. конф. — Семипалатинск, 2003. — С. 94, 95.

3 *Искакова Г.Ш.* Об одном многовесовом анизотропном неравенстве вложения // Вестн. Караганд. ун-та, сер. Математика. — 2014. — № 1 (73). — С. 103–108.

Г.Ш.Ысқақова

Көпсалмақты анизотропты енгізу теңсіздігі жөнінде

Мақалада көпсалмақты көп параметрлі Соболев кеңістігін кез келген геометриялы облыста енгізу теоремасы дәлелденген. ρ_i $(i=1,...,n)$, υ және ω салмақты функциялары үшін $\left(\int_G|D^\alpha f|^q\,\omega\right)^{1/q}\leq C\left(\sum_{i=1}^n\left(\int_G|D^{l_i}f|^{p_i}\,\rho_i\right)^{1/p_i}+\left(\int_G|f|^{p_0}\,\upsilon\right)^{1/p_0}\right)$ енгізу теңсіздігі орындалатындай шарттар алынған.

G.Sh.Iskakova

About multigravimetric anisotropic inequality of investment

Embedding theorems of multi-weighted multi-parametric Sobolev spaces on domains with arbitrary shapes are obtained. Conditions on weight functions, ρ_i $(i=1,...,n)$, υ and ω at which the inequality of an investment is fair are received $\left(\int_G|D^\alpha f|^q\,\omega\right)^{1/q}\leq C\left(\sum_{i=1}^n\left(\int_G|D^{l_i}f|^{p_i}\,\rho_i\right)^{1/p_i}+\left(\int_G|f|^{p_0}\,\upsilon\right)^{1/p_0}\right).$

References

1 Besov O.V. *Works of Mathematical college AN SSSR*, 1984, 170, p. 12–29.

2 Kusainova L.K. *Works of the international conference*, Semipalatinsk, 2003, p. 94, 95.

3 Iskakova G.Sh. Bull. of KSU, ser. Mathematics, 2014, 1 (73), p. 103–108.