УДК 35В10

Б.Ж.Мухамбетова[1], Ж.А.Сартабанов[2], А.А.Кульжумиева[1]

[1]Западно-Казахстанский государственный университет им. М.Утемисова, Уральск;
[2]Актюбинский региональный государственный университет им. К.Жубанова
(E-mail: abaibotagoz@mail.ru)

Многопериодические решения систем уравнений с одним квазилинейным дифференциальным оператором в частных производных первого порядка

В статье исследованы вопросы о существовании и единственности решения начальной и многопериодической задачи для систем уравнений с квазилинейным дифференциальным оператором, векторные поля у которого являются линейными относительно искомых функций. Система, в частности, в одномерном случае обращается в уравнение Хопфа, которое характеризует распространение волн вдоль оси. Авторами установлены достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для системы и многопериодического решения системы по временным переменным.

Ключевые слова: начальная задача, многопериодическая задача, квазилинейный дифференциальный оператор.

Линейный однородный относительно частных производных по τ, t, ξ дифференциальный оператор

$$D=\frac{\partial}{\partial\tau}+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial t_j}+\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{n}a_{jk}x_k\frac{\partial}{\partial\xi_j}\equiv\frac{\partial}{\partial\tau}+\left\langle e,\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle+\left\langle Ax,\frac{\partial}{\partial\xi}\right\rangle;$$

$$\tau\in(-\infty,+\infty)=R,\ \ t=(t_1,......,t_m)\in R\times......\times R=R^m,\ \ \xi=(\xi_1,....,\xi_l)\in R\times...\times R=R^m;$$

$$x = (x_1, ..., x_n), \ \frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, ..., \frac{\partial}{\partial t_m}\right), \ \frac{\partial}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, ..., \frac{\partial}{\partial \xi_l}\right),$$

где $x = x(\tau, t, \xi) - n$ — вектор-функция; a_{jk} — постоянные, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, l}$, $e = (1, \ ..., \ 1)$ — вектор; $A = \left[a_{jk}\right] - 1 \times n$ -матрица, $\langle , \rangle$ — знак скалярного произведения.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений относительно вектор-функции $x = x(\tau, t, \xi)$ вида

$$Dx = Bx, \tag{1}$$

где $B = [b_{ij}]$ — постоянная неособенная $n \times n$ -матрица, $\det B \neq 0$.

Для системы (1) имеем систему характеристических уравнений

$$\frac{dt}{d\tau} = e; \tag{2_1}$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = Ax; \tag{2_2}$$

$$\frac{dx}{d\tau} = Bx. \tag{2_3}$$

Из вектор-уравнения (2_3) имеем

$$x = \exp[B(\tau - \tau_0)]x_0, \tag{3_3}$$

следовательно, в силу (2_2) получим

$$\xi = \xi_0 + AB^{-1}\left\{\exp[B(\tau - \tau_0)] - E\right\}x_0 \tag{3_2}$$

и на основе (2_1) имеем

$$t = t_0 + e(\tau - \tau_0), \tag{3_1}$$

где $\tau_0 \in R^{;l}$, $\xi_0 \in R^1$, $x_0 \in R^n$ — постоянные элементы соответствующих пространств; E — единичная $n \times n$ -матрица.

Полные интегралы характеристических систем (2_1)–(2_3) в силу (3_1)–(3_3) определяются вектор-функциями

$$h(\tau_0, \tau, t) = t - e(\tau - \tau_0); \tag{4_1}$$

$$\varphi(\tau_0, \tau, \xi, x) = \xi - AB^{-1}\{E - \exp[-B(\tau - \tau_0)]\}x; \tag{4_2}$$

$$\psi(\tau_0, \tau, x) = \exp[-B(\tau - \tau_0)]x, \tag{4_3}$$

которые определяются формальной перестановкой местами начальной и текущей точек (t_0, ξ_0, x_0) и (t, ξ, x), приняв τ за параметр с начальным значением τ_0.

Тогда общее решение системы (1) задается непрерывно дифференцируемой функцией $H(t, \xi, x)$ в неявной форме

$$H(t, \xi, x) = 0. \tag{5}$$

Чтобы решить задачу Коши для системы (1) с начальным условием

$$x\Big|_{\tau=\tau_0} = u(t, \xi) = u(t + q\omega, \xi) \in C_{t,\xi}^{(1,1)}(R^m \times R^l) \tag{1_0}$$

с непрерывно ω-периодической по t дифференцируемой ограниченной вектор-функцией $u(t, \xi)$ при $(t, \xi) \in R \times R^m$, в интегралах ($4_1$), ($4_2$), положив $\tau = \tau_0$ и обозначив полученные значения h, φ, ψ через $\overline{h}, \overline{\varphi}, \overline{\psi}$, имеем

$$t = \overline{h};$$

$$s = \overline{\varphi};$$

$$x = \overline{\psi},$$

где $u = (u_1, ..., u_n)$, $\left|u(t, \xi)\right| = \max\limits_{1 \le j \le n}\left|u_j(t, \xi)\right| \le 0$, $(t, \xi) \in R^m \times R^l, C = const > 0.$

Далее, в силу условия (1_0), получим

$$\overline{\psi} = u(\overline{h}, \overline{\varphi}),$$

и отсюда заменой $(\overline{h}, \overline{\varphi}, \overline{\psi})$ на (h, φ, ψ) имеем решение задачи (1)–(1_0) вида

$$\exp[-B(\tau-\tau_0)]x = u\left(t - e(\tau-\tau_0),\ \xi - AB^{-1}x + AB^{-1}\exp[-B(\tau-\tau_0)]x\right),$$

или

$$x = \exp[B(\tau-\tau_0)]\ u\left(t - e(\tau-\tau_0),\quad \xi - AB^{-1}\{E - \exp[-B(\tau-\tau_0)]\}\,x\right), \tag{6}$$

где E — единичная $n \times n$ -матрица.

Далее исследуем вопрос об однозначной разрешимости уравнения (6) неявного решения системы (1) относительно x при $\tau \geq \tau_0$ в классе ограниченных вместе с частными производными функциями по норме

$$\|x\ \| = \sup|x(\tau, t, \xi)|;$$

$$(\tau, t, \xi) \in R^+ \times R^m \times R^l, R^+ = (0, +\infty).$$

Для этого предположим, что начальная вектор-функция $u(t,\xi)$ и ее матрица Якоби $\dfrac{\partial u}{\partial \xi} = \left[\dfrac{\partial u_i}{\partial \xi_j}\right]_{1,1}^{n,1}$ ограничены при $(t,\xi) \in R^m \times R^l$:

$$\begin{gathered} |u(t,\xi)| \leq C; \\ \left|\frac{\partial u}{\partial \xi}(t,\xi)\right| \leq C; \\ (t,\xi) \in R^m \times R^l, C = const > 0, \end{gathered} \tag{7}$$

а у матрицы B все собственные значения $\lambda_j, j = \overline{1,n},$ имеют отрицательные действительные части

$$\mathrm{Re}\lambda_j = -\beta_j \geq -\beta, \quad j = \overline{1,n}, \quad \beta = const > 0. \tag{8}$$

Введем в рассмотрение оператор Q в виде

$$Qx = \exp[B(\tau-\tau_0)]u\left(t - e(\tau-\tau_0), \xi - AB^{-1}\{E - \exp[-B(\tau-\tau_0)]\}\,x\right) \tag{9}$$

с матрицей Якоби $J(x)$

$$\begin{gathered} J(x) \equiv \frac{\partial(Qx)}{\partial x} = -\exp[B(\tau-\tau_0)]\frac{\partial u}{\partial \xi}\left(t - e(\tau-\tau_0);\right. \\ \left.\xi - AB^{-1}\{E - \exp[-B(\tau-\tau_0)]\}\,x\right) AB^{-1}\{E - \exp[-B(\tau-\tau_0)]\}. \end{gathered} \tag{10}$$

При условиях (1_0), (7) и (8) легко иметь оценки

$$|\exp[B(\tau-\tau_0)| \leq be^{-\beta(\tau-\tau_0)}, \tau > \tau_0;$$

$$|Qx| \leq bce^{-\beta(\tau-\tau_0)}, \tau > \tau_0,$$

с некоторой постоянной $b > 0$.

