

ҚАРАҒАНДЫ
УНИВЕРСИТЕТІНІҢ
ХАБАРШЫСЫ
ВЕСТНИК
КАРАГАНДИНСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

ISSN 0142-0843

МАТЕМАТИКА
4(68)/2012
МАТЕМАТИКА

Қазан–қараша–желтоқсан
1996 жылдан бастап шығады
Жылына 4 рет шығады

Октябрь–ноябрь–декабрь
Издается с 1996 года
Выходит 4 раза в год

Собственник РГП

Бас редакторы — Главный редактор

• • •
, - • ,

Зам. главного редактора Х.Б.Омаров, д-р техн. наук
Ответственный секретарь Г.Ю.Аманбаева, д-р филол. наук

Серияның редакция алқасы — Редакционная коллегия серии

М.И.Рамазанов, научный редактор д-р физ.-мат. наук, проф.;
М.Отелбаев, акад. НАН РК, д-р физ.-мат. наук, проф.;
Б.Р.Ракишев, акад. НАН РК, д-р техн. наук, проф.;
З.Б.Беркалиев, PhD, профессор (США);
А.А.Шкаликов, д-р физ.-мат. наук, проф. (Россия);
Н.А.Бокаев, д-р физ.-мат. наук, проф.;
М.Т.Дженалиев, д-р физ.-мат. наук, проф.;
К.Т.Искаков, д-р физ.-мат. наук, проф.;
Л.К.Кусаинова, д-р физ.-мат. наук, проф.;
Е.Д.Нурсултанов, д-р физ.-мат. наук, проф.;
Е.С.Смаилов, д-р физ.-мат. наук, проф.;
У.У.Умербаев, д-р физ.-мат. наук, проф.;
Г.Акишев, д-р физ.-мат. наук;
А.Р.Ешкеев, д-р физ.-мат. наук;
Д.М.Ахманова, отв. секретарь канд. физ.-мат. наук

Адрес редакции: 100028, г. Караганда, ул. Университетская, 28

Тел.: 77-03-69 (внутр. 1026); факс: (7212) 77-03-84.

E-mail: vestnick_kargu@ksu.kz. Сайт: <http://www.ksu.kz>

Редакторы Ж.Т.Нұрмұханова
Техн. редактор Д.Н.Муртазина

Издательство Карагандинского
государственного университета
им. Е.А.Букетова
100012, г. Караганда,
ул. Гоголя, 38,
тел.: (7212) 51-38-20
e-mail: izd_kargu@mail.ru

Басуға 26.12.2012 ж. қол қойылды.
Пішімі 60×84 1/8.
Офсеттік қағазы.
Көлемі 15,12 б.т.
Таралымы 300 дана.
Бағасы келісім бойынша.
Тапсырыс № 855.

Подписано в печать 26.12.2012 г.
Формат 60×84 1/8.
Бумага офсетная.
Объем 15,12 п.л. Тираж 300 экз.
Цена договорная. Заказ № 855.

Отпечатано в типографии
издательства КарГУ
им. Е.А.Букетова

© Карагандинский государственный университет, 2012

Зарегистрирован Министерством культуры и информации Республики Казахстан.
Регистрационное свидетельство № 13104–Ж от 23.10.2012 г.

| | | | |
|--|-----|--|-----|
| <i>Асанов А., Калимбетов Б., Тойгонбаева А.</i> Бірінші ретті Фредгольм-Стилтьес сызықтық интегралдық теңдеуінің бір класы туралы | 3 | <i>Асанов А., Калимбетов Б., Тойгонбаева А.</i> Об одном классе линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стилтьеса первого рода | 3 |
| <i>Ахманова Д.М., Космакова М.Т.</i> Бір айнымалы және басқа шексіз интегралдау шегі бар бір интегралды теңдеудің шешіміне | 7 | <i>Ахманова Д.М., Космакова М.Т.</i> К решению одного интегрального уравнения с одним переменным и другим бесконечным пределами интегрирования | 7 |
| <i>Бейсебаев А.Қ., Богатова Е.К., Заикина Т.В.</i> Шектік жағдайы бойынша рамалық конструкцияны беріктілікке есептеу | 11 | <i>Бейсебаев А.Қ., Богатова Е.К., Заикина Т.В.</i> Прочностной расчет рамной конструкции по предельному состоянию | 11 |
| <i>Жиеналиев М.Т., Иманбердиев Қ.Б., Айменова Қ.Ә.</i> Бигармоникалық теңдеу үшін корректі емес есепті шешудің тиімділік әдісі | 21 | <i>Дженалиев М.Т., Иманбердиев К.Б., Айменова К.А.</i> Оптимизационный метод решения некорректной задачи для бигармонического уравнения | 21 |
| <i>Есбаев А.Н., Жанболова А.К., Петерс С.Н.</i> Әлсіз жүктелген параболалық теңдеу үшін берілген бірінші шеттік есеп туралы | 31 | <i>Есбаев А.Н., Жанболова А.К., Петерс С.Н.</i> О первой краевой задаче для слабо-нагруженного параболического уравнения | 31 |
| <i>Ешкеев А.Р.</i> Δ-йонсондық теориялар | 37 | <i>Ешкеев А.Р.</i> Δ-йонсоновские теории | 37 |
| <i>Ешкеев А.Р., Оспанов Р.М., Ульбрихт О.И.</i> Δ-йонсондық теориялардың экзистенциалды формулалардың торы | 41 | <i>Ешкеев А.Р., Оспанов Р.М., Ульбрихт О.И.</i> Решетки экзистенциальных формул Δ-йонсоновской теории | 41 |
| <i>Жұмағұлова С.К., Саданова Б.М.</i> Құжаттарды локалды коллекцияларда іздеу құралдарды зерттеу және құру | 50 | <i>Жумагулова С.К., Саданова Б.М.</i> Исследование и разработка средств поиска в локальных коллекциях документов | 50 |
| <i>Калимбетов Б., Маматкулова М.</i> Тұрақтылық ауысқан жағдайдағы сингулярлы-ауытқулы дифференциалдық теңдеулердің шешімдерінің асимптотикалық тәртіптері | 55 | <i>Калимбетов Б., Маматкулова М.</i> Асимптотические поведения решений сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости | 55 |
| <i>Каренов Р.С.</i> Басқару есептерінде имитациялық модельдеуді қолданудың ілімдік және әдістемелік негіздері | 60 | <i>Каренов Р.С.</i> Методика применения способов парной корреляции в экономических исследованиях | 60 |
| <i>Каренов Р.С.</i> Экономикалық зерттеулерде жұп корреляция тәсілдерін қолдану әдістемесі | 75 | <i>Каренов Р.С.</i> Теоретические и методические основы применения имитационного моделирования в задачах управления | 75 |
| <i>Кервенева Қ.Е.</i> Математиканы оқытуда дидактикалық ойындарды қолдану мәселесі жайында | 89 | <i>Кервенева К.Е.</i> О вопросах применения дидактических игр при изучении математики | 89 |
| <i>Минглибаев М.Дж., Маемерова Г.М.</i> Үш дене мәселесінің автономды емес дифференциалдық теңдеулерін «Mathematica» жүйесімен шешу | 95 | <i>Минглибаев М.Дж., Маемерова Г.М.</i> Решение неавтономных дифференциальных уравнений задачи трех тел с помощью системы «Mathematica» | 95 |
| <i>Нұрланова Б.М., Әбілдаева Г.Б.</i> Интернет-сауда ақпараттық жүйелерін құру принциптері | 103 | <i>Нурланова Б.М., Абилдаева Г.Б.</i> Принципы построения информационных систем Интернет-торговли | 103 |
| <i>Тұрметов Б.Х., Мұратбекова М.А.</i> Шарда кейбір шеттік есептерді шешудің операторлық әдісі туралы | 108 | <i>Турметов Б.Х., Муратбекова М.А.</i> Об операторном методе решения некоторых краевых задач в шаре | 108 |
| АВТОРЛАР ТУРАЛЫ МӘЛІМЕТТЕР | 116 | СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ | 116 |
| 2012 жылғы «Қарағанды университетінің хабаршысында» жарияланған мақалалардың көрсеткіші. «Математика» сериясы | 118 | Указатель статей, опубликованных в «Вестнике Карагандинского университета» в 2012 году. Серия «Математика» | 118 |

А.Асанов¹, Б.Калимбетов², А.Тойгонбаева³

¹Университет «Манас», Бишкек, Республика Кыргызстан;

²Международный казахско-турецкий университет им. Ясави, Туркестан;

³Ошский государственный университет, Республика Кыргызстан (E-mail: bkalimbetov@mail.ru)

-

В статье рассмотрено линейное интегральное уравнение Фредгольма-Стилтьеса первого рода. Используя метод, предложенный А.Асановым, получены оценки устойчивости и построен регуляризирующий оператор, по М.М.Лаврентьеву, для решения сингулярно возмущенного интегрального уравнения первого рода. Исследованы вопросы единственности решения интегрального уравнения и доказана теорема об оценке устойчивости решений в классе L_2 .

Ключевые слова: интегральные уравнения Фредгольма-Стилтьеса первого рода, регуляризирующий оператор, ортонормированные собственные функции.

Рассмотрим уравнение вида

$$Ku = \int_a^b K(t,s)u(s)d\varphi(s) = f(t), \quad t \in [a,b], \quad (1)$$

где $\varphi(t)$ — возрастающая непрерывная функция на $[a,b]$;

$$K(t,s) = \begin{cases} A(t,s), & a \leq s \leq t \leq b; \\ B(t,s), & a \leq t \leq s \leq b. \end{cases} \quad (2)$$

Предполагается, что $A(t,s)$, $B(t,s)$ и $f(t)$ — заданные функции; $u(t)$ — искомая функция.

Различные вопросы для интегральных уравнений исследовались во многих работах [1–4]. В частности, в работе [1] предложен метод регуляризации для интегрального уравнения Фредгольма первого рода. В работе [4] исследовались вопросы единственности решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода. В данной работе, используя метод, предложенный в [4], получены оценки устойчивости и построен регуляризирующий оператор, по М.М.Лаврентьеву, для решения интегральных уравнений первого рода (1).

В силу (2) уравнение (1) запишем в виде:

$$\int_a^b A(t,s)u(s)d\varphi(s) + \int_a^b B(t,s)u(s)d\varphi(s) = f(t). \quad (3)$$

Умножая обе части (3) на $u(t)$ и интегрируя по t в пределах от a до b , получим

$$\int_a^b \int_a^t A(t,s)u(s)u(t)d\varphi(s)d\varphi(t) + \int_a^b \int_a^b B(t,s)u(s)u(t)d\varphi(s)d\varphi(t) = \int_a^b f(t)u(t)d\varphi(t). \quad (4)$$

Применяя формулу Дирихле, из (4) имеем

$$\int_a^b \int_a^t A(t,s)u(s)u(t)d\varphi(s)d\varphi(t) + \int_a^b \int_a^s B(t,s)u(s)u(t)d\varphi(s)d\varphi(t) = \int_a^b f(t)u(t)d\varphi(t),$$

то есть

$$\int_a^b \int_a^t [A(t,s) + B(s,t)] u(s) u(t) d\varphi(s) d\varphi(t) = \int_a^b f(t) u(t) d\varphi(t).$$

Обозначим $H(t,s) = \frac{1}{2} [A(t,s) + B(s,t)]$.

Тогда последнее уравнение примет вид

$$2 \int_a^b \int_a^t H(t,s) u(s) d\varphi(s) u(t) d\varphi(t) = \int_a^b f(t) u(t) d\varphi(t). \quad (5)$$

Предполагаем, что ядро $H(t,s) \in C(G)$, где $G = \{(t,s): a \leq s \leq t \leq b\}$.

Введем новую функцию $M(t,s)$ следующим образом:

$$M(t,s) = \begin{cases} H(t,s), & a \leq s \leq t \leq b; \\ H(s,t), & a \leq t \leq s \leq b. \end{cases} \quad (6)$$

Ясно, что $M(t,s) = M(s,t)$.

Поскольку $H(t,s) \in L_2[a,b] \times [a,b]$, тогда известно, что

$$M(t,s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(t) \varphi_i(s)}{\lambda_i}, \quad (7)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — характеристические числа ядра $M(t,s)$, расположенные в порядке возрастания их модулей $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$, и $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots$ — соответствующие ортонормированные собственные функции, т.е.

$$\varphi_i(t) = \lambda_i \int_a^b M(t,s) \varphi_i(s) ds, \quad i = 1, 2, \dots$$

Пусть $M(t,s)$ — полное ядро, где $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$. Семейство множеств корректностей M_α , зависящее от параметра α ,

$$M_\alpha = \left\{ u(t) \in C[a,b] : \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^\alpha |u_i|^2 \leq c \right\},$$

где $c > 0, 0 < \alpha < \infty, u_i = \int_a^b u(t) \varphi_i(t) d\varphi(t), (i = 1, 2, \dots)$.

Если $u(t) \in M_\alpha$, то

$$\|u(t)\|_{L_2}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^\alpha |u_i|^2 \leq \frac{c}{\lambda_1^\alpha}.$$

Будем предполагать, что $f(t) \in K(M_\alpha)$. Тогда уравнение (1) имеет решение $u(t) \in M_\alpha$ и справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \left| \int_a^b u(t) \varphi_i(t) d\varphi(t) \right|^2 &= \int_a^b f(t) u(t) d\varphi(t) \leq \int_a^b |f(t)| \cdot |u(t)| d\varphi(t) \leq \\ &\leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 d\varphi(t) \right)^{1/2} \left(\int_a^b |u(t)|^2 d\varphi(t) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} |u_i|^2 \leq \|f(t)\|_{L_2} \|u(t)\|_{L_2}. \quad (8)$$

С другой стороны, применив неравенство Гёльдера при $p = \frac{1+\alpha}{\alpha}, q = 1+\alpha$, получим:

$$\|u(t)\|_{L_2}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|u_i|^{2\alpha}}{\lambda_i^{1+\alpha}} \lambda_i^\alpha |u_i|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|u_i|^2}{\lambda_i} \right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^\alpha |u_i|^2 \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

Учитывая, что $u(t) \in M_\alpha$ и неравенство (8), из последнего неравенства имеем

$$\|u(t)\|_{L_2}^2 \leq c^{1+\alpha} \left[\|f(t)\|_{L_2} \cdot \|u(t)\|_{L_2} \right]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Умножая обе части последнего неравенства на $\|u(t)\|_{L_2}^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}$, получим

$$\|u(t)\|_{L_2}^{2-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \leq c^{1+\alpha} \|f(t)\|_{L_2}^{\frac{\alpha}{1+\alpha}},$$

т.е. $\|u(t)\|_{L_2}^{\frac{2+\alpha}{1+\alpha}} \leq c^{1+\alpha} \|f(t)\|_{L_2}^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$

Отсюда

$$\|u(t)\|_{L_2} \leq \left[c^{1+\alpha} \|f(t)\|_{L_2}^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \right]^{\frac{1+\alpha}{2+\alpha}}.$$

Следовательно, мы получим следующую оценку устойчивости:

$$\|u(t)\|_{L_2} \leq c^{\frac{1}{2+\alpha}} \|f(t)\|_{L_2}^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}, \quad 0 < \alpha < \infty. \tag{9}$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. Пусть ядро $M(t,s)$ положительно определено, $K(M_\alpha) \subset C_{[a,b]}$ — образ M_α при отображении K . Тогда на множестве $K(M_\alpha)$ оператор K^{-1} , обратный к K , равномерно непрерывен с гёльдеровым показателем $\frac{\alpha}{2+\alpha}$, т.е. справедлива оценка (9).

Покажем, что решение уравнения

$$\varepsilon u(t, \varepsilon) + \int_a^b K(t,s)u(s,\varepsilon)d\varphi(s) = f(t), \quad t \in (a,b), \varepsilon > 0 \tag{10}$$

будет регуляризирующим для уравнения (1) на множестве M_α .

В самом деле, сделав следующую подстановку в уравнение (10)

$$u(t, \varepsilon) = u(t) + \xi(t, \varepsilon),$$

где $u(t) \in M_\alpha$ — решение уравнения (1), получим

$$\varepsilon \xi(t, \varepsilon) + \int_a^b K(t,s)\xi(s,\varepsilon)d\varphi(s) = -\varepsilon u(t). \tag{11}$$

Отсюда, учитывая, что $M(t,s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(t)\varphi_i(s)}{\lambda_i}$ и умножая уравнение (11) на $\xi(t, \varepsilon)$ и интегрируя,

имеем

$$\varepsilon \|\xi(t, \varepsilon)\|_{L_2}^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\xi_i(\varepsilon)|^2}{\lambda_i} \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} |u_i| |\xi_i(\varepsilon)|, \tag{12}$$

где $\xi_i(\varepsilon)$ — коэффициенты Фурье для функции $\xi(t, \varepsilon)$, по ортонормированной системе $\{\varphi_i(t)\}_1^\infty$.

Применяя неравенство Гёльдера при $p = q = \frac{1}{2}$, из (12) получим

$$\|\xi(t, \varepsilon)\|_{L_2} \leq \|u(t)\|_{L_2}; \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\xi_i(\varepsilon)|^2}{\lambda_i} \leq \varepsilon \|u(t)\|_{L_2}^2 \leq \frac{\varepsilon c}{\lambda_1^\alpha}, \quad \varepsilon > 0, \tag{14}$$

с другой стороны,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |u_i| |\xi_i(\varepsilon)| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\xi_i(\varepsilon)|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}} \lambda_i^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}} |u_i|^{\frac{1}{1+\alpha}} |\xi_i(\varepsilon)|^{\frac{1}{1+\alpha}} |u_i|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Отсюда, после применения к правой части обобщенного неравенства Гёльдера при $p = \frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$, $q = 2(1+\alpha)$, $m = 2(1+\alpha)$, $n = \frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$, имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} |u_i| |\xi_i(\varepsilon)| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\xi_i(\varepsilon)|^2}{\lambda_i} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^\alpha |u_i|^2 \right)^{\frac{1}{q}} \|\xi(t, \varepsilon)\|_{L_2}^{\frac{1}{q}} \|u(t)\|_{L_2}^{\frac{1}{p}}.$$

Далее в силу $u(t) \in M_\alpha$, (13) и (14):

$$\sum_{i=1}^{\infty} |u_i| |\xi_i(\varepsilon)| \leq \left(\frac{\varepsilon c}{\lambda_1^\alpha} \right)^{\frac{1}{p}} c^{\frac{1}{q}} \|u(t)\|_{L_2}^{\frac{1}{q}} \|u(t)\|_{L_2}^{\frac{1}{p}},$$

Подставляя $p = \frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$, $q = 2(1+\alpha)$, получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} |u_i| |\xi_i(\varepsilon)| \leq c^{\frac{1}{2(1+\alpha)}} \left(\frac{c}{\lambda_1^\alpha} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\varepsilon c}{\lambda_1^\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}, \tag{15}$$

т.е.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} |u_i| |\xi_i(\varepsilon)| &\leq c^{\frac{1}{2(1+\alpha)}} c^{\frac{1}{4}} c^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}} \lambda_1^{-\frac{\alpha}{4}} \lambda_1^{-\frac{\alpha^2}{2(1+\alpha)}} \varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}, \\ \sum_{i=1}^{\infty} |u_i| |\xi_i(\varepsilon)| &\leq c^{\frac{3}{4}} \lambda_1^{-\frac{\alpha(1+3\alpha)}{4(1+\alpha)}} \varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}. \end{aligned} \tag{16}$$

Учитывая (16), из (12) имеем

$$\|u(t, \varepsilon) - u(t)\|_{L_2} \leq c^{\frac{3}{8}} \lambda_1^{-\frac{\alpha(1+3\alpha)}{8(1+\alpha)}} \varepsilon^{\frac{\alpha}{4(1+\alpha)}}, \quad 0 < \alpha < \infty. \tag{17}$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. Пусть $f(t) \in K(M_\alpha)$, $u(t)$ — решение уравнения (1); $u(t, \varepsilon)$ — решение уравнения (10).

Тогда справедлива оценка (17).

Замечание. Если $f(t) \in K(M_1)$, то в силу неравенства

$$\sum_{i=1}^{\infty} |u_i| |\xi_i(\varepsilon)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|u_i|}{\sqrt{\lambda_i}} \sqrt{\lambda_i} |\xi_i(\varepsilon)| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\xi_i(\varepsilon)|^2}{\lambda_i} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |u_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

можно улучшить оценку (17), при $\alpha = 1$, а именно:

$$\|u(t, \varepsilon) - u(t)\|_{L_2} \leq c^{\frac{1}{4}} \left(\frac{c}{\lambda_1} \right)^{\frac{1}{4}} \varepsilon^{\frac{1}{4}}.$$

References

- 1 Lavrent'ev M.M. On integral equations of the first kind // Rep. AN USSR. — 1959. — Т. 127. — № 1. — P. 31–38.
- 2 Imanaliev M.I., Asanov A. On the solutions of system of nonlinear Volterra integral equations of the first kind // Rep. AN USSR. — 1989. — Т. 309. — № 5. — P. 1052–1058.
- 3 Asanov A. Regularization, Uniqueness and Existence of Solutions of Volterra Equations of the First Kind. — Utrecht: VSP, 1998. — 272 p.
- 4 Asanov A., Kadenova Z.A. On the uniqueness of solutions for a class of integral equations of the first kind // Proceedings of the Scientific Conference «Mathematical modeling and boundary value problems». — Samara: Samara State Technical University, 2004. — P. 3. — P. 122-126.

А.Асанов, Б.Калимбетов, А.Тойгонбаева

-

Мақалада бірінші ретті Фредгольм-Стилтьес сызықтық интегралдық теңдеу қарастырылды. А.Асанов ұсынған әдісті қолдана отырып, бірінші ретті сингулярлы-ауытқулы интегралдық теңдеулерді шешу үшін, М.М.Лаврентьев бойынша, тұрақтылық бағасы алынып, регуляризациялау операторы құрылды. Интегралдық теңдеудің шешімінің жалғыз екені зерттелді және L_2 класында шешімдердің тұрақтылық бағасы туралы теорема дәлелденді.

А.Асанов, В.Калимбетов, А.Тойгонбаева

A class linear integral equations of Fredholm-Stilties of the first kind

In this article the linear integral equation of Fredholm- Stilties of the first kind is given. Using the method proposed in A.Asanov, estimates and stability built on M.M.Lavrentev regularizing operator for solving singularly perturbed integral equations of the first kind. The questions of uniqueness of solution of the integral equation and prove a theorem about the sustainability assessment solutions in the classroom L_2 .

УДК 517.956.3

Д.М.Ахманова, М.Т.Космакова

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: ahk_danna@mail.ru)

В статье рассмотрено интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода с переменным нижним пределом интегрирования. Особенность уравнения заключается, во-первых, в том, что промежуток интегрирования бесконечный и, во-вторых, при стремлении нижнего предела к верхнему значение интеграла стремится к единице. Такого рода интегральные уравнения возникают при решении краевых задач теории теплопроводности в нецилиндрических областях. Также к ним сводятся краевые задачи для спектрально-нагруженных параболических уравнений.

Ключевые слова: интегральные уравнения типа Вольтерра второго рода, краевые задачи с подвижной границей, преобразование Лапласа, модифицированная тета-функция.

При изучении некоторых нелокальных внутренне-граничных задач для параболического уравнения, спектрально-нагруженных параболических уравнений, задач с подвижной границей и обратных задач для параболических уравнений и т.д. [1–5] возникает необходимость исследования особых интегральных уравнений вида:

$$\psi(t) - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_t^{\infty} K(t, \tau) \psi(\tau) d\tau = f(t), \quad (t > 0), \quad (1)$$

где

$$K(\tau, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left(\frac{\tau+t}{(\tau-t)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(\tau+t)^2}{4a^2(\tau-t)}\right\} + \frac{1}{\sqrt{\tau-t}} \exp\left\{-\frac{\tau-t}{4a^2}\right\} \right). \quad (2)$$

К таким уравнениям также сводятся краевые задачи с подвижной границей в случае температурного нагрева (первая краевая задача в нецилиндрической области):

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

с граничными условиями:

$$v(x, t)|_{x=0} = v(t), \quad v(x, t)|_{x=t} = \omega(t), \quad v(x, t)|_{t=\infty} = 0.$$

Отметим, что уравнение (1) принципиальным образом отличается от уравнений Вольтерра второго рода, для которых решение существенно и единственно. Мы покажем, что соответствующее однородное уравнение

$$\psi(t) - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_t^\infty K(t, \tau) \psi(\tau) d\tau = 0, \quad (t > 0) \tag{3}$$

имеет нетривиальное решение.

Исследуем ядро $K(\tau, t)$ уравнения (1). Особенность ядра (2) заключается в том, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty K(\tau, t) = 1.$$

Действительно, пусть $\int_t^\infty K(t, \tau) d\tau = J_1(t) + J_2(t)$, где

$$J_1(t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_t^\infty \frac{\tau+t}{(\tau-t)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(\tau+t)^2}{4a^2(\tau-t)}\right\} d\tau;$$

$$J_2(t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau-t}} \exp\left\{-\frac{\tau-t}{4a^2}\right\} d\tau.$$

В интеграле $J_1(t)$ произведем замену $x = \sqrt{\tau-t}$ и следующие преобразования:

$$\frac{\tau+t}{4a(\tau-t)^{3/2}} d\tau = \left(\frac{t}{ax^2} + \frac{1}{2a}\right) dx = -d\left(\frac{t}{ax} - \frac{x}{2a}\right);$$

$$\frac{(\tau+t)^2}{4a^2(\tau-t)} = \left(\frac{t}{ax} - \frac{x}{2a}\right)^2 + \frac{2t}{a^2}.$$

Тогда $J_1(t)$ примет вид:

$$\begin{aligned} J_1(t) &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp\left\{-\left(\frac{t}{ax} - \frac{x}{2a}\right)^2 - \frac{2t}{a^2}\right\} d\left(\frac{t}{ax} - \frac{x}{2a}\right) = \\ &= -e^{-\frac{2t}{a^2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp\left\{-\left(\frac{t}{ax} - \frac{x}{2a}\right)^2\right\} d\left(\frac{t}{ax} - \frac{x}{2a}\right) = 2e^{-\frac{2t}{a^2}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим второе слагаемое ядра (2):

$$J_2(t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau-t}} \exp\left\{-\frac{\tau-t}{4a^2}\right\} d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty \exp\left\{-\left(\frac{\sqrt{\tau-t}}{2a}\right)^2\right\} d\left(\frac{\sqrt{\tau-t}}{2a}\right) = 1.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty K(\tau, t) d\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(2e^{-\frac{2t}{a^2}} + 1\right) = 1.$$

Теперь, используя соотношения

$$\tau + t = 2\tau - (\tau - t); \quad \frac{(\tau+t)^2}{4a^2(\tau-t)} = \frac{\tau t}{a^2(\tau-t)} + \frac{\tau-t}{4a^2},$$

уравнение (3) запишем в виде:

$$\begin{aligned} \psi(t) - \int_t^\infty \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{2\tau}{(\tau-t)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\tau t}{a^2(\tau-t)}\right\} - \frac{1}{\sqrt{\tau-t}} \exp\left\{-\frac{\tau t}{a^2(\tau-t)}\right\} + \frac{1}{\sqrt{\tau-t}} \right\} \\ \exp\left\{-\frac{\tau-t}{4a^2}\right\} \psi(\tau) d\tau = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

В силу [6] достаточно найти решение «упрощенного» уравнения:

$$\psi(t) - \int_t^{\infty} k^*(t, \tau) \psi(\tau) d\tau = 0, \quad (5)$$

где

$$k^*(t, \tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{2\tau}{(\tau-t)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\tau t}{a^2(\tau-t)}\right\} + \frac{1}{\sqrt{\tau-t}} \left(1 - \exp\left\{-\frac{\tau t}{a^2(\tau-t)}\right\}\right) \right\}.$$

В интегральном уравнении (5), произведя замены переменных $t = 1/t_1$, $\tau = 1/\tau_1$, получим

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{1}{t_1}\right) - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^{t_1} \frac{\sqrt{t_1}}{\tau_1^{3/2} \sqrt{t_1 - \tau_1}} \left(1 - \exp\left\{-\frac{1}{a^2(t_1 - \tau_1)}\right\}\right) \psi\left(\frac{1}{\tau_1}\right) d\tau_1 - \\ - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^{t_1} \frac{2t_1^{3/2}}{\tau_1^{3/2} (t_1 - \tau_1)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{a^2(t_1 - \tau_1)}\right\} \psi\left(\frac{1}{\tau_1}\right) d\tau_1 = 0. \end{aligned}$$

Разделив обе части последнего равенства на $t_1^{3/2}$, введем следующую замену:

$$y(t_1) = \frac{1}{t_1^{3/2}} \psi\left(\frac{1}{t_1}\right).$$

$$\begin{aligned} y(t_1) - \frac{1}{2a\sqrt{\pi} t_1} \int_0^{t_1} \frac{1}{\sqrt{t_1 - \tau_1}} \left(1 - \exp\left\{-\frac{1}{a^2(t_1 - \tau_1)}\right\}\right) y(\tau_1) d\tau_1 - \\ - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^{t_1} \frac{2}{(t_1 - \tau_1)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{a^2(t_1 - \tau_1)}\right\} y(\tau_1) d\tau_1 = 0. \end{aligned}$$

Для дальнейшего удобства последнее уравнение представим в виде:

$$\begin{aligned} t_1 \cdot y(t_1) - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^{t_1} \frac{1}{(t_1 - \tau_1)^{1/2}} \left(1 - \exp\left\{-\frac{1}{a^2(t_1 - \tau_1)}\right\}\right) y(\tau_1) d\tau_1 - \\ - t_1 \cdot \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^{t_1} \frac{2}{(t_1 - \tau_1)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{a^2(t_1 - \tau_1)}\right\} y(\tau_1) d\tau_1 = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

К уравнению (6), применив преобразование Лапласа, получим дифференциальное операторное уравнение относительно образа искомой функции

$$-y'(p) - \frac{1}{2a\sqrt{p}} \left(1 - \exp\left(-\frac{2\sqrt{p}}{a}\right)\right) \bar{y}(p) + \left\{ \exp\left(-\frac{2\sqrt{p}}{a}\right) \bar{y}(p) \right\}'_p = 0.$$

После несложных упрощений получим:

$$\bar{y}'(p) + \frac{1}{2a\sqrt{p}} \frac{ch \frac{\sqrt{p}}{a}}{sh \frac{\sqrt{p}}{a}} \bar{y}(p) = 0. \quad (7)$$

Решением дифференциального уравнения (7) является функция

$$\bar{y}(p) = C \cdot \frac{1}{sh \frac{\sqrt{p}}{a}}, \quad (8)$$

где $C = const$.

К (8) применим обратное преобразование Лапласа

$$y(t_1) = -C \left[\frac{\partial}{\partial v} \hat{\theta}_0 \left(\frac{v}{2}; a^2 t_1 \right) \right]_{v=0},$$

где

$$\widehat{\theta}_0(v; x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{x}\left(v+n+\frac{1}{2}\right)^2\right) - \sum_{n=-1}^{-\infty} n \cdot \exp\left(-\frac{1}{x}\left(v+n+\frac{1}{2}\right)^2\right) \right\}$$

– модифицированная тета-функция.

Так как

$$\begin{aligned} -\left[\frac{\partial}{\partial v}\widehat{\theta}_0\left(\frac{v}{2}; x\right)\right]_{v=0} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi x}^{3/2}} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4x}\right) - \sum_{n=-1}^{-\infty} (2n+1) \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4x}\right) \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi x}^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4x}\right), \end{aligned}$$

то получим, что решение исходного однородного интегрального уравнения (3) (или (4)) будет иметь вид:

$$\psi(t) = \frac{C}{a^3 \sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \exp\left(-\frac{n(n+1)}{4a^2}t\right).$$

При этом нужно отметить, что

$$|\psi(t)| \leq C \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{at} e^{-\frac{9t}{4a^2}} \right).$$

References

- 1 Kim E.I. Solution of a certain class of singular integral equations with line integrals // Dokl. AN SSSR (N.S). — 1957. — Vol. 113. — P. 24–27.
- 2 Soldatov A.P., Ramazanov M.I., Shaldykova B.A. About the boundary value problems for the spectrally-loaded parabolic operator. I // Vestnik of KarSU. Mathematics series. — 2011. — № 2 (62). — P. 85–92.
- 3 Soldatov A.P., Ramazanov M.I., Shaldykova B.A. About the boundary value problems for the spectrally-loaded parabolic operator. II // Vestnik of KarSU. Mathematics series. — 2011. — № 23 (62). — P. 88–95.
- 4 Akhmanova D.M., Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I. On a particular Volterra integral equation of second kind with a spectral parameter // Siberian Mathematical Journal. — 2011. — Vol. 52. — № 1. — P. 3–14.
- 5 Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I. Loaded equations are as a perturbation of differensial equations. — Almaty: Gylym, 2010. — P. 334.
- 6 Polyanin A.D., Manzhirov A.V. Handbook of Integral Equations. — Moskow: Fizmatlit, 2003. — P. 608.

Д.М.Ахманова, М.Т.Космакова

i

i i i

i

Мақалада интегралдаудың айнымалы төменгі шегі бар екінші текті Вольтерра интегралдық теңдеуі қарастырылды. Теңдеу, біріншіден, интегралдау аралығының шексіздігімен және, екіншіден, жоғарғы шекке төменгі шек ұмтылғанда интегралдың мәні бірге ұмтылуымен ерекшеленеді. Мұндай интегралды теңдеулер цилиндрлі емес аймақтардағы жылу өткізгіштік теориясының шектік есептерінің шешімі негізінде пайда болады. Сонымен қатар оларға спектралды-жүктелген параболалық теңдеулер үшін арналған шектік есептер де келтірілді.

D.M.Ahmanova, M.T.Kosmakova

For solution of one integral equation with one variable integration limit and the other infinite one

We consider the integral equation of the second kind of Volterra type with a variable lower limit of integration. Exception of the equation is, firstly, that the interval of integration is infinite, and secondly, in a convergence of lower limit to the upper one the integral tends to unity. Integral equations of this kind arise in the solution of boundary value problems of the theory of heat conduction in non-cylindrical domains. Also the value problems for spectrally loaded parabolic equations are reduced to them.

УДК 624.04

А.К.Бейсебаев, Е.К.Богатова, Т.В.Заикина

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: i_sunny@bk.ru)

В статье изложен алгоритм расчета рамных конструкций по предельному состоянию, основанный на постепенном увеличении интенсивности внешней нагрузки. Определены порядок появления пластических шарниров и соответствующая нагрузка. Для автоматизации расчета статически неопределимых систем методом сил использован алгоритм в матричной форме.

Ключевые слова: метод комбинированных механизмов, метод предельного состояния, эпюра, изгибающий момент, пластический шарнир.

Статически неопределимые сооружения менее материалоемки, чем статически определимые. Поэтому в строительной практике использование их более предпочтительно. В статически неопределимых системах достижение усилиями в некоторых из элементов их предельных значений не влечет за собой разрушения всей системы, если последняя за счет остальных элементов остается структурно неизменяемой, а потому, может воспринимать дополнительную нагрузку. Благодаря пластическим деформациям происходит перераспределение усилий в элементах, вследствие чего несущая способность всей системы повышается. Полное разрушение системы наступает тогда, когда будет исчерпана несущая способность числа связей, равная числу степеней свободы плюс единица.

Трудоемкость расчета рам состоит в том, что число возможных форм разрушения может быть достаточно велико и заранее невозможно установить, которая из них является действительной. Для нахождения действительной формы разрушения применяется *метод комбинированных механизмов*. Основанный на том, что для заданной рамы при заданном нагружении рассматриваются все возможные механизмы, которые могут быть получены путем составления различных комбинаций простых независимых механизмов разрушения, устанавливаемые в зависимости от расчетной схемы и действующей нагрузки. Далее для каждого механизма разрушения составляются уравнения равновесия. При этом число возможных простых независимых механизмов нагружения равно числу независимых уравнений равновесия [1].

Недостаток этого метода заключается в возможности не назначения всех возможных форм разрушения, что может привести к ошибочным неудовлетворительным результатам вычислений.

В [2] указан другой порядок расчета по методу предельного состояния: здесь предварительно проводится обычный упругий расчет, что позволяет определить наиболее напряженные и следующие за ними стержни конструкции. Однако в исследованиях, проведенных авторами, порядок появления упругих шарниров не подтвердился.

В данной работе предлагается расчет рам по предельному состоянию, основанный на постепенном увеличении внешней нагрузки, включении в расчетные схемы пластических шарниров, за счет чего степень статической неопределимости постепенно снижается. Расчет ведется вплоть до исчерпания несущей способности сооружения. В основе расчета статически неопределимых систем принят метод сил, который автоматизирован с помощью матричного алгоритма [3].

Весь алгоритм разбит на определенные этапы вычисления, результатом которых являются появление нового пластического шарнира, снижающего степень статической неопределимости конструкции на единицу, и определение соответствующей интенсивности внешней нагрузки.

Рассмотрим каркас двухпролетной рамы конструкции промышленного здания с параметрами и нагрузкой, приведенной на рисунке 1, а, где пролет $l = 10$ м, высота $h = 8$ м, $q_1 = q_2 = q_3 = q$, жесткости EI для всех элементов одинаковые. Расчеты проведены методом сил.

Первый этап. Степень статической неопределимости данной рамы

$$n = 2k - u + C_0 - 3,$$

где $k = 0$ — количество замкнутых контуров; $u = 0$ — количество простых шарниров; $C_0 = 9$ — количество опорных стержней, где $C_0 = 3$ — принятое количество опорных стержней в жестком защемлении.

Выберем основную систему метода сил, отбросив две крайние опоры и заменив их значения неизвестными реакциями X_1, X_2, \dots, X_6 (рис. 1, б).

Уравнения равновесия рамы, выраженные через неизвестные усилия X_1, X_2, \dots, X_6 , получим, приравнявая нулю суммарные перемещения в присоединенных связях и моменты в угловых связях (сосредоточенная сила в линейных связях). Система канонических уравнений метода сил данной рамы примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \dots + \delta_{1n}x_n + \Delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \dots + \delta_{2n}x_n + \Delta_{2p} &= 0 \\ \dots &\dots \\ \delta_{n1}x_1 + \delta_{n2}x_2 + \dots + \delta_{nn}x_n + \Delta_{np} &= 0 \end{aligned} \right\}, \tag{1}$$

где δ_{ij} — перемещение в основной системе по направлению i -й отброшенной связи от действия единичного усилия $X_j = 1$; Δ_{ip} — перемещение по i -му направлению от действия внешней нагрузки; X_i — искомое усилие по направлению i -ой отброшенной связи.

Для первого этапа система (1) имеет порядок $n_1 = 6$.

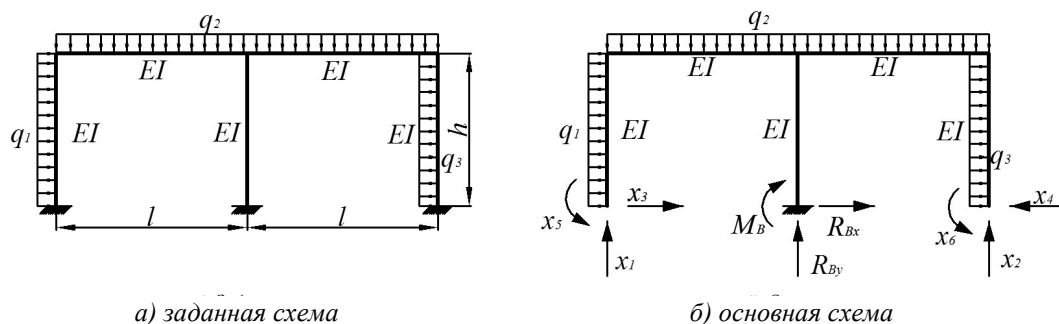


Рисунок 1. Шесть раз статически неопределимая рама

Единичные эпюры — $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \dots, \overline{M}_6$ от соответствующих единичных усилий и грузовая эпюра — M_{q1} в основной системе метода сил приведены на рисунке 2, а–ж.

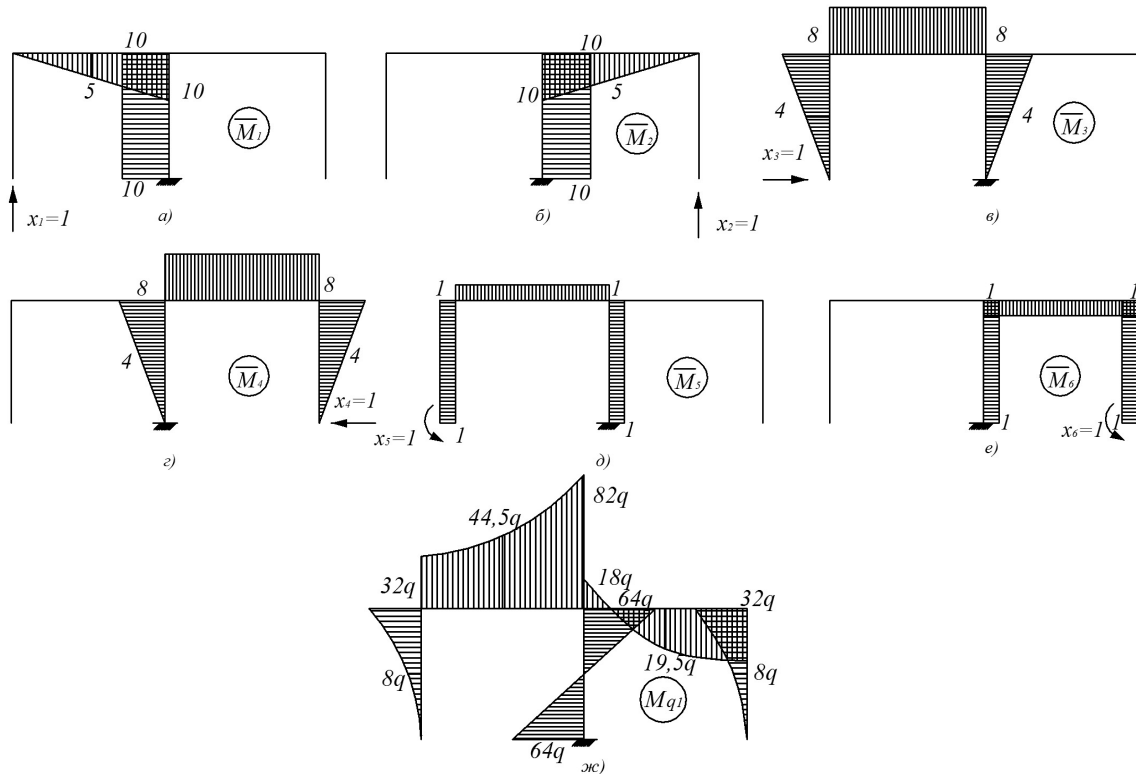


Рисунок 2. Единичные и грузовая эпюры

Расчет рам произведем в автоматизированном виде, в этом случае матричный алгоритм [3] имеет вид:

$$M = M_q - \bar{M}(\bar{M}^T L \bar{M})^{-1} \bar{M}^T L M_q, \quad (2)$$

где \bar{M} — матрица единичных моментов, сформулированная из эпюр, изображенных на рисунке 2, а–е; \bar{M}^T — транспонированная ей матрица; M_{q1} — матрица грузовых моментов из эпюры на рисунке 2, ж, построенной в основной системе; L — матрица податливости, которая в этом и последующих расчетах будет одинаковая.

Для решаемого этапа исходные матрицы, согласно эпюрам, приведенным на рисунке 2, а–ж, имеют вид:

$$\bar{M} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & -8 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & -8 & -1 & -1 \\ 5 & 5 & -8 & -8 & -1 & -1 \\ 10 & 10 & -8 & -8 & -1 & -1 \\ 0 & -20 & 0 & 16 & 0 & 2 \\ 0 & -20 & 0 & 8 & 0 & 2 \\ 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 10 & -10 & -8 & 8 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & -8 & 8 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 8 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -8 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad M_{q1} := \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -32 \\ -32 \\ -44.5 \\ -82 \\ 64 \\ 0 \\ -64 \\ -18 \\ 19.5 \\ 32 \\ -32 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$L := \begin{pmatrix} 8k1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32k10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8k1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10k2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 40k2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10k2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8k3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32k3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8k3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10k4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 40k4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10k4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8k5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32k5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8k5 \end{pmatrix}$$

Результаты расчета матричного алгоритма (2), вычисленные согласно программному обеспечению MathCad [4], следующие:

| | |
|----|---------|
| | 0 |
| 0 | -14.704 |
| 1 | 0.601 |
| 2 | -0.094 |
| 3 | -0.094 |
| 4 | 5.004 |
| 5 | -14.898 |
| 6 | 9.426 |
| 7 | -1.019 |
| 8 | -11.464 |
| 9 | -5.472 |
| 10 | 5.181 |
| 11 | -9.166 |
| 12 | 9.166 |
| 13 | 2.916 |
| 14 | -19.334 |

Согласно полученным данным, на рисунке 3 построена окончательная эпюра изгибающих моментов для шесть раз статически неопределимой рамы. В этом заключается первый этап расчетов.

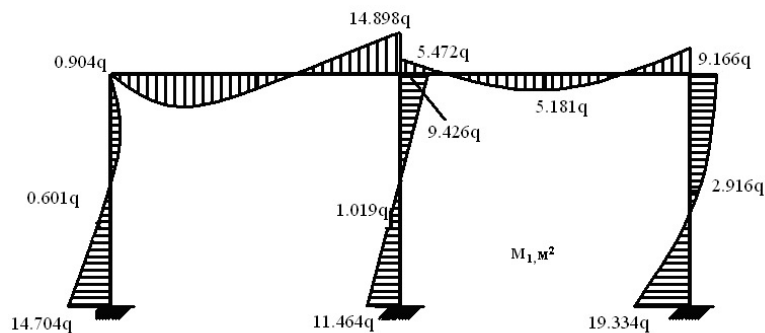


Рисунок 3. Окончательная эпюра изгибающих моментов

Второй этап. Далее согласно алгоритму, изложенному выше, в заданную систему (рис. 1, а) в месте полученного максимального момента в опору правой стойки врезаем первый пластический шарнир с изгибающим моментом, равным $M_{III1} = 19,344q$, полученный в нем на первом этапе. Новая заданная схема изображена на рисунке 4, а. Степень статической неопределимости рамы будет равна $n_2 = 5$.

Основную систему получим, отбросив крайние две опоры и заменив их значения неизвестными усилиями X_1, X_2, \dots, X_5 (рис. 4, б).

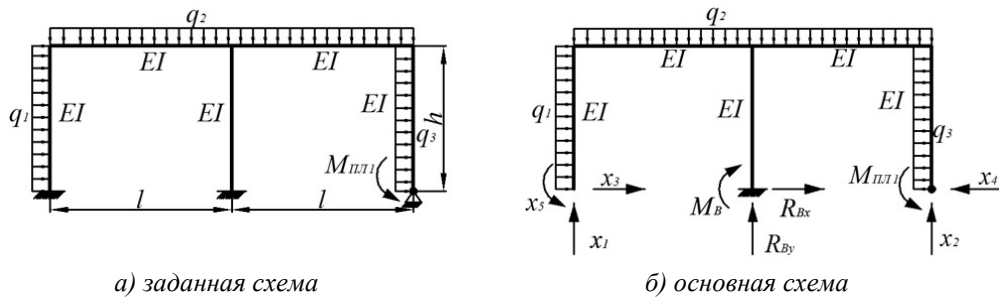


Рисунок 4. Рама с одним пластическим шарниром

Для данного второго этапа система канонических уравнений (1) будет иметь порядок $n_2 = 5$, а в матричном алгоритме (2) вместо одной грузовой эпюры M_{q_2} , на основании принципа независимости действия сил, представим суммарную грузовую эпюру $M_{\Sigma} = M_q + \sum M_{\text{пл}e}$ (e — количество пластических шарниров), тогда матричное уравнение (2) примет вид:

$$M = (M_q + \sum M_{\text{пл}e}) - \bar{M}(\bar{M}^T L \bar{M})^{-1} \bar{M}^T L (M_q + \sum M_{\text{пл}e}). \quad (3)$$

Данный алгоритм будет использоваться для построения окончательной эпюры моментов в этом и последующих этапах.

Единичные эпюры $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_5$ от соответствующих единичных усилий получают такие же, как и на предыдущем этапе (рис. 2, а–д), эпюра, полученная от момента при врезании пластического шарнира $M_{\text{пл}1}$, и грузовая эпюра M_q в основной системе приведены на рисунке 5 а, б.

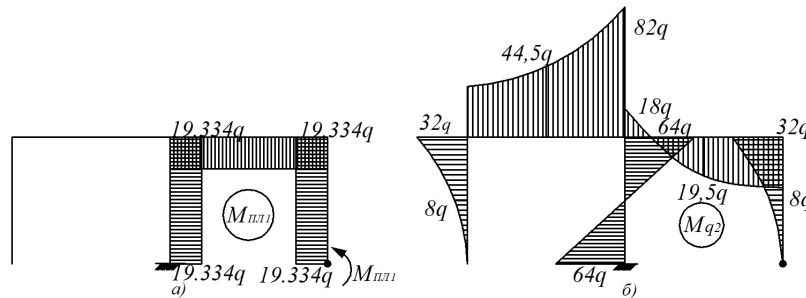


Рисунок 5. Эпюры от внешних нагрузок q и $M_{\text{пл}}$

Матрицы для расчета формируются методами сил:

$$\bar{M} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & -8 & 0 & -1 \\ 10 & 0 & -8 & 0 & -1 \\ -10 & 10 & 8 & -8 & 1 \\ -10 & 10 & 4 & -4 & 1 \\ -10 & 10 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; M_{q_2} := q_1; M_{\text{пл}1} := \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -32 \\ -32 \\ -44.5 \\ -82 \\ 64 \\ 0 \\ -64 \\ -18 \\ 19.5 \\ 32 \\ -32 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 19.334 \\ 19.334 \\ 19.334 \\ 19.334 \\ 19.334 \\ 19.334 \\ -19.334 \\ -19.334 \\ -19.334 \end{pmatrix}$$

где \bar{M} — матрица от единичных усилий, сформулированная из эпюр, изображенных на рисунке 2, а–д; M_{III1} — матрица от пластического момента, приложенного в врезанном шарнире (рис. 5, а); M_{q2} — матрица грузовых моментов из эпюры на рисунке 5, б.

Значение матрицы M_2 идентично окончательной эпюры, полученной на предыдущем этапе расчета. Увеличиваем q_1 до образования следующего пластического шарнира. Это оказывается при $q_1 = 1,22215q$ и значения окончательной эпюры моментов следующие:

| | |
|----|---------|
| | 0 |
| 0 | -19.334 |
| 1 | 0.527 |
| 2 | 0.834 |
| 3 | 0.834 |
| 4 | 6.14 |
| 5 | -19.108 |
| 6 | 12.59 |
| 7 | -1.423 |
| 8 | -15.435 |
| 9 | -6.518 |
| 10 | 6.673 |
| 11 | -10.69 |
| 12 | 10.69 |
| 13 | 5.455 |
| 14 | -19.334 |

Исходя из полученных значений, на рисунке 6 построена эпюра изгибающих моментов после второго этапа.

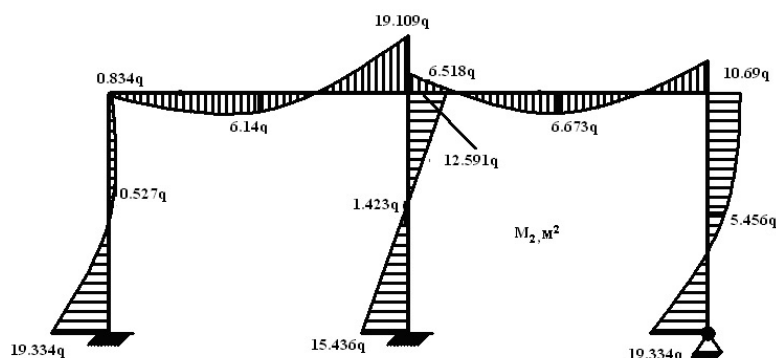


Рисунок 6. Окончательная эпюра изгибающих моментов для пять раз статически неопределимой рамы

С появлением второго пластического шарнира несущая способность может быть увеличена в $0,22215q$ раза, что на 22,2% выше по сравнению с несущей способностью появления одного пластического шарнира.

Третий этап. Составляем новую систему путем врезания второго пластического шарнира в заданную систему (рис. 4, а), в месте полученного максимального момента врезаем второй пластический шарнир с изгибающим моментом, равным $M_{III2} = 19,344q$, полученный в нем на втором этапе. Новая заданная система изображена на рисунке 7, а. Степень статической неопределимости полученной рамы будет равна $n_3 = 4$. Заданная схема и основная система приведены на рисунке 7.

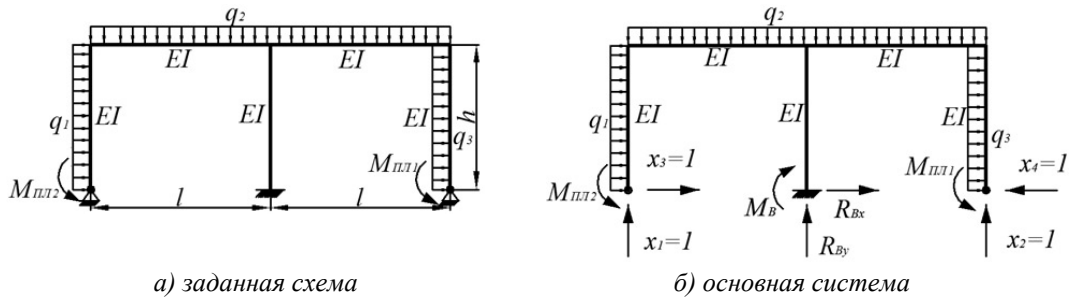


Рисунок 7. Заданная схема и основная система четыре раз статически неопределимой рамы

Единичные эпюры $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_4$ от соответствующих единичных усилий получаются такие же, как и в первом этапе (рис. 2, а–г), эпюры, полученные от моментов при врезании пластических шарниров $M_{пл2}$ и $M_{пл1}$, а также грузовая эпюра M_{q3} в основной системе приведены на рисунке 8, а–в.

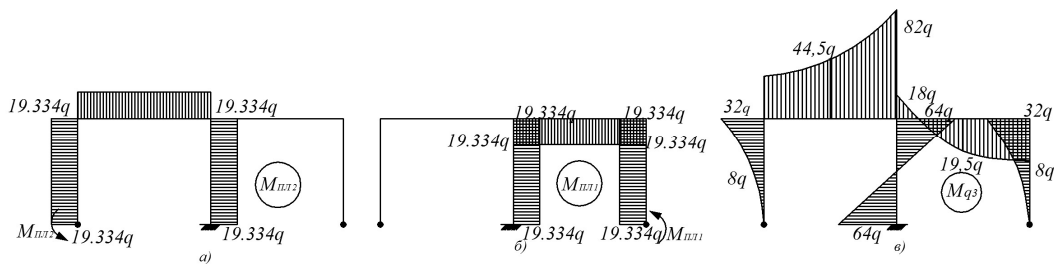


Рисунок 8. Грузовая эпюра в основной системе

Исходные матрицы данного этапа имеют вид:

$$\bar{M} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 5 & 0 & -8 & 0 \\ 10 & 0 & -8 & 0 \\ -10 & 10 & 8 & -8 \\ -10 & 10 & 4 & -4 \\ -10 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & -8 \\ 0 & 5 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; M_{q3} := \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -32 \\ -32 \\ -44.5 \\ -82 \\ 64 \\ 0 \\ -64 \\ -18 \\ 19.5 \\ 32 \\ -32 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}; M_{пл1} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 19.334 \\ 19.334 \\ 19.334 \\ 19.334 \\ 19.334 \\ 19.334 \\ -19.334 \\ -19.334 \\ -19.334 \end{pmatrix}; M_{пл2} := \begin{pmatrix} -19.334 \\ -19.334 \\ -19.334 \\ -19.334 \\ -19.334 \\ -19.334 \\ 19.334 \\ 19.334 \\ 19.334 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где \bar{M} — матрица от единичных усилий, сформулированная из эпюр, изображенных на рисунке 2, а–г; $M_{пл1}, M_{пл2}$ — матрицы от моментов, полученных при врезании пластических шарниров, согласно эпюр, изображенных на рисунке 8, а, б; M_{q3} — матрица грузовых моментов из эпюры на рисунке 8, в.

Используя матричный алгоритм (3), определяем значение q до образования следующего пластического шарнира. Это соответствует интенсивности нагрузки $q_2 = 1,2327q$ кН/м, значения ординат окончательной эпюры моментов при этом будут следующими:

| | |
|----|---------|
| | 0 |
| 0 | -19.334 |
| 1 | 0.628 |
| 2 | 0.866 |
| 3 | 0.866 |
| 4 | 6.175 |
| 5 | -19.334 |
| 6 | 12.821 |
| 7 | -1.455 |
| 8 | -15.731 |
| 9 | -6.513 |
| 10 | 6.749 |
| 11 | -10.807 |
| 12 | 10.807 |
| 13 | 5.598 |
| 14 | -19.334 |

Эпюра изгибающих моментов, соответствующая появлению третьего пластического шарнира, приведена на рисунке 9.

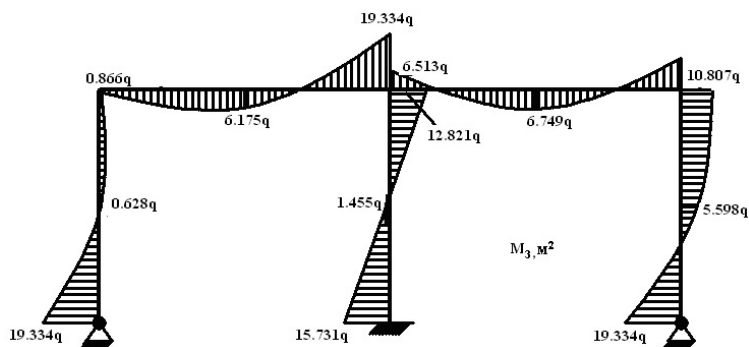


Рисунок 9. Эпюра изгибающих моментов для четыре раз статически неопределимой рамы

Максимальная нагрузка при появлении третьего пластического шарнира естественно больше по сравнению с первым на величину $0,2327 q$, что более на 23,27%, а по сравнению с появлением второго шарнира на $0,01055 q$ раз — 4,749%.

Четвертый этап. Следующую систему получаем путем врезания третьего пластического шарнира в заданную систему (рис. 7, а) в месте полученного максимального момента $M_{пл3} = 19,344 q$. Получается новая заданная система, которая изображена на рисунке 10, а. Степень статической неопределимости полученной рамы будет равна $n_4 = 3$. Заданная и основная схемы показаны на рисунке 10 а, б.

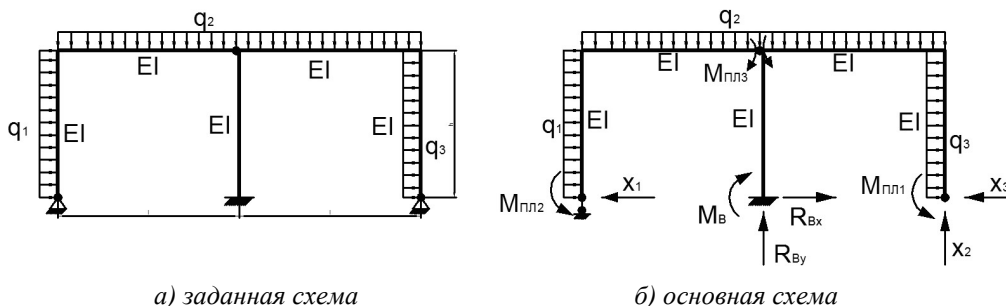


Рисунок 10. Три раза статически неопределимая рама

Единичные эпюры $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$ от соответствующих единичных усилий X_1, X_2, X_3 показаны на рисунке 11, а–в, эпюры, полученные от моментов при врезании пластических шарниров $M_{пл1}, M_{пл2}, M_{пл3}$, и грузовая эпюра M_{q4} в основной системе приведены на рисунке 11, г–ж.

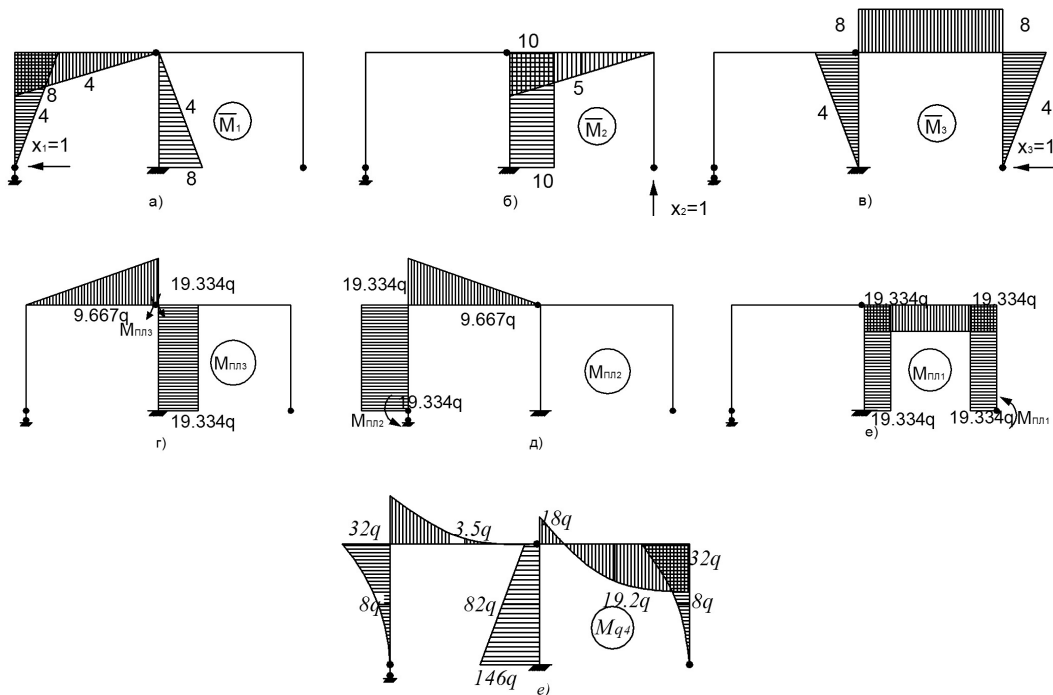


Рисунок 11. Единичные и грузовая эпюры в основной системе

Формируются исходные матрицы для расчета с использованием программного обеспечения MathCad.

$$\bar{M} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -8 \\ 4 & 10 & -4 \\ 8 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & -8 \\ 0 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; M_{q4} := \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -32 \\ -32 \\ -3.5 \\ 0 \\ -18 \\ -82 \\ -146 \\ -18 \\ 19.5 \\ 32 \\ -32 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}; M_{пл1} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 19.334 \\ 19.334 \\ 19.334 \\ 19.334 \\ 19.334 \\ 0 \\ -19.334 \\ -19.334 \\ -19.334 \end{pmatrix}; M_{пл2} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; M_{пл3} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 19.334 \\ 19.334 \\ 19.334 \\ 19.334 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

где \bar{M} — матрица от единичных усилий, сформулированная из эпюр, изображенных на рисунке 11, а–в; $M_{пл1}, M_{пл2}, M_{пл3}$ — матрицы от моментов, приложенные во врезанные пластические шарниры из эпюр, изображенных на рисунке 11, г–е; M_{q4} — матрица грузовых моментов из эпюры на рисунке 11, ж.

Используя матричный алгоритм (3), увеличиваем значения q до образования следующего пластического шарнира, что соответствует $q_3 = 1,34925 q$, параметры окончательной эпюры моментов следующие:

| | |
|----|---------|
| | 0 |
| 0 | -19.334 |
| 1 | 1.551 |
| 2 | 0.848 |
| 3 | 0.848 |
| 4 | 7.623 |
| 5 | -19.334 |
| 6 | 14.6 |
| 7 | -2.367 |
| 8 | -19.334 |
| 9 | -4.734 |
| 10 | 8.047 |
| 11 | -12.902 |
| 12 | 12.902 |
| 13 | 7.578 |
| 14 | -19.334 |

Окончательная эпюра изгибающих моментов, соответствующая появлению четвертого пластического шарнира, приведена на рисунке 12.

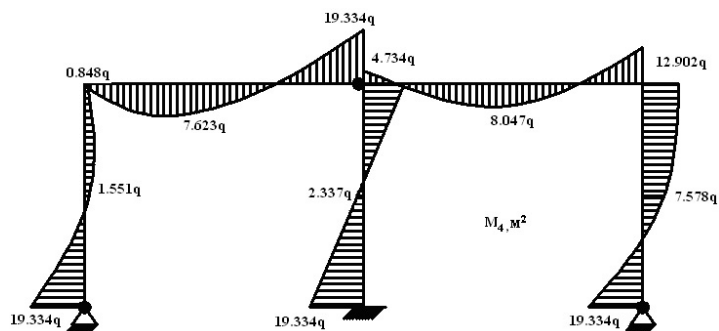


Рисунок 12. Эпюра изгибающих моментов для три раза статически неопределимой рамы

Аналогично проводятся следующие 5–7 этапы, вплоть до образования семи пластических шарниров соответствующей исчерпанию несущей способности конструкции. Окончательная эпюра моментов показана на рисунке 13. При этом несущая способность достигает значения $q_6 = 1,7378876 q$, что на 73,79% больше по сравнению с несущей способностью упругой работы материала конструкции.

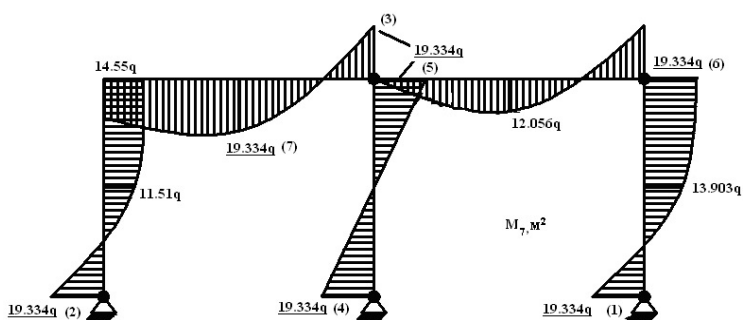


Рисунок 13. Окончательная эпюра моментов

Выводы. Предлагаемый алгоритм позволяет автоматизировать процесс расчета рамных конструкций по несущей способности с учетом пластических свойств материала. Проведенные исследования соответствуют реальной работе строительной конструкции, нагруженной статической нагрузкой. Показан истинный порядок возникновения пластических шарниров, позволяющий в случае необходимости на любом этапе, в зависимости от величины внешней нагрузки, назначать усилия тех или иных перегруженных мест сооружения. Результаты расчета дают единственный реальный механизм, соответствующий разрушению конструкции и предельной нагрузке исчерпания несущей способности сооружения.

References

- 1 *Darkov A.V., Shaposhnikov N.N.* The building mechanics. — Moscow: The higher school, 1976. — 600 p.
- 2 *Snitko N.K.* The building mechanics. — Moscow: The higher school, 1980. — 488 p.
- 3 *Butenko Yu.I., Zasyadko N.A., Kan S.N., Pustovoytov V.P.* The building mechanics of rod systems and covers. — Kiev: The higher school, 1990. — 488 p.
- 4 *Makarova E.* Engineering calculations in Mathcad. — Sankt-Petersburg: Piter, 2005.

А.Қ.Бейсебаев, Е.К.Богатова, Т.В.Заикина

Мақалада рамалық конструкцияларды шектік күйі бойынша сыртқы жүктