УДК 517.443

А.Б.Муканов

*Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана*
*(E-mail: mukanov.askhat@gmail.com)*

# Преобразование Фурье и анизотропные пространства Лебега

В статье изучены интегральные свойства преобразований Фурье $\hat{f}(y)=\int_{Rn} f(x)e^{-txy}dx, n\geq 1,$ монотонных по каждой переменной функции *f*. В частности, получен многомерный аналог теоремы Харди-Литтлвуда о преобразовании Фурье монотонной функции.

*Ключевые слова:* преобразование Фурье, монотонные функции, анизотропные пространства Лебега.

## *Введение*

Хорошо известна классическая теорема Харди-Литтлвуда [1] о преобразовании Фурье монотонной функции.

*Теорема А.* Пусть $1<p<\infty$ и $f(x)$ — невозрастающая, неотрицательная на $(0,+\infty)$ функция, такая, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0.$ Пусть $\hat{f}(t)=\int_0^{+\infty} f(x)\cos txdx$ — косинус-преобразование Фурье функции *f*. Тогда верно следующее соотношение:

$$\left\|\hat{f}\right\|_{Lp(0,\infty)} \sim \left(\int_0^\infty x^{p-2} f(x)^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Всюду в статье через *C* будем обозначать положительную константу, которая в различных случаях может быть разной. Выражение $T\sim S$ означает, что существует такое *C*, что верно неравенство $CT\leq S\leq \frac{1}{C}T.$

В одномерном случае теорема А имеет множество обобщений. Для весовых пространств Лебега обобщения теоремы А были получены в работах [2–6]. Для пространств Лоренца теорему А обобщали в работах [3, 7, 8].

Основной целью данной статьи является получение многомерного аналога теоремы А.

Всюду в статье жирными буквами будем обозначать вектора. И все операции над векторами будут производиться покоординатно.

*Определение 1.* Пусть $1\leq p<\infty$. Анизотропным пространством Лебега $L_p\left(R^n\right)$ называется множество всех измеримых функций *f*, для которых

$$\|f\|_{L_p} := \left(\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(t_1,\ldots,t_n\right)\right|^{p_1}dt_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\ldots dt_n\right)^{\frac{1}{pn}}<\infty.$$

*Определение 2.* Будем говорить, что функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ принадлежит классу $E^n$, если

- $f$ — неотрицательная функция на $R^n$;
- $f(\varepsilon_1x_1,\varepsilon_2x_2,\ldots,\varepsilon_nx_n)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ для всех $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n),$

где

$$\varepsilon_i\in\{1,-1\}, i=1,2,\ldots,n;$$

- $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ не возрастает по каждой переменной на $R_+$, т.е.

$$f\left(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i^1,\ldots,x_n\right)\leq f\left(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i^2,\ldots,x_n\right)$$

для $0\leq x_i^2\leq x_i^1, 1\leq i\leq n;$

- $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to 0$ при $|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|\to\infty.$

Основным результатом статьи является следующая теорема.

*Теорема 1*. Пусть $1 < p < \infty$ и $f \in E^n$. Тогда $\left\|\hat{f}\right\|_{L_p} \sim J_p(f)$,

где

$$J_p(f) = \left( \int_0^\infty t_n^{p_n - 2} \ldots \left( \int_0^\infty t_1^{p_1 - 2} \left[ f\left(t_1, \ldots, t_n\right) \right]^{p_1} dt_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \ldots dt_n \right)^{\frac{1}{p_n}}.$$

*Замечание 1.* Для удобства мы докажем теорему 1 для случая $n = 2$. В общем случае рассуждения аналогичны. Отметим также, что для функций $f$ из $E^2$ верно равенство

$$\hat{f}(y_1, y_2) = 4\hat{f}_c(y_1, y_2) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty f(x_1, x_2) \cos x_1 y_1 \cos x_2 y_2 \, dx_1 \, dx_2.$$

*Вспомогательные утверждения*

Следующие неравенства Харди [9] и Минковского [10] будут часто использоваться.

*Лемма 1* (Харди). Пусть $\psi$ – неотрицательная измеримая функция на $(0, \infty)$, и пусть $1 \le p \le \infty$, $\alpha < \frac{1}{p'}$. Тогда

$$\left( \int_0^\infty \left[ t^\alpha \frac{1}{t} \int_0^t \psi(s) ds \right]^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \le C \left( \int_0^\infty [t^\alpha \psi(t)]^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1)$$

*Лемма 2* (Минковский). Пусть $1 \le p \le \infty$ и $f(x, y)$ — измеримая функция на $(X, \mu) \times (Y, \nu)$. Тогда верно неравенство

$$\left( \int_Y \left( \int_X |f(x, y)| d\mu(x) \right)^p d\nu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \le \int_X \left( \int_Y |f(x, y)|^p d\nu(y) \right)^{\frac{1}{p}} d\mu(x). \quad (2)$$

*Замечание 2.* Заметим, что при $0 < p < 1$ неравенство (1) верно для монотонных функций. Более того, это неравенство верно для квазимонотонных функций (см.[11]).

Также будем использовать следующую лемму [11].

*Лемма 3.* Пусть $f$ — неотрицательная, невозрастающая функция на $(0, \infty)$, и пусть $A > 0$, $0 < q < 1$. Тогда выполняется следующее неравенство:

$$\left( \int_0^A f(x) dx \right)^q \le C \int_0^A (f(x))^q x^{q-1} dx. \quad (3)$$

*Лемма* 1. Пусть $f \in E^2$. Тогда для всех $(y_1, y_2) \in R^2$ справедливо неравенство

$$\hat{f}(y_1, y_2) \le 36 \int_0^{\frac{1}{|y_2|}} \int_0^{\frac{1}{|y_1|}} f(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2. \quad (4)$$

*Доказательство.* Из условия 2) определения 2 класса $E^2$ следует, что достаточно доказать неравенство (4) для $y > 0$. Пусть $y = (y_1, y_2)$, $y_i > 0$, $i = 1{,}2$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
\hat{f}(y_1, y_2) &= 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(x_1, x_2) \cos x_1 y_1 \cos x_2 y_2 \, dx_1 \, dx_2 = \\
&= 4 \int_0^{\frac{1}{y_2}} \int_0^{\frac{1}{y_1}} f(x_1, x_2) \cos x_1 y_1 \cos x_2 y_2 \, dx_1 \, dx_2 + \\
&+4 \int_{\frac{1}{y_2}}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{y_1}} f(x_1, x_2) \cos x_1 y_1 \cos x_2 y_2 \, dx_1 \, dx_2 + \\
&+4 \int_0^{\frac{1}{y_2}} \int_{\frac{1}{y_1}}^{+\infty} f(x_1, x_2) \cos x_1 y_1 \cos x_2 y_2 \, dx_1 \, dx_2 + \\
&+4 \int_{\frac{1}{y_2}}^{+\infty} \int_{\frac{1}{y_1}}^{+\infty} f(x_1, x_2) \cos x_1 y_1 \cos x_2 y_2 \, dx_1 \, dx_2 = \\
&= I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
\end{aligned}$$

По второй теореме о среднем по второй переменной в $I_2$ получим

$$\begin{aligned} I_2 &= 4\int_0^{\frac{1}{y_1}}\left[\int_{\frac{1}{y_2}}^{+\infty} f(x_1,x_2)\cos x_2y_2\,dx_2\right]\cos x_1y_1\,dx_1 = \\ &= 4\int_0^{\frac{1}{y_1}}\left[f\left(x_1,\frac{1}{y_2}\right)\int_{\frac{1}{y_2}}^{\xi}\cos x_2y_2\,dx_2\right]\cos x_1y_1\,dx_1 = \\ &= 4\int_0^{\frac{1}{y_1}}\left[f\left(x_1,\frac{1}{y_2}\right)\frac{\sin y_2\xi-\sin 1}{y_2}\right]\cos x_1y_1\,dx_1. \end{aligned}$$