Из соотношения (10) ясно, что при $|\tau - \tau_0| < \delta$ для достаточно малых значений $\delta = const > 0,$ в соответствии с теоремой о неявных функциях, можно добиться однозначной разрешимости уравнения (6) относительно x. Поскольку мы изучаем задачу о многопериодических решениях по $(\tau, t),$ то такая разрешимость локального характера нас не устраивает.

В связи с этим, чтобы обеспечить ограниченность матрицы Якоби (10) при $\tau \geq \tau_0,$ нам необходимо, например, потребовать независимости начальной функции и от пространственных переменных ξ:

$$x\Big|_{\tau=\tau_0} = u(t),\ \ u(t+q\omega) = u(t) \in C_t^{(1)}(R^m),\ q \in Z^m. \tag{1^0}$$

Тогда, в силу (10), имеем $J(x) = 0$ и из соотношения (6) вытекает решение

$$x(\tau, t) = \exp[B(\tau-\tau_0)]\quad u(t - e(\tau-\tau_0)), \tag{11}$$

удовлетворяющее оценке

$$|\ \ x(\tau,t)\ \ | \leq C\exp[-\beta(\tau-\tau_0)], \tau > \tau_0. \tag{12}$$

Заметим, что среди решений задач вида (1)–(1^0) система (1) имеет единственное ограниченное решение $x = 0$.

Таким образом, доказаны следующие теоремы локального и глобального характера по временным переменным (τ, t).

Теорема 1. Система (1) с постоянными матрицами A и B, $\det B \neq 0$ имеет решение неявного вида (6) с начальным условием (1_0), причем при условиях (7) и $|\tau - \tau_0| < \delta$ для достаточно малых значений $\delta = const > 0$ задача (1)–(1_0) имеет единственное явно определяемое решение.

Теорема 2. При любых постоянных матрицах A и B $\det B \neq 0$ система (1) с начальными условиями (1^0) имеет явно определенное единственное в $R \times R^m$ решение, причем $x = 0$ является единственным (θ, ω)-периодическим, а следовательно, ограниченным решением системы (1). При дополнительном условии (8) все решения (11) задачи (1)–(10) ограничены при $\tau > \tau_0$, $t \in R^m$ и удовлетворяют оценке (12).

2. Теперь рассмотрим систему вида

$$Dx = Bx + f(\tau, t), \tag{13}$$

где $f(\tau, t)$ — заданная (θ, ω)-периодическая, обладающая свойством гладкости порядка (0, 1) по $(\tau, t) \in R \times R^m$ n-вектор-функция

$$f(\tau + \theta, t + q\omega) = f(\tau, t) \in C_{\tau,t}^{(0,1)}(R \times R^m), \quad q \in Z^m. \tag{14}$$

Нетрудно убедиться проверкой, что при условии (8) вектор-функция

$$x^*(\tau, t) = \int_{-\infty}^{\tau} \exp[B(\tau - s)] f(s, h(s, \tau, t)) ds \tag{15}$$

при условии (14) является (θ, ω)-периодическим решением системы (13), где $h(\tau_0, \tau, t)$ — характеристики оператора (θ, ω) по временным переменным $t \in R^m$, определяемые соотношением (4_1).

Проведя аналогичные выводам формулы (4_3) исследования, имеем характеристики системы (13) относительно искомой вектор-функции x вида

$$\psi(\tau_0, \tau, t, x) = \exp[-B(\tau - \tau_0)] \cdot [x - x^*(\tau, t)], \tag{16}$$

где $x^*(\tau, t)$ — многопериодическая функция (15).

