УДК 519.683

М.М.Букенов, Г.Б.Бакаева

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
(E-mail: kim.chandi@inbox.ru)

Схема расщепления для трехмерной задачи теплопроводности

В статье исследована схема расщепления для трехмерного уравнения теплопроводности, сводящаяся к трехточечным прогонкам. Проведена численная реализация схемы и показана практическая применимость. Численная реализация схемы, стабилизирующей поправки, и сравнение её со схемой расщепления показали практическую эффективность предложенного алгоритма. Результаты расчетов приведены в таблице и дан анализ.

Ключевые слова: теплопроводность, сетка, единичный оператор, аппроксимация, трехточечные прогонки.

Рассмотрим в области $D \in R^3$ с границей γ задачу — найти решение $u(x,t)$-уравнения теплопроводности

$$\frac{vu}{vt} = a^2 \sum\nolimits_i^3 = \frac{\partial^z u}{1\partial x_i^z} + f(x,t), x \in D, t \in [0,T], \frac{v^3 u}{vx_i^z}, \tag{1}$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{2}$$

и граничному условию

$$u(x,t) = \varphi(x,t), x \in \varphi. \tag{3}$$

Для решения задачи (1)–(3) используем разностную аппроксимацию, следуя [1]. Введем равномерную сетку ω.

$$\left\{\omega{=}\left(x_{1,i}, x_{2,k}, x_{3,j}\right), x_{1,i} = ih_1, x_{2,k} = kh_2, x_{3,j} = jh_3, i = 0,...,N, k = 0,...,N, j = 0,...,N.h_m = L_m / N, m = 1,2,3\right\};$$

$$\omega_\tau = \left\{t_n = nr, n = 0,...,M, n = T / M\right\}.$$

Введем сеточную функцию $u_{ijk}^{n}=u(x_{1,i},x_{2,k},x_{3,j}t_n)$, построим неявную схему

$$\frac{u_{ijk}^{n}-u_{ijk}^{n}}{r}=\Delta_h u_{ijk}^{n+1}+f_{ijk}^{h}, \tag{4}$$

где

$$\Delta_h u_{ijk}^{n+1}=\Lambda_1 u_{ijk}^{n+1}+\Lambda_2 u_{ijk}^{n+1}+\Lambda_3 u_{ijk}^{n+1};$$

$$\Lambda_1 u_{ijk}^{n+1}=a^2\left(\frac{u_{i+1jk}^{n+1}-2u_{ijk}^{n+1}+u_{i-1jk}^{n+1}}{h_1^2}\right);$$

$$\Lambda_2 u_{ijk}^{n+1}=\left(a^2\frac{u_{ij+1k}^{n+1}-2u_{ijk}^{n+1}+u_{ij-1k}^{n+1}}{h_2^2}\right);$$

$$\Lambda_3 u_{ijk}^{n+1}=a^2\left(\frac{u_{ijk+1}^{n+1}-2u_{ijk}^{n+1}+u_{ijk-1}^{n+1}}{h_3^2}\right);$$

$$f_{ijk}^{n}=f(x_{1,i},x_{2,k},x_{3,j}t_n);$$

$$u_{ijk}^{o}=\varphi_{ijk,}\quad u_{0jk}^{n}=\psi_{ojk}^{n},\psi_{Njk}^{n}=\psi_{ojk}^{n};$$

$$u_{iok}^{n}=\psi_{i0k}^{n},u_{iNk}^{n}=\psi_{iNk}^{n},u_{ijo}^{n}=\psi_{ij0}^{n},u_{ijo}^{n}=\psi_{ijN}^{n}. \tag{5}$$

Схему (4)–(5) реализуем с помощью схемы расщепления, следуя [2], опуская индексы внизу, имеем

$$\frac{u^{\frac{n+1}{3}}-u^{n}}{\tau}=\Lambda,u^{\frac{n+1}{3}}+\frac{1}{3}f^{n};$$

$$\frac{u^{\frac{n+2}{3}}-u^{\frac{n+1}{3}}}{\tau}=\Lambda_2,u^{\frac{n+2}{3}}+\frac{1}{3}f^{n}; \tag{6}$$

$$\frac{u^{n+1}-u^{\frac{n+2}{3}}}{\tau}=\Lambda_3 u^{n+1}+\frac{1}{3}f^{n}.$$

Для исследования разностной схемы (6) положим $f^n=0$. Учитывая наше допущение, перепишем (6) в виде

$$A_s u^{\frac{n+s}{3}}-B_s u^{n+\frac{s-1}{s}}=0, A_s=E-\tau\Lambda_s, B_s=E^s=1,2,3, \tag{7}$$

где E — единичный оператор. Исключая $u^{\frac{n+1}{3}}$ и $u^{\frac{n+2}{3}}$, приходим к эквивалентной схеме в целых шагах.

$$A_1A_2A_3u^{n+1}-B_1B_2B_3u^{n}=A_1A_2A_3u^{n+1}-Eu^{n}=0. \tag{8}$$

Разлагая (8) по степеням τ, получаем

$$\frac{u^{n+1}-u^{n}}{\tau}\Lambda u^{n+1}-\tau(\Lambda_1\Lambda_2+\Lambda_1\Lambda_3+\Lambda_2\Lambda_3)u^{n+1}+\tau^2\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3u^{n+1}. \tag{9}$$

