DOI 10.31489/2019M1/31-35
UDC 517.9

M. Muhtarov, A.H. Kalidolday

S.Toraigyrov Pavlodar State University, Kazakhstan
(E-mail: kalidoldai_ a@mailnisedu.onmicrosoft.com)

On solving a linear control problem

The problem of a linear regulator is considered. There is a system of linear differential equations with a quadratic control quality criterion. The method of dynamic programming is applied to the solution of the considered linear problem. As is known, the main difficulty in applying this method is to integrate partial differential equations. In this problem, the obtained optimal control function depends on the solution of the Riccati equation. In [1], conditions were obtained under which there is a solution to such optimal control problems with a quadratic quality criterion. These conditions were obtained along with formulas for minimizing control and for optimal trajectory. But all these statements depended on the ability to solve the matrix Riccati equation under certain boundary conditions given at some time point. To construct a solution to the problem under consideration, a system of $2n$ adjoint differential equations is constructed. After splitting the transition matrix of this system into block ones, it is possible to express the state of the system at the time instant t through the state variable and the adjoint variable at the final time instant t_1. A feature of this work is that an example is given, where the solution of the Riccati equation, which determines the optimal solution of the problem, was obtained explicitly.

Keywords: dynamic programming, optimal control, evaluation of control quality, quadratic quality criterion, adjoint equations.

The system of controls expressed through the linear differential equation is given

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u\,; \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

where $A(t)$, $B(t)$ — continuous matrixes of dimension $(n \times n)$, $(n \times q)$ [1, 2].

The functional that evaluates the quality of control is given in the form:

$$I = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \left[x^T(t)Dx(t) + u^T(t)Ru(t)\right] \,dt + \frac{1}{2}x^T(t_1)Qx(t_1), \tag{2}$$

where $D(t)$, Q — is a nonnegative definite symmetric matrix of size $(n \times n)$; $R(t)$ — positive definite symmetric matrix of size $(q \times q)$. It is required to find the optimal control function $u^0(t,\, x)$ for problem (1), (2). To do this, we make the Bellman equation [3]

$$\min_u \left\{ \frac{\partial s(t,x)}{\partial t} + \left(\frac{\partial s(t,x)}{\partial x}\right)^T [A(t)x + B(t)u] - \frac{1}{2}\left[x^T D(t)x(t) + u^T R(t)u\right] \right\} = 0;$$

$$s(t_1, x) = -\frac{1}{2}x^T Qx\,. \tag{3}$$

Let's differentiate the expression in square brackets by u and equating the result obtained to zero, we obtain the control function.

$$u^0(t,\, x) = R^{-1}(t)B^T(t)\frac{\partial s(t,x)}{\partial x}\,.$$

The solution of equation (3) is found in the form

$$s(t,x) = \frac{1}{2}x^T Kx, \tag{4}$$

where $K(t)$– is an unknown symmetric matrix of size $(n \times n)$.

Expression (4) substituting into the relation (3) we obtain the following equation:

$$\dot{K} = -A^T(t)K(t) - K(t)A(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) + D(t);$$
$$K(t_1) = -Q.$$

As shown in this paper, the existence of many problems of the theory of optimal control is obviously related to the problem of the existence of a solution to the matrix equation of Riccati in some boundary conditions at any given time.

Now we consider one method for solution the Riccati equation. To do this, using the variable p conjugate to the variable x and using method of a variation

$$\dot{x} = A(t)x(t) - B(t)R^{-1}B^T(t)p(t),$$

we obtain a linear differential equation

$$\dot{p} = -A^T(t)p(t) - D(t)x(t).$$

Boundary conditions of this problem

$$x(t_0) = x_0,\ p(t_1) = Qx(t_1).$$

By combining these two differential equations, we make a system of $(2n)$ equations

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}B^T(t) \\ -D(t) & -A^T(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix}.$$

The fundamental matrix (transfer) of this system has the form

$$\Phi(t,\, t_0) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(t,\, t_0) & \Phi_{12}(t,\, t_0) \\ \Phi_{21}(t,\, t_0) & \Phi_{22}(t,\, t_0) \end{pmatrix}.$$