По методике вывода соотношения (4_2) имеем характеристики по пространственным переменным ξ вида

$$\psi(\tau_0, \tau, t, \xi, x) = \xi - AB^{-1}\{E - \exp[-B(\tau - \tau_0)]\} \cdot [x - x^*(\tau, t)]. \tag{17}$$

Следовательно, на основе (4_1), (16) и (17) определим общее решение x системы (13) в неявном виде:

$$H(h(\tau_0, \tau, t),\ \varphi(\tau_0, \tau, t, \xi, x),\ \psi(\tau_0, \tau, t)),$$

где $H(t, \xi, x)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая при $(t, \xi, x) \in R^m \times R^1 \times R^n$ функция.

Задача Коши для системы (13) с начальным условием (1_0) определяется из общего интеграла (17) путем выбора функции $H(t, \xi, x)$, соответствующей выводу формулы (6):

$$H(t, \xi, x) \equiv x + x_0^*(t) - u(t, \xi),$$

где $x_0^*(t) = x^*(\tau_0, t)$.

Следовательно, в силу (17) имеем

$$\exp[-B(\tau - \tau_0)][x - x^*(\tau, t)] + x_0^*(t - e(\tau - \tau_0)) =$$
$$= u(t - e(\tau - \tau_0), \xi - AB^{-1}\{E - \exp[-B(\tau - \tau_0)]\}[x - x^*(\tau, t)]).$$

Таким образом, окончательно имеем решение задачи Коши для системы (13) с начальным условием (1_0) в виде

$$x = x^*(\tau, t) + \exp[B(\tau - \tau_0)]\{-x_0^*(t - e(\tau - \tau_0)) +$$
$$+ u(t - e(\tau - \tau_0), \xi - AB^{-1}\{E - \exp[-B(\tau - \tau_0)]\}[x - x^*(\tau, t)])\}. \tag{18}$$

Полученные результаты можно сформулировать в виде следующих теорем.

Теорема 3. При любых постоянных матрицах A и B со свойством (8) и условии (14) начальная задача для системы (13) с условием (1_0) неявно разрешима в виде соотношения (18), причем при условии (7) она имеет единственное решение, явно определяемое при $|\ \tau-\tau_0\ |<\delta$ для достаточно малых значений $\delta = const > 0$, $(t,\xi)\in R^m \times R^l$.

Заметим, что вторая часть заключения теоремы 3 доказывается на основе теоремы о неявных функциях.

Теорема 4. При условиях теоремы 3 начальная задача для системы (13) с условием (1^0) явно однозначно разрешима, причем вектор-функция (15) является единственным (θ,ω)-периодическим решением системы (13) в классе её решений с начальными условиями вида (1^0).

Доказательство этой теоремы 4 следует из соотношения (18) с учетом условия (1^0). Чтобы получить (θ,ω)-периодическое решение достаточно положить

$$u(t) = x^*(0,t)$$

и решить начальную задачу с этим условием.

Заметим, что теоремы 3 и 4 можно обобщить, заменив условие (8) более общим условием

$$\mathrm{Re}\lambda_j = \beta_j \neq 0, \quad j=\overline{1,n},$$

для собственных чисел λ_j матрицы B.

Пример. Расмотрим скалярное уравнение

$$\frac{\partial x}{\partial\tau} + x\frac{\partial x}{\partial\tau} = -bx + f(\tau),$$

когда $b=0$, $f=0$, имеем известное из теории гидромеханики уравнение Хопфа

$$\frac{\partial x}{\partial\tau} + x\frac{\partial x}{\partial\tau} = 0,$$

которое имеет общее решение вида $H(\xi - x\tau) = 0$.

Очевидно, что задача Коши с условием $x=|_{\tau=0}=u(\xi)$ для заданного уравнения при $b>0$ имеет решение

$$x = x^*(\tau) + \exp(-b\tau)\ \ u(\xi - b^{-1}\{1-\exp(b\tau)\}[x - x^*(\tau)]),$$

где $x^*(\tau)$ имеет вид

$$x^*(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{-b(\tau-s)} f(s)ds.$$

Замечание. Данная статья выполнена на основе идей работ [1–5].

Список литературы

1 *Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А.* Периодические решения систем дифференциальных уравнений с многомерным временем. — Уральск: РИЦ ЗКГУ, 2013. — 168 с.