Значит,

$$|I_2| \le \frac{8}{y_2}\int_0^{\frac{1}{y_1}} f\left(x_1,\frac{1}{y_2}\right)dx_1 \le 8\int_0^{\frac{1}{y_2}}\int_0^{\frac{1}{y_1}} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2.$$

Аналогичным путем получим

$$|I_3| \le 8\int_0^{\frac{1}{y_2}}\int_0^{\frac{1}{y_1}} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2.$$

Применяя дважды теорему о среднем для $I_4$, получим

$$\begin{aligned} I_4 &= 4\int_{\frac{1}{y_2}}^{+\infty}\left[f\left(\frac{1}{y_1},x_2\right)\int_{\frac{1}{y_1}}^{\zeta}\cos x_1y_1\,dx_1\right]\cos x_2y_2\,dx_2 = \\ &= 4\int_{\frac{1}{y_2}}^{+\infty}\left[f\left(\frac{1}{y_1},x_2\right)\frac{\sin y_1\zeta-\sin 1}{y_1}\right]\cos x_2y_2\,dx_2 = \\ &= 4f\left(\frac{1}{y_1},\frac{1}{y_2}\right)\frac{\sin y_1\zeta-\sin 1}{y_1}\frac{\sin y_2\alpha-\sin 1}{y_2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|I_4| \le \frac{16}{y_1y_2} f\left(\frac{1}{y_1},\frac{1}{y_2}\right) \le 16\int_0^{\frac{1}{y_2}}\int_0^{\frac{1}{y_1}} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2.$$

Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned} |\hat{f}(y_1,y_2)| &\le |I_1|+|I_2|+|I_3|+|I_4| \le \\ &\le 36\int_0^{\frac{1}{y_2}}\int_0^{\frac{1}{y_1}} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2. \end{aligned}$$

*Доказательство теоремы 1.* Сначала покажем оценку сверху для $\|\hat{f}\|_{L_p}$. Из леммы 4 получим

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_{L_p} &\le C\left(\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\frac{1}{t_2}}\int_0^{\frac{1}{t_1}} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2\right]^{p_1}dt_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}}dt_2\right)^{\frac{1}{p_2}} = \\ &= C\left(\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\frac{1}{t_1}}\varphi(x_1,t_2)\,dx_1\right]^{p_1}dt_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}}dt_2\right)^{\frac{1}{p_2}}, \end{aligned}$$

где

$$\varphi(x_1,t_2) = \int_0^{\frac{1}{t_2}} f(x_1,x_2)\,dx_2.$$

Сделаем замену $z_1 = \frac{1}{t_1}$ и применим неравенство Харди (1) во внутреннем интеграле.

$$\|\hat{f}\|_{L_p} \le C\left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \left[\int_0^{\frac{1}{t_1}} \varphi(x_1,t_2)dx_1\right]^{p_1} dt_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}} dt_2\right)^{\frac{1}{p_2}} =$$

$$= C\left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \left[z_1^{-\frac{2}{p_1}} \int_0^{z_1} \varphi(x_1,t_2)\, dx_1\right]^{p_1} dz_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}} dt_2\right)^{\frac{1}{p_2}} \le$$

$$\le C\left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \left[z_1^{1-\frac{2}{p_1}} \varphi(z_1,t_2)\right]^{p_1} dz_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}} dt_2\right)^{\frac{1}{p_2}} =$$

$$= C\left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \left[z_1^{1-\frac{2}{p_1}} \int_0^{\frac{1}{t_2}} f(z_1,x_2)\, dx_2\right]^{p_1} dz_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}} dt_2\right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

Пусть $p_1 \ge 1$. Тогда из неравенства Минковского (2) вытекает

$$\|\hat{f}\|_{L_p} \le C\left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \left[z_1^{1-\frac{2}{p_1}} \int_0^{\frac{1}{t_2}} f(z_1,x_2)\, dx_2\right]^{p_1} dz_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}} dt_2\right)^{\frac{1}{p_2}} \le$$

$$\le C\left(\int_0^\infty \left(\int_0^{\frac{1}{t_2}} \left[\int_0^\infty \left(z_1^{1-\frac{2}{p_1}} f(z_1,x_2)\right)^{p_1} dz_1\right]^{\frac{1}{p_1}} dx_2\right)^{p_2} dt_2\right)^{\frac{1}{p_2}} =$$

$$= C\left(\int_0^\infty \left(\int_0^{\frac{1}{t_2}} \psi(x_2)\, dx_2\right)^{p_2} dt_2\right)^{\frac{1}{p_2}},$$

где

$$\psi(x_2) = \left[\int_0^\infty \left(z_1^{1-\frac{2}{p_1}} f(z_1,x_2)\right)^{p_1} dz_1\right]^{\frac{1}{p_1}}.$$

Снова, производя замену $\frac{1}{t_2}$ на $z_2$ и используя неравенство Минковского, получим

$$\|\hat{f}\|_{L_p} \le C\left(\int_0^\infty \left(z_2^{-\frac{2}{p_2}} \int_0^{z_2} \psi(x_2)dx_2\right)^{p_2} dz_2\right)^{\frac{1}{p_2}} \le$$

$$\le C\left(\int_0^\infty \left(z_2^{1-\frac{2}{p_2}} \psi(z_2)\right)^{p_2} dz_2\right)^{\frac{1}{p_2}} =$$

$$= C\left(\int_0^\infty \left(z_2^{1-\frac{2}{p_2}} \left[\int_0^\infty \left(z_1^{1-\frac{2}{p_1}} f(z_1,z_2)\right)^{p_1} dz_1\right]^{\frac{1}{p_1}}\right)^{p_2} dz_2\right)^{\frac{1}{p_2}} = J_{\mathbf{p}}(f).$$

Пусть теперь $0 < p_1 < 1$. Тогда из неравенства (3) следует

$$\|\hat{f}\|_{L_{\boldsymbol{p}}} \le C\left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \left[z_1^{1-\frac{2}{p_1}} \int_0^{\frac{1}{t_2}} f(z_1,x_2)dx_2\right]^{p_1} dz_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}} dt_2\right)^{\frac{1}{p_2}} \le$$

$$\le C\left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty z_1^{p_1-2}\left[\int_0^{\frac{1}{t_2}} (f(z_1,x_2))^{p_1} x_2^{p_1-1} dx_2\right] dz_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}} dt_2\right)^{\frac{1}{p_2}} =$$

$$= C\left(\int_0^\infty \left(\int_0^{\frac{1}{t_2}} \int_0^\infty z_1^{p_1-2}(f(z_1,x_2))^{p_1} x_2^{p_1-1}\, dz_1\, dx_2\right)^{\frac{p_2}{p_1}} dt_2\right)^{\frac{1}{q_2}}.$$

Заменим $\frac{1}{t_2}$ на $z_2$:

$$\|\hat{f}\|_{L_{\boldsymbol{p}}} \le C\left(\int_0^\infty \left(z_2^{-\frac{2p_1}{p_2}} \int_0^{z_2} \int_0^\infty z_1^{p_1-2} f^{p_1}(z_1,x_2) x_2^{p_1-1}\, dz_1\, dx_2\right)^{\frac{p_2}{p_1}} dz_2\right)^{\frac{1}{p_2}} =$$

$$= C\left(\int_0^\infty \left(z_2^{-\frac{2p_1}{p_2}+1} \frac{1}{z_2}\int_0^{z_2} \xi(x_2)\, dx_2\right)^{\frac{p_2}{p_1}} dz_2\right)^{\frac{p_1}{p_2}\frac{1}{p_1}},$$