When you partition the transition matrices into block matrices it is possible to express the state system in timepoint t through the state variable and the conjugate variable at the final timepoint 2 as follows: final timepoint t_1 as follows:

$$x(t) = \Phi_{11}(t, t_1)x(t_1) + \Phi_{12}(t, t_1)p(t_1).$$

Further from a condition $p(t_1) = Qx(t_1)$ receive

$$x(t) = [\Phi_{11}(t, t_1) + \Phi_{12}(t, t_1)Q]x(t_1). \tag{5}$$

Thus, for the conjugate variable we obtain

$$p(t) = \Phi_{21}(t, t_1)x(t_1) + \Phi_{22}(t, t_1)p(t_1) = [\Phi_{21}(t, t_1) + \Phi_{22}(t, t_1)Q]x(t_1). \tag{6}$$

Excluding $x(t_1)$ in the expressions (5) and (6) we obtain the following ratio:

$$p(t) = [\Phi_{21}(t, t_1) + \Phi_{22}(t, t_1)Q]\ \cdot [\Phi_{11}(t, t_1) + \Phi_{12}(t, t_1)Q]^{-1}x(t). \tag{7}$$

From expression (7) it is visible that between functions $p(t)$ and $x(t_1)$ there is a linear relationship.

$$p(t) = K(t)x(t),$$

here

$$K(t) = [\Phi_{21}(t, t_1) + \Phi_{22}(t, t_1)Q]\ \cdot [\Phi_{11}(t, t_1) + \Phi_{12}(t, t_1)Q]^{-1}. \tag{8}$$

So, if we consider such a problem of a linear regulator, then the optimal control function will take the form

$$u^0(t,\, x) = -R^{-1}(t)B^T(t)K\, x(t),$$

where $K(t)$ (8) — is the solution of the Riccati equation [4].

Consider an example that can be used to determine the exact solution of the Riccati equation using these results.

Let the following control problem be given:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2; \quad x_1(0) = x_{10};\\ &\dot{x}_2 = u; \quad x_2(0) = x_{20}; \end{aligned} \tag{9}$$

$$I = \frac{1}{2}\, x_1^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^t (x_2^2 + u^2)dt \ \to \ \min .$$

The solution of this problem is looking for the method of variation. Equality

$$u(t) = p(t),$$

substituting into the equation (9) we obtain the following system of the equations

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2; \quad x_1(0) = x_{10};\\ &\dot{x}_2 = u; \quad x_2(0) = x_{20}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\dot{p}_1 = 0\,;\\ &\dot{p}_2 = -p_1 + x_2. \end{aligned}$$

To find the control function that determines the optimal solution of this problem, it is necessary to find a solution to the corresponding Riccati equation. Now consider this in practice. Let's assume that the transition matrix connected with a type of the solution of system (9) is defined.

$$\Phi(t,t_1) = \begin{pmatrix} 1 & sh(t-t_1) & t-t_1-sh(t-t_1) & ch(t-t_1)-1\\ 0 & ch(t-t_1) & 1-ch(t-t_1) & sh(t-t_1)\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & sh(t-t_1) & -sh(t-t_1) & ch(t-t_1) \end{pmatrix}.$$

Let the matrix be divided into blocks

$$\Phi_{11} = \begin{pmatrix} 1 & sh(t-t_1)\\ 0 & ch(t-t_1) \end{pmatrix}; \ \Phi_{12} = \begin{pmatrix} t-t_1-sh(t-t_1) & ch(t-t_1)-1\\ 1-ch(t-t_1) & sh(t-t_1) \end{pmatrix};$$

$$\Phi_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & sh(t-t_1) \end{pmatrix}; \ \Phi_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ -sh(t-t_1) & ch(t-t_1) \end{pmatrix}.$$

In this case, the solution of the Riccati equation, determining the solution of this problem will take the form (8).

$$K(t) = [\Phi_{21}(t,t_1) + \Phi_{22}(t,t_1)Q]\ \cdot [_{11}(t,t_1) + \Phi_{12}(t,t_1)Q]^{-1}.$$

