УДК 517.518.235

Г.Ш. Искакова, К.С. Шаукенова, М.С. Алдибекова

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова, Казахстан
(E-mail: iskakova.1975@mail.ru)

О многовесовом анизотропном неравенстве вложения

В статье рассмотрены пространства Соболева, анизотропные по порядкам производных, по показателям суммируемости и по весовым множителям при этих производных. Задачи вложения пространств функций с теми или иными дифференциальными характеристиками актуальны в связи с их важными приложениями в теории дифференциальных операторов, в численных прикладных задачах, в исследовании аппроксимативных характеристик интегральных операторов, действующих в пространствах суммируемых функций. Исследование проведено методом локализации для оценок норм интегральных операторов в весовых пространствах Лебега. В статье получена многовесовая теорема вложения анизотропных пространств Соболева общего типа.

Ключевые слова: вложение, анизотропное, многовесовое, многопараметрическое, интегральные операторы, метод локализации, весовые пространства.

Введение

Пусть G — область в R^n, $l=(l_1,...,l_n)$, $\alpha=(\alpha_1,..,\alpha_n)$ — векторы с целыми координатами $l_i>0$, $\alpha_i\geq 0$.

Ниже нами будут использованы обозначения: для $x=(x_i)=(x_1,\dots,x_n)\in(-\infty,+\infty)^n$, $y=(y_i)\in(0,+\infty]^n$, $\lambda=(\lambda_i)\in(0,+\infty)^n, t\in(0,+\infty)$ пусть $x\leq y$, $x<y$ — запись покоординатного сравнения,

$$\lambda x\_=(\lambda_i x_i),(\lambda,\,x)=\sum_1^n\lambda_i x_i,\frac{x}{y}\_=x:\ \ y=\left(\frac{x_i}{y_i}\right),\ \ \frac{1}{y}=\left(\frac{1}{y_i}\right);$$

$$|\lambda|=\sum_1^n\lambda_i,\ \ t^\lambda=(t^{\lambda_i}),|x|_\lambda\_=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|^{1/\lambda_i},\ \ 1=(1),\ \ \infty=(+\infty).$$

Для $x\in R^n$, множеств $E,\ \ F\subset R^n$ и $\lambda\in(0,+\infty)^n$ пусть

$$x\pm\lambda E=\{y\ \ :\ \ y=x\pm\lambda z,z\in E\},E\pm F=\{z\ \ :\ \ z=x\pm y,x\in E,y\in F\}.$$

Пусть $Q_0=(-1,\,1)^n$, область $G\subset R^n$,

$$\begin{array}{l} G\left(\frac{1}{\lambda},\,t\right)=\_\{x\ \ :\ \ x=y+\left(\frac{t}{2}\right)^\lambda Q_0\}\subset G,\\ G_t=\_\{x\ \ :\ \ x\in G,\,dist(x,\partial G)>t\}.\end{array}$$

Пусть далее $l\in N^n$, $\alpha\in Z^n$, $\alpha\geq 0$.

$$Q=Q_d=Q_d(x)\overset{\mathbf{def}}{=}\{y\in\mathrm{R}^n\ \ :\ \ \ |y_i-x_i|<d/2,\ \ i=1,\dots,n\}=Q_{(2d,\,\lambda)}(x),$$

при $\lambda=(\lambda_1,...,\,\lambda_n),\ \ \lambda_1=...=\lambda_n=1$. Положим

$$\tau(x)\overset{\mathbf{def}}{=}\min\left(1,\sup_{d>0}\{d\ \ :\ \ \ 2Q_d(x)\subset G\}\right);$$

$$Q(x)=\tfrac{1}{2}Q_{\tau(x)}(x);$$

и пусть

$$I_\tau^n=\bigcup\nolimits_{x\in G}\{Q\ \ :\ \ \ Q\subset Q(x)\}.$$

Через $\upsilon(Q)$, $\tilde{\rho}_i(Q)$, $|Q|$ будут обозначаться соответственно $\int\limits_Q \upsilon^{1-r'}$, $\int\limits_Q \rho_i^{1-p_i'}$, $\int\limits_Q dx$. Для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$, для $x \in R^n$

$$|x| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2};$$

$$B(x;\, r) = \{y \in R^n \quad : \quad |y - x| < r\}.$$

Через $L_{p\upsilon}(G)$, будет обозначаться весовое лебегово пространство с нормой [1]

$$|f;\, L_{p\upsilon}(G)| = \left(\int\limits_G |f|^p \upsilon\right)^{1/p}.$$

Ниже запись $A << B$ будет означать, что $A \le cB$.

Обозначим через $M^* f$ максимальный оператор относительно дифференциального базиса

$$B = \bigcup_{x \in G} B_x, \quad 345 \;\; B_x = \{Q \;\; : \;\; Q = Q_{(\tau,\, \lambda)}, \;\; x \in Q \subset Q(x)\};$$

$$M^* f(x) = \sup_{Q \in B_x,\; x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f|.$$

Рассмотрим случай $\kappa = 1 - (\alpha,\, \lambda) - |\lambda| > 0$,

Теорема. Пусть $1 < p < q < \infty$, $1 < p_i < q < \infty$, $i = 1, ..., n$, $\kappa = 1 - (\alpha,\, \lambda) - |\lambda| > 0$, *а веса* ρ_i, υ *и* ω *подчиняются относительно некоторой функции* $\tau(x)$ *и* $c_0 \in (0,\, 8^{-|\lambda|}\eta^5]$ *условиям*

$$A_0 = \sup_{x \in G} \tau(x)^{-(\alpha,\, \lambda) - |\lambda|/p} \left[\int\limits_{Q(x)} (M^* \upsilon(t))^{q/p'} \omega(t) dt\right]^{1/q} < \infty;$$

$$B_0 = \left[\int\limits_G \left(\int\limits_{G \setminus c_0^\lambda Q(x)} \tilde{\upsilon}(y) dy\right)^{q/p'} \tau(x)^{-q(\alpha,\, \lambda) - |\lambda| q/p} \omega(x) dx\right]^{1/q} < \infty;$$

$$A_i = \sup_{x \in G} \left[\int\limits_{Q(x)} \tau(t)^{q?} \left(\int\limits_{Q(t)} \tilde{\rho}_i\right)^{q/p_i'} \omega(t) dt\right]^{1/q} < \infty \;\; (i = 1, ..., n);$$

$$B_i = \left[\int\limits_G \tau(x)^{q?} \omega(x) \left(\int\limits_{G \setminus c_0^\lambda Q(x)} \tilde{\rho}_i(y) dy\right)^{q/p_i'} dx\right]^{1/q} < \infty \;\; (i = 1, ..., n).$$

Тогда справедлива оценка

$$\left(\int\limits_G |D^\alpha u|^q \omega(x) dx\right)^{1/q} \le C \left|u;\, W^{\bar{l}}_{\bar{p},\, p}(G;\, \bar{\rho},\, \upsilon)\right|, \quad u \in C^\infty W.$$

с точной постоянной

$$C \le c \sum_{j=0}^{n} (A_i + B_i),$$

где $c > 0$ не зависит G от и весов ρ_i, υ.

Доказательство. Заметим, что G локально удовлетворяет условию гибкого $l-$ рога относительно функции $\rho(t^\lambda) = (t^{\lambda_1}, ..., t^{\lambda_n})$, а именно:

$$x + V(\lambda,\, x,\, \delta_0) = x + \bigcup_{0 < t \le T_x} [\rho(t^\lambda) + t^\lambda \delta^\lambda Q_0] \subset 2^\lambda Q(x) \; ?@8 \; 0 < \delta < 1, \;\; T_x = \tau(x).$$

Для $\lambda_i = 1/l_i$ $(i = 1, ..., n)$ представление [2]

$$f^{(\alpha)}(x) = f^{(\alpha)}_{(T)}(x,\, \rho(T^{\lambda})) + (-1)^{|\alpha|} \int\limits_0^T \lambda_i t^{-1-|\lambda|-(\alpha,\,\lambda)+\lambda_i l_i} \times$$

$$\times \int\limits_G K_i \left(\frac{y}{t^{\lambda}},\, \frac{\rho(t^{\lambda})}{t^{\lambda}},\, \rho'(t^{\lambda})\right) D_i^{l_i} f(x+y)dydt,$$

перепишется в виде

$$f^{(\alpha)}(x) = f^{(\alpha)}_{T_x}(x,\, t^{\lambda}) + (-1)^{|\alpha|} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int D_i^{l_i} f(y) N_{i,\,\delta}(x,\, y-x)dy, \tag{1}$$

где

$$N_{i,\,\delta}(x,\, y-x) = \int\limits_0^{T_x} t^{-|\lambda|-(\alpha,\,\lambda)} K_i \left(\frac{y-x}{t^{\lambda}},\, 1,\, 1\right) \chi(t,\, y)dt,$$

$\chi(t,\, y)$– характеристическая функция параллелепипеда $\delta^{\lambda} Q_{(t,\,\lambda)}(x)$.

Для $|N_{i,\,\delta}(x,\, y)|$ из [2] имеем оценки

$$|N_{i,\,\delta}(x,\, y)| << \int\limits_0^{T_x} t^{-(\alpha,\,\lambda)-|\lambda|} H(t\delta_0 - |y|_{\lambda})dt = \tag{2}$$

$$= c \begin{cases} \frac{1}{\kappa}\left(\frac{|y|_{\lambda}}{\delta_0}\right)^{\kappa}\left[\left(\frac{\delta_0 T_x}{|y|_{\lambda}}\right) - 1\right], & 5A;8\ \kappa = 1 - |\lambda| - (\alpha,\, \lambda) \neq 0; \\ \ln \frac{\delta_0 T_x}{|y|_{\lambda}}, & 5A;8\ \kappa = 1 - |\lambda| - (\alpha,\, \lambda) = 0; \end{cases}$$

$$<< \begin{cases} T_x^{\kappa} H(\delta_1 T_x - |y|_{\lambda}), & 5A;8\ \kappa > 0; \\ \delta_1^{-\kappa} |y|_{\lambda}^{\kappa} H(\delta_1 T_x - |y|_{\lambda}), & 5A;8\ \kappa < 0; \end{cases} \tag{3}$$

$$|N_{i,\,\delta}(x,\, y)| \le c \ln(\delta_1 T_x |y|_{\lambda}^{-1}), \quad 5A;8\ \kappa = 0. \tag{4}$$

Для первого слагаемого, в (1) в силу оценки

$$\left|\Omega_y^{(\alpha)}(\frac{y-x}{t^{\lambda}},\, 1)\right| \le c_3 \chi_{2^{1/\lambda}\delta Q_{(t,\,\lambda)}(x)}(y-x).$$

в [2]

$$\begin{gathered} |f^{(\alpha)}_{T_x}(x,\, t^{\lambda})| = T_x^{\kappa-1} \left| \int f(x+y)\Omega^{(\alpha)}\left(\tfrac{y}{t^{\lambda}},\, 1\right)\, dy\right| << \\ << \tau(x)^{\kappa-1} \int\limits_G |f(y)|\chi(t,\, y-x)dy. \end{gathered} \tag{5}$$

Заметим, что $\Omega^{(\alpha)}(y) = 0$, если $|y_i| \ge (1 + \delta_1^{\lambda_i})\ \tau(x)^{\lambda_i}$.

Из представления(1) и оценок (3), (5) следует поточечная оценка

$$|f^{\alpha}(x)| \le c \int\limits_G k_0(x,\, y)|f(y)|dy + c \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int\limits_G k_i(x,\, y)|D_i^{l_i} f(y)|dy, \tag{6}$$

где

$$k_i(x,\, y) = \begin{cases} \tau^{\kappa}(x) H(\delta_1 \tau(x) - |y-x|_{\lambda}), & 5A;8\ \kappa > 0; \\ |y-x|_{\lambda}^{\kappa} H(\delta_1 \tau(x) - |y-x|_{\lambda}), & 5A;8\ \kappa < 0; \end{cases} \tag{7}$$

$$k_0(x,\, y) = \tau^{\kappa-1}(x) H(\delta_0 \tau(x) - |y-x|_{\lambda}). \tag{8}$$

В свою очередь оценка (6) приводит к неравенству

$$\left\| f^{(\alpha)} \right\|_{L_{q,\,\omega}(G)} \le \|K_0|f|\|_{L_{q,\,\omega}(G)} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left\| K_i |D_i^{l_i} f| \right\|_{L_{q,\,\omega}(G)}.$$

Выпишем для операторов

$$K_i f(x) = \int\limits_G k_i(x,\, y) f(y)dy \quad (i = 0,\, 1, ...,\, n)$$

условия лемм 1 и 2 в [3; 104], рассматривая K_0 как оператор из $L_{p,\,\upsilon}(G)$ в $L_{q,\,\omega}(G)$, а K_i как оператор из $L_{p_i,\,\rho_i}(G)$ в $L_{q,\,\omega}(G)$. При $i = 0$

$$A_{0,\sigma,q,\upsilon,\omega}(x)=ess\sup_{y\in Q(x)}\left(\int\limits_{Q(x)}|k_0(t,y)|^{\sigma}\psi_0^q(t)\omega(t)dt\right)^{1/q}<<$$

$$<<ess\sup_{y\in Q(x)}c(\delta)\left(\int\limits_{Q(x)}\left(\tau(t)^{-q(\alpha,\lambda)-q|\lambda|/p}\left(|Q(x)|^{-1}\int\limits_{Q(t)}\upsilon(y)dy\right)^{1/p'}\right)^{q}\omega(t)dt\right)^{1/q}<<$$

$$<<\tau(x)^{-(\alpha,\lambda)-|\lambda|/p}\left(\int\limits_{Q(x)}(M^*\upsilon(t))^{q/p'}\omega(t)dt\right)^{1/q}.$$

Пусть $\chi_\delta(y)=\chi(x,y)$. Тогда

$$B_0^q=\int\limits_G\left(\int\limits_{G\setminus c_0^\lambda Q(x)}|k_0(x,y)|^{p'}\tilde{\upsilon}(y)dy\right)^{q/p'}\omega(x)dx<<$$

$$<<\int\limits_G\left(\int\limits_{G\setminus c_0^\lambda Q(x)}\left(\tau(x)^{\kappa-1}\chi_\delta(x,y)\right)^{p'}\tilde{\upsilon}(y)dy\right)^{q/p'}\omega(x)dx=$$

$$=\int\limits_G\left(\int\limits_{G\setminus c_0^\lambda Q(x)}\tilde{\upsilon}(y)dy\right)^{q/p'}\tau(x)^{(\kappa-1)q}\omega(x)dx.$$

Из оценок леммы 1 в [3; 104] следует, что $K_0\in L(L_{p,\upsilon}(G),L_{q,\omega}(G))$, если

$$A_0=\sup_{x\in G}d(x)^{-(\alpha,\lambda)-|\lambda|/p}\left[\int\limits_{Q(x)}(M^*\upsilon(t))^{q/p'}\omega(t)dt\right]^{1/q}<\infty;$$

$$B_0=\left[\int\limits_G d(x)^{(-(\alpha,\lambda)-|\lambda|/p)q}\omega(x)\left(\int\limits_{G\setminus c_0^\lambda Q(x)}\upsilon(y)dy\right)^{q/p'}dx\right]^{1/q}<\infty.$$

Пусть $r_i=(1-\frac{\sigma}{q})p_i^{'}$. Тогда для $k_i(x,y)$

$$\psi_i(x)=\left(\int\limits_{Q(x)}|k_i(x,y)|^{r_i}\tilde{\rho}_i(y)dy\right)^{1/p_i^{'}}<<\left(\int\limits_{Q(x)}|\tau(x)|^{\kappa r_i}\tilde{\rho}_i(y)dy\right)^{1/p_i^{'}}<<$$

$$<<\tau(x)^{\left(1-\frac{\sigma}{q}\right)\kappa}\left(\int\limits_{Q(x)}\tilde{\rho}_i(y)dy\right)^{1/p_i^{'}};$$

$$A_{i,\sigma,q,\upsilon,\omega}(x)=ess\sup_{y\in Q(x)}\left(\int\limits_{Q(x)}|k_i(t,y)|^{\sigma}\psi_i^q(t)\omega(t)dt\right)^{1/q}<<$$

$$<<ess\sup_{y\in Q(x)}\left(\int\limits_{Q(x)}|\tau(t)|^{\kappa q}\left(\int\limits_{Q(t)}\tilde{\rho}_i\right)^{q/p_i^{'}}\omega(t)dt\right)^{1/q}=$$

$$=\left(\int\limits_{Q(x)}\tau(t)^q\left(\int\limits_{Q(t)}\tilde{\rho}_i(y)dy\right)^{q/p_i^{'}}\omega(t)dt\right)^{1/q},\tag{9}$$

$$B_i = \left[\int\limits_G \left(\int\limits_{G \setminus c_0^\lambda Q(x)} |k_i(x,\, y)|^{p'} \tilde{\rho}_i(y) dy \right)^{q/p_i'} \omega(x) dx \right]^{1/q} <<$$

$$<< \left[\int\limits_G \left(\int\limits_{G \setminus c_0^\lambda Q(x)} |\tau(x)|^{\kappa p'} \tilde{\rho}_i(y) dy \right)^{q/p_i'} \omega(x) dx \right]^{1/q} <<$$

$$<< \left[\int\limits_G \tau(x)^{q\kappa} \omega(x) \left(\int\limits_{G \setminus c_0^\lambda Q(x)} \tilde{\rho}_i(y) dy \right)^{q/p_i'} dx \right]^{1/q} \quad (i = 1, ..., n). \tag{10}$$

Из оценок (9), (10) следует, что $K_i \in L(L_{p_i,\, \rho_i}(G),\, L_{q,\, \omega}(G))$, если

$$A_i = \sup_{x \in G} \left[\int\limits_{Q(x)} \tau(t)^{q\kappa} \left(\int\limits_{Q(t)} \tilde{\rho}_i(y) dy \right)^{q/p_i'} \omega(t) dt \right]^{1/q} < \infty \ \ (i = 1, ..., n);$$

$$B_i = \left[\int\limits_G \tau(x)^{q\kappa} \omega(x) \left(\int\limits_{G \setminus c_0^\lambda Q(x)} \tilde{\rho}_i(y) dy \right)^{q/p_i'} dx \right]^{1/q} < \infty \ \ (i = 1, ..., n).$$

Теорема доказана.

Список литературы

1 Кусаинова Л.К. Об ограниченности одного класса операторов в весовых пространствах Лебега / Л.К.Кусаинова / Труды межд. конф. — Семипалатинск, 2003. — С. 94, 95.

2 Бесов О.В. Интегральные представления функций и теоремы вложения для области с условием гибкого рога / О.В.Бесов / Тр. Матем. ин-та АН СССР. — 1984. — Т. 170. — С. 12–29.

3 Искакова Г.Ш. Об одном многовесовом анизотропном неравенстве вложения / Г.Ш.Искакова // Вестн. Караганд. ун-та. Серия Математика. — 2014. — № 1(73). — С. 103–108.

Г.Ш. Искакова, К.С. Шаукенова, М.С. Алдибекова

Көпсалмақты анизотропты кеңістіктерді енгізу жөнінде

Мақалада туындысының реті, қосындылау көрсеткіші және осы туындылардың салмақты көбейткіштері бойынша анизотропты Соболев кеңістігі қарастырылған. Функциялардың кеңістігін енгізу есептері өзінің дифференциалды сипаттамасымен олардың дифференциалды операторлар теориясында, қолданбалы сандық есептерде, интегралды операторлардың аппроксимациялық сипаттамасын зерттеуде қосындыланатын функциялардың кеңістігіне әсер ететін маңызды қосымшаларына байланысты өзекті мәселе. Зерттеу салмақты Лебег кеңістігінің интегралдық операторларының нормаларын бағалау үшін оқшаулау әдісімен жүргізілді. Мақалада жалпы типтегі анизотропты Соболев кеңістіктері үшін көп салмақты енгізу теоремасы алынды.

Кілт сөздер: енгізу, анизотропты, көпсалмақты, көп параметрлі, интегралдық операторлар, оқшаулау әдісі, салмақты кеңістіктер.

G.Sh. Iskakova, K.S. Shaukenova, M.S. Aldibekova

On a multi-weight inequality for the imbedding of anisotropic spaces

In this paper we consider Sobolev spaces that are anisotropic in order of derivatives, in terms of summability and weight factors for these derivatives. The problems of embedding spaces of functions with various differential characteristics are relevant in connection with their important applications in the theory of differential operators, in numerical applied problems, in the study of approximate characteristics of integral operators acting in spaces of summable functions. The study was carried out by the localization method for estimating the norms of integral operators in weighted Lebesgue spaces. In this paper we obtain a multi-weight embedding theorem for anisotropic Sobolev spaces of general type.

Keywords: embedding, anisotropic, multi-weight, multiparameter, integral operators, localization method, weighted spaces.

References

1 Kusainova, L.K. (2003). Ob ohranichennosti odnoho klassa operatorov v vesovykh prostranstvakh Lebeha [About limitation of one class of operators in weight spaces Lebegs]. *Trudy mezhdunarodnoi konferentsii – Works of the international conference, 94, 95.* Semipalatinsk [in Russian].

2 Besov, O.V. (1984). Intehralnye predstavleniia funktsii i teoremy vlozheniia dlia oblasti s usloviem hibkoho roha [Integrated concepts of functions and theorems of an investment for area with a condition of a flexible horn]. *Trudy Matematicheskoho instituta AN SSSR – Works of Mathematical college AN SSSR, Vol. 170,* 12–29 [in Russian].

3 Iskakova, G.Sh. (2014). Ob odnom mnohovesovom anizotropnom neravenstve vlozheniia [On one multi-weight anisotropic inequality of embedding]. *Vestnik Karahandinskoho universiteta. Seriia Matematika – Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series, 1(73),* 103–108 [in Russian].