2 *Маутеева С.М., Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А.* Периодическое по многомерному времени решение квазилинейной системы D_e-уравнений с постоянными на диагонали коэффициентами // Поиск. — 2014. — № 2 (1). — С. 136–142.

3 *Аймичева Г.И., Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А.* Многопериодичность и квазипериодичность на характеристиках решений квазилинейных систем уравнений с одинаковым однородным дифференциальным оператором // Поиск. — 2014. — № 2 (1). — С. 142–147.

4 *Сартабанов Ж.А., Кульжумиева А.А., Мухамбетова Б.Ж.* Бір квазисызықты дербес туындылы теңдеулер жүйесінің базалық интегралдарының көппериодты шешімдер маңайындағы экспоненциалық өзгерісі: Сб. материалов междунар. науч.-практ. конф. «Таймановские чтения — 2014», 5 декабря 2014. г. — Уральск: РИЦ ЗКГУ, 2014. — С. 97, 98.

5 *Сартабанов Ж.А., Кульжумиева А.А., Мухамбетова Б.Ж.* Оценка базовых интегралов в окрестности многопериодического решения одной квазилинейной системы уравнений в частных производных первого порядка: Сб. междунар. науч. конф. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». — Алматы, 9–10 декабря 2014 г., КазНУ им. аль-Фараби. — С. 115, 116.

Б.Ж.Мұхамбетова, Ж.А.Сартабанов, А.А.Күлжұмиева

Бірінші ретті дербес туындылы бір дифференциалды операторлы квазисызықты теңдеулер жүйесінің көппериодты шешімдері

Бір квазисызықты дифференциалды операторлы теңдеулер жүйесінің көппериодты және жалғыз шешімдерінің бар болатындығы зерттелу үстінде. Берілген функцияға қатысты векторлы өріс сызықты болады. Жүйе осьтің айналасындағы толқынның таралуын бірөлшемді жағдайда көрсететін Хопф теңдеуіне айналады. Мақалада уақыт айнымалысы бойынша алынған жүйенің көппериодты шешімдері үшін және алғашқы шешімнің бар және жалғыз болатындығы үшін жеткілікті шарттар көрсетілген.

B.Zh.Muhambetova, Zh.A.Sartabanov, A.A.Kulzhumieva

Multiperiodic solutions of systems of equations with one quasi-linear differential operator in partial derivatives of the first order

The questions of the existence and uniqueness of solution of initial and multiperiodic problem for systems of equations with quasi-linear differential operator, which the vector fields are linear with respect to the given functions, is being investigated. The system, in particular, in the one-dimensional case becomes as Hopf equation, which describes the propagation of waves along the axis. In this work we establish sufficient conditions for the existence and uniqueness of solution of the initial problem for the system and multiperiodic solution of system for the time variables.

References

1 Kulzhumieva A.A., Sartabanov Zh.A. *Periodic solutions of systems of differential equations with multidimensional time*, Uralsk: RIC WKSU, 2013, 168 p.

2 Mauteeva S.M., Kulzhumieva A.A., Sartabanov Zh.A. *Poisk*, 2014, 2 (1), p. 136–142.

3 Aymicheva G.I. Kulzhumieva A.A., Sartabanov Zh.A. *Poisk*, 2014, 2 (1), p. 142–147.

4 Sartabanov Zh.A., Kulzhumieva A.A., Mukhambetova B.Zh. *Exponential changes in the multiperiod basic decisions odnoproizvodnyh integrals of quasi-linear equations. Collected materials of the international scientific-practical conference "Taymanovskie read*, 2014, 5, December, 2014, Uralsk: RIC WKSU, 2014, p. 97, 98.

5 Sartabanov Zh.A., Kulzhumieva A.A., Muhambetova B.Zh. *Evaluation of basic integrals in a neighborhood multiperiodic solutions to one quasilinear system of partial differential equations of the first order*. Collection of the International Scientific Conference «Theory of functions, functional analysis and their applications», Almaty, December, 9–10, 2014, Al-Farabi, The Kazakh National University. p. 115, 116.