Substituting the given matrices here, after simple transformations, this matrix will take the form

$$\begin{aligned} K(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0\\ -sh(t-t_1) & sh(t-t_1) \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{\varphi} \begin{pmatrix} ch(t-t_1) & -sh(t-t_1)\\ ch(t-t_1)-1 & 1+t-t_1-sh(t-t_1) \end{pmatrix} =\\ &= \tfrac{1}{\varphi} \begin{pmatrix} ch(t-t_1) & -sh(t-t_1)\\ -sh(t-t_1) & (1+t-t_1)sh(t-t_1) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{10}$$

Here designations $\varphi = (1+t-t_1)ch(t-t_1) - sh(t-t_1)$ are entered. From this formula, the elements of the matrix are written in the following form:

$$K_{11} = \tfrac{1}{\varphi}\cdot ch(t-t_1); \qquad K_{12} = \tfrac{1}{\varphi}\cdot\ (-sh(t-t_1));$$

$$K_{21} = \tfrac{1}{\varphi}\cdot\ (-sh(t-t_1)); \qquad K_{22} = \tfrac{1}{\varphi}\cdot\ sh(t-t_1)\cdot(1+t-t_1).$$

Let's check that the matrix $K(t)$ (8) satisfies to Riccati equation.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0\\ 1 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ R = 1\,.$$

The Riccati equation can be reduced to the form:

$$\dot{K} = -A^T(t)K(t) - K(t)A(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) + D(t). \tag{11}$$

Let's calculate the derivative of the function on the left side of the Riccati equation

$$\dot{K} = \frac{1}{\varphi^2}\begin{pmatrix} \dot{K}_{11} & \dot{K}_{12} \\ \dot{K}_{21} & \dot{K}_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\varphi^2}\begin{pmatrix} -sh^2(t-t_1) & sh(t-t_1)cht-t_1) - (1+t-t_1) \\ sh(t-t_1)cht-t_1) - (1+t-t_1) & (1+t-t_1)^2 - sh^2(t-t_1) \end{pmatrix},$$

where

$$\varphi = (1+t-t_1)ch(t-t_1) - sh(t-t_1);$$

$$\dot{\varphi} = (1+t-t_1)sh(t-t_1).$$

At first we will check that the left part of the equations are equal to these values.

$$\dot{K} = -A^T(t)K(t) - K(t)A(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) + D(t) =$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ K_{11} & K_{12} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & K_{11} \\ 0 & K_{21} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_{12}K_{21} & K_{12}K_{22} \\ K_{22}K_{21} & K_{22}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & K_{11} \\ K_{11} & K_{12}+K_{21} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_{12}K_{21} & K_{12}K_{22} \\ K_{22}K_{21} & K_{22}^2 - 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} K_{12}K_{21} & K_{11}+K_{12}K_{22} \\ K_{11}+K_{22}K_{21} & K_{12}+K_{21}+K_{22}^2-1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\varphi^2}\begin{pmatrix} -sh^2(t-t_1) & sh(t-t_1)ch(t-t_1) - (1+t-t_1) \\ sh(t-t_1)ch(t-t_1) - (1+t-t_1) & (1+t-t_1)^2 - sh^2(t-t_1) \end{pmatrix},$$

where $\varphi = (1+t-t_1)ch(t-t_1) - sh(t-t_1)$, $\dot{\varphi} = (1+t-t_1)sh(t-t_1)$.

After simple transformations, we obtain that the expression on the right side of the equation is equal to the value of the derivative expression on the left. So the function (10) is the solution of the Riccati equation (11).

$$\dot{K} = -A^T(t)K(t) - K(t)A(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) + D(t);$$

$$K(t_1) = -Q.$$

Using the solution of the obtained Riccati equation, we determine the optimal control function, which is the solution of the considered task.

References

1 Андреев Ю.Н. Управление линейными объектами / Ю.Н. Андреев. — М.: Наука, 1976. — 424 с.

2 Квакернаак Х. Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернаак, Р. Сиван. — М.: Мир, 1977. — 650 с.

3 Пантелеев А.В. Теория управления в примерах и задачах / А.В. Пантелеев, А.С. Бортаковский. — М.: Высш. шк., 2003. — 583 с.

4 Параев Ю.И. Теория оптимального управления / Ю.И. Параев. — Томск: Изд-во Томского ун-та, 1986. — 164 с.

М. Мұхтаров, А.Х. Қалидолдай

Басқарудын бір сызықтық теңдеуінің шешуі жайлы

Мақалада сызықты реттегіш есебі қарастырылды. Сызықты дифференциалдық теңдеулер жүйесі және басқару сапасын бағалайтын квадраттық белгі (критерий) берілген болсын. Есептің шешімін табу үшін динамикалық бағдарлау әдісі қолданылды. Ал осы әдісті қолданудың негізгі қиыншылығы дербес туындылы теңдеуді интегралдау екені белгілі. Осы қарастырылып отырған есепте алынган тиімді басқару функциясы Риккати теңдеуінің шешіміне тәуелді. Қолданыстағы [1] әдебиетте осындай критерийі квадраттық болатын тиімді басқару есептерінін шешімдерінің бар болуы шарттары келтірілген. Бұл шарттар минимумдалатын баскару функциялары үшін және тиімді траекториялардың формулаларымен бірге алынған. Бірақ та бұл тұжырымдар матрицалық Риккати теңдеуінің қандайда бір уақыт мезгілінде, белгілі бір шекаралық шарттары орындалғанда шешімінің бар болуы мүмкіншілігімен ғана байланысты алынған. Қарастырылып отырған есептің шешімін құру үшін түйіндес $2n$ дифференциалдық теңдеулер жүйесі құрылады. Осы жүйенің көшу матрицасын блок матрицаларға бөлгеннен кейін жүйенің t уақыт мезгіліндегі күйін жүйенің айнымалысының күйі мен түйіндес айнымалының t_1 уақыт мезгіліндегі күйімен байланыстыруға болады. Бұл жұмыстың ерекшелігі есептің тиімді басқару функциясын анықтайтын Риккати теңдеуінің шешімі айқын түрде алынған мысал қарастырылған.

Кілт сөздер: динамикалық бағдарламалау, оңтайлы басқару, сапа басқаруды бағалау, сапаның квадраттық көрсеткіші, қосарланған теңдеулер.

М. Мухтаров, А.Х. Калидолдай

О решении одной линейной задачи управления

Рассмотрена задача линейного регулятора. Имеется система линейных дифференциальных уравнений с квадратичным критерием качества управления. Для решения задачи применен метод динамического программирования. Как известно, основная трудность применения этого метода состоит в интегрировании уравнения с частными производными. В данной задаче полученная оптимальная управляющая функция зависит от решения уравнения Риккати. В [1] были получены условия, при которых существует решение таких задач оптимального управления с квадратичным критерием качества. Эти условии были получены вместе с формулами для минимизирующего управления и для оптимальной траектории. Но все эти утверждения зависели от возможности решить матричное уравнение Риккати при определенных граничных условиях, заданных в некоторый момент времени. Для построения решения рассматриваемой задачи составляется система $2n$ сопряженных дифференциальных уравнений. После разбиения переходной матрицы этой системы на блочные можно выразить состояние системы в момент времени t через переменную состояния и сопряженную переменную в конечный момент времени t_1. Особенностью этой работы является то, что приводится пример, где решение уравнения Риккати, определяющее оптимальное решение задачи, получено в явном виде.

Ключевые слова: динамическое программирование, оптимальное управление, оценка качества управления, квадратичный критерий качества, присоединенные уравнения.

References

1 Andreev, Yu.N. (1976). *Upravlenie lineynymi obektami [Management of linear objects].* Moscow: Nauka [in Russian].

2 Kvakernaak, H., & Sivan, R. (1977). *Lineynye optimalnye sistemy upravleniia [Linear optimal control systems].* Moscow: Mir [in Russian].

3 Panteleev, A.V., & Bortakovskiy, A.S. (2003). *Teoriia upravleniia v primerakh i zadachakh [Control theory in the examples and problems].* Moscow: Vyisshaia shkola [in Russian].

4 Parayev, Yu.I. (1986). *Teoriia optimalnoho upravleniia [Optimal control theory].* Tomsk: Izdatelstvo Tomskoho universiteta [in Russian].