где

$$\xi(x_2) = \int_0^\infty z_1^{p_1-2}(f(z_1,x_2))^{p_1} x_2^{p_1-1}\, dz_1$$

— квазимонотонная функция (так как функция $\xi(x_2)x_2^{-(p_1-1)}$ не возрастает). Из неравенства Харди следует

$$\|\hat{f}\|_{L_{\boldsymbol{p}}} \le C\left(\int_0^\infty \left(z_2^{-\frac{2p_1}{p_2}+1} \frac{1}{z_2}\int_0^{z_2} \xi(x_2) dx_2\right)^{\frac{p_2}{p_1}} dz_2\right)^{\frac{p_1}{p_2}\frac{1}{p_1}} \le$$

$$\le C\left(\int_0^\infty \left(z_2^{-\frac{2p_1}{p_2}+1} \xi(z_2)\right)^{\frac{p_2}{p_1}} dz_2\right)^{\frac{p_1}{p_2}\frac{1}{p_1}} =$$

$$= C\left(\int_0^\infty \left(z_2^{-\frac{2p_1}{p_2}+1} \int_0^\infty z_1^{p_1-2}(f(z_1,z_2))^{p_1} z_2^{p_1-1} dz_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}} dz_2\right)^{\frac{p_1}{p_2}\frac{1}{p_1}} =$$

$$= CJ_{\boldsymbol{p}}(f).$$

Установим теперь оценку снизу для $\|\hat{f}\|_{L_{\boldsymbol{p}}}$. Пусть $\mathbf{z} = (z_1, z_2) > 0$, тогда

$$H(\mathbf{z}) := \int_0^{z_2}\int_0^{z_1}\int_0^{u_2}\int_0^{u_1} \hat{f}(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2\, du_1\, du_2 =$$
$$= \int_0^{z_2}\int_0^{z_1}\int_0^{u_2}\int_0^{u_1}\int_0^\infty\int_0^\infty f(t_1,t_2)\cos x_1t_1 \cos x_2t_2\, dt_1dt_2\, dx_1dx_2\, du_1du_2 =$$
$$= \int_0^{z_2}\int_0^{z_1}\int_0^\infty\int_0^\infty f(t_1,t_2)\int_0^{u_2}\int_0^{u_1} \cos x_1t_1 \cos x_2t_2\, dx_1dx_2\, dt_1dt_2\, du_1du_2 =$$
$$= \int_0^{z_2}\int_0^{z_1}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(t_1,t_2)}{t_1t_2} \sin t_1u_1 \sin t_2u_2\, dt_1\, dt_2\, du_1\, du_2 =$$
$$= \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(t_1,t_2)}{t_1t_2}\int_0^{z_2}\int_0^{z_1} \sin t_1u_1 \sin t_2u_2\, du_1\, du_2\, dt_1\, dt_2 =$$
$$= 2\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(t_1,t_2)}{t_1^2t_2^2}\sin^2\frac{t_1z_1}{2}\sin^2\frac{t_2z_2}{2}\, dt_1\, dt_2 \ge 0.$$

Значит,

$$
\begin{aligned}
H\left(\frac{\pi}{2x_1},\frac{\pi}{2x_2}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{2x_2}}\int_0^{\frac{\pi}{2x_1}}\int_0^{u_2}\int_0^{u_1}\left|\hat{f}(y_1,y_2)\right|dy_1\,dy_2\,du_1\,du_2 \geq \\
&\geq \left|\int_0^{\frac{\pi}{2x_2}}\int_0^{\frac{\pi}{2x_1}}\int_0^{u_2}\int_0^{u_1}\hat{f}(y_1,y_2)\,dy_1\,dy_2\,du_1\,du_2\right| = \\
&= 2\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(t_1,t_2)}{t_1^2t_2^2}\sin^2\frac{\pi t_1}{4x_1}\sin^2\frac{\pi t_2}{4x_2}\,dt_1\,dt_2 \geq \\
&\geq C\int_{\frac{x_2}{2}}^{2x_2}\int_{\frac{x_1}{2}}^{2x_1}\frac{f(t_1,t_2)}{t_1^2t_2^2}\,dt_1\,dt_2 \geq C\frac{f(2x_1,2x_2)}{4x_1x_2}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Обозначим $h(u_1,u_2)=\int_0^{u_2}\int_0^{u_1}\left|\hat{f}(y_1,y_2)\right|dy_1\,dy_2$. Тогда из (5) следует

$$
J_{\boldsymbol{p}}(f)=\left(\int_0^{\infty}t_2^{p_2-2}\left(\int_0^{\infty}t_1^{p_1-2}[f(t_1,t_2)]^{p_1}dt_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}}dt_2\right)^{\frac{1}{p_2}}\leq
$$

$$
\leq C\left(\int_0^{\infty}t_2^{p_2-2}\left(\int_0^{\infty}t_1^{p_1-2}\left[t_1t_2\int_0^{\frac{\pi}{t_2}}\int_0^{\frac{\pi}{t_1}}h(u_1,u_2)\,du_1du_2\right]^{p_1}dt_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}}dt_2\right)^{\frac{1}{p_2}}=
$$

$$
=C\left(\int_0^{\infty}t_2^{2p_2-2}\left(\int_0^{\infty}\left[t_1^{2-\frac{2}{p_1}}\int_0^{\frac{\pi}{t_2}}\int_0^{\frac{\pi}{t_1}}h(u_1,u_2)\,du_1du_2\right]^{p_1}dt_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}}dt_2\right)^{\frac{1}{p_2}}.
$$

Заменим $\frac{\pi}{\mathrm{t}}$ на z и применим неравенство Харди:

$$
J_{\boldsymbol{p}}(f)\leq C\left(\int_0^{\infty}z_2^{-2p_2}\left(\int_0^{\infty}\left[z_1^{-2}\int_0^{z_2}\int_0^{z_1}h(u_1,u_2)du_1du_2\right]^{p_1}dz_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}}dz_2\right)^{\frac{1}{p_2}}\leq
$$

$$
\leq C\left(\int_0^{\infty}z_2^{-2p_2}\left(\int_0^{\infty}\left[z_1^{-1}\int_0^{z_2}h(z_1,u_2)du_2\right]^{p_1}dz_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}}dz_2\right)^{\frac{1}{p_2}}=
$$

$$
=C\left(\int_0^{\infty}z_2^{-2p_2}\left(\int_0^{\infty}\left[\int_0^{z_2}z_1^{-1}h(z_1,u_2)du_2\right]^{p_1}dz_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}}dz_2\right)^{\frac{1}{p_2}}.
$$

Применяя неравенство Минковского, получим

$$
J_{\boldsymbol{p}}(f)\leq C\left(\int_0^{\infty}z_2^{-2p_2}\left(\int_0^{z_2}\left[\int_0^{\infty}(z_1^{-1}h(z_1,u_2))^{p_1}dz_1\right]^{\frac{1}{p_1}}du_2\right)^{p_2}dz_2\right)^{\frac{1}{p_2}}=
$$

$$
=C\left(\int_0^{\infty}\left(z_2^{-2}\int_0^{z_2}\left[\int_0^{\infty}(z_1^{-1}h(z_1,u_2))^{p_1}dz_1\right]^{\frac{1}{p_1}}du_2\right)^{p_2}dz_2\right)^{\frac{1}{p_2}}.
$$

Из неравенства Харди получим

$$
J_{\boldsymbol{p}}(f)\quad\leq C\left(\int_0^{\infty}\left(z_2^{-1}\left[\int_0^{\infty}(z_1^{-1}h(z_1,z_2))^{p_1}dz_1\right]^{\frac{1}{p_1}}\right)^{p_2}dz_2\right)^{\frac{1}{p_2}}\quad=
$$

$$
=C\left(\int_0^{\infty}z_2^{-p_2}\left[\int_0^{\infty}\left(z_1^{-1}\int_0^{z_2}\int_0^{z_1}\left|\hat{f}(y_1,y_2)\right|dy_1\,dy_2\right)^{p_1}dz_1\right]^{\frac{p_2}{p_1}}dz_2\right)^{\frac{1}{p_2}}.
$$

Применяя дважды неравенство Харди и неравенство Минковского к последнему выражению, получим требуемую оценку.

## Список литературы


1 *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. — С. 150.

2 *Boas R.P.Jr*. The integrability class of the sine transform of a monotonic function // Stud. Math. — 1972. — No. 44. — P. 365–369.

3 *Sagher Y.* Integrability conditions for the Fourier transform // Journal Math. Anal. Appl. — 1976. — No. 54. — P. 151–156.

4 *Liflyand E., Tikhonov S.* Extended solution of Boas' conjecture on Fourier transforms // C.R. Math. Acad. Sci. Paris. — 2008. — № 346. — P. 1137–1142.

5 *Dyachenko M., Liflyand E., Tikhonov S.* Uniform convergence and integrability of Fourier integrals // Journal Math. Anal. Appl. — 2010. — No. 372. — P. 328–338.

6 *Gorbachev D., Liflyand E., Tikhonov S.* Weighted Fourier inequalities: Boas' conjecture in $R^n$ // Journal d'Analyse Mathe′matique. — 2011. — Vol. 114. — No. 1. — P. 99–120.

7 *Нурсултанов Е.Д.* Сетевые пространства и преобразование Фурье //Докл. РАН. — 1998. — Т. 361. — № 5. — С. 597–599.

8 *Копежанова А.Н., Нурсултанов Е.Д., Перссон Л.-Е.* О неравенствах для преобразования Фурье функций из пространств Лоренца // Математические заметки. — 2011. — Т. 90. — № 5. — С. 785–788.

9 *Bennet C., Sharpley R.* Interpolation of Operators. — M.: Academic Press, 1988. — P. 124.

10 *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975. — С. 22.

11 *Bergh J., Burenkov V., Persson L.–E.* Best constants in reversed Hardy's inequalities for quasimonotone functions // Acta Sci. Math. (Szeged). — 1994. — No. 59. — P. 221–239.


А.Б.Мұқанов

## Фурье түрлендіруі және анизотропты Лебег кеңістіктері

Мақалада әр айнымалы бойынша монотонды $f$ функциялардың $\hat{f}(y)=\int_{Rn} f(x)e^{-txy}dx, n\geq 1$ Фурье түрлендірулерінің интегралдық қасиеттері зерттелді. Соның ішінде монотонды функцияның Фурье түрлендіруі бойынша Харди және Литтлвудтың теоремасының көпөлшемді аналогы алынды.

A.B.Mukanov

## Fourier transform and anisotropic Lebesgue spaces

In this paper we study integral properties of the Fourier transforms $\hat{f}(y)=\int_{Rn} f(x)e^{-txy}dx, n\geq 1$ of monotone in each variable functions *f*. In particular, we get a multidimensional analogue of Hardy-Littlewood theorem on Fourier tarnsform of monotone function.

## References


1 Titchmarsh Ye. *Introduction to the theory of Fourier integrlas*, Moscow; Leningrad: GITTL, 1948, p. 150.

2 Boas R.P.Jr. *Stud. Math*., 1972, 44, p. 365–369.

3 Sagher Y. *J. Math. Anal. Appl*., 1976, 54, p. 151–156.

4 Liflyand E., Tikhonov S. *C.R. Math. Acad. Sci. Paris*, 2008, 346, p. 1137–1142.

5 Dyachenko M., Liflyand E., Tikhonov S. *Journal Math. Anal. Appl*, 2010, 372, p. 328–338.

6 Gorbachev D., Liflyand E., Tikhonov S., *Journal d'Analyse Mathe′matique*, 2011, 114 (1), p. 99–120.

7 Nursultanov E.D. *Net spaces and Fourier tarnsform*, Report RAN, 1998, 361 (5), p. 597–599.

8 Kopezhanova A.N., Nursultanov E.D., Persson L.-E. *Math. Notes*, 2011, 90, 5, p. 767–770.

9 Bennet C., Sharpley R. *Interpolation of Operators*, Moscow: Academic Press, 1988, p. 124.

10 Besov O.V., Il'in V.P., Nikol'skii S.M., *Integral representations of functions and imbedding theorems*, Moscow: Nauka, 1975, p. 22.

11 Bergh J., Burenkov V., Persson L.–E. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 1994, 59, p. 221–239.