Из (9) следует, что схема (6) имеет погрешность аппроксимации

$$0\left(\tau+h^2\right),h^2=h_1^2+h_2^2+h_3^2.$$

Положим, что

$$u_n=\lambda_n e^{i(k_1+x_1+k_2x_2+k_3x_3)};\ u^{\frac{n+1}{3}}=\lambda_n+\frac{1}{3}e^{i(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3)}. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (6) при $f^n=0$, получим

$$p_1=\frac{\lambda_{n+\frac{1}{3}}}{\lambda_n}=\frac{1}{1+a_1},p_2=\frac{\lambda_{n+\frac{2}{3}}}{\lambda_{n+\frac{1}{3}}}=\frac{1}{1+a_2},p_3=\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+\frac{2}{3}}}=\frac{1}{1+a_3}, \tag{11}$$

где $p_{i,j}=1,2,3$ — спектральные радиусы,

$$a_i = 4z_i \sin^2 \frac{k_i h_i}{2}, z_i = \frac{a^2\tau}{h_i^2}, i = 1,2,3.$$

Из (11) следует устойчивость схемы (6). Нетрудно установить, что схема (6) удовлетворяет свойству экстремума.

Теорема 1. Схема (6) при $f^n = 0$ удовлетворяет свойству экстремума.

Доказательство. Каждая из двухслойных схем (6) удовлетворяет свойству экстремума. Рассмотрим, например, первую схему в (6), записав её предварительно в индексном виде и отбросив для простоты индексы по x_2, x_3:

$$u_i^{n+\frac{1}{3}} = \frac{z}{1+2z} u_{i-1}^{n+\frac{1}{3}} + \frac{1}{1+2z} u_i^n + \frac{z}{1+2z} u_{i+1}^{n+\frac{1}{3}}.$$

Отсюда следует свойство экстремума

$$\min\{u_{i-1}^{n+\frac{1}{3}}, u_i^n, u_{i+1}^{n+\frac{1}{3}}\} \le u_i^{n+\frac{1}{3}} \le \max\{u_{i-1}^{n+\frac{1}{3}}, u_i^{n+\frac{1}{3}}, u_i^{n+\frac{1}{3}}\}.$$

Из него, в частности, следует сходимость с разностного решения к решению дифференциального уравнения (равномерная сходимость). Далее составлена программа, приведены численные расчеты на последовательности сеток $10\times10\times10$, $100\times100\times100$, $1000\times1000\times1000$ по пространственным переменным, кроме того, обнаружена неувязка между тестовым решением и приближенным решением схемы (6).

Схема (6) реализовывалась с помощью трехточечных прогонок, в качестве тестового решения взята функция

$$u^t(x_1, x_2, x_3, t) = \sin\pi x_1 \sin\pi x_2 \sin\pi x_3 e^{-2t};$$

$$f(x_1, x_2, x_3, t) = (3\pi - 2)\sin\pi x_1 \sin\pi x_2 \sin\pi x_3 e^{-2t}.$$

В качестве области $3\pi^2 D$ брался единичный куб

$$\{0 \le x_i \le 1, i = 1,2,3\},$$

$t \in [0,05]$, норма неувязки определялась так:

$$\| u^\tau - u^{np} \| = \left[h^3 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} (u_{ijk}^t - u_{ijk}^{np})^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

u^{np} — приближенное решение схемы (6), численные результаты приведены в таблице.

Т а б л и ц а

Сетка	h	$\gamma\tau$	$\| u^\tau - u^{np} \|$
$10\times10\times10$	0,1	0,05	0,04628
$10\times10\times10$	0,1	0,025	0,03874
$10\times10\times10$	0,1	0,001	0,02892
$100\times100\times100$	0,01	0,05	0,018543
$100\times100\times100$	0,01	0,025	0,01175
$100\times100\times100$	0,01	0,001	0,01008
$1000\times1000\times1000$	0,001	0,05	0,007891
$1000\times1000\times1000$	0,001	0.025	0,004512
$1000\times1000\times1000$	0,001	0,001	0,002345

Анализ счета показал, что с измельчением сетки точность увеличивается, результаты выдавались на фиксированный момент времени, которые выявили практическую эффективность предложенного алгоритма.

Список литературы

1 *Самарский А.А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977. — 654 с.

2 *Яненко Н.Н.* Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности // Докл. АН СССР. — 1959. — Вып. 125. — № 6.

М.М.Букенов, Г.Б.Бақаева

Үш өлшемді жылуөткізгіштік есепті шешу үшін бөліктеу схемасы

Үш нүктелі тізбектен өтетін үш өлшемді жылуөткізгішті теңдеулер үшін бөліктеу схемасы зерттелген. Схеманы сандық ұйымдастырудың жүргізілуі мен практикалық қолданысы көрсетілген. Сандық ұйымдастырудың тұрақтандыру түзетулері мен оны бөліктеу схемасы салыстырылып, алгоритмның практикалық тиімділігі дәлелдеген. Есептеудің нәтижесі кесте түрінде беріліп, талдауы келтірілген.

M.M.Bukenov, G.B.Bakayeva

Chart of breaking up for three-dimensional task to heat conductivity

Investigated the splitting scheme for three-dimensional heat equation reducible to the three-point progacam. Conducting numerical implementation of the scheme and the practical applicability. Numerical realisasi scheme stabilizing moravci and its comparison with the splitting scheme showed the practical effectiveness of the proposed algorithm. The results of the calculations are shown in the table and give analysis.

References

1 Samarsky A.A. *Theory of difference schemes*, Moscow: Nauka, 1977, 654 p.

2 Yanenko N.N. *One difference method account the multidimensional equation thermal conductivity* // Report AN USSR, 1959, 125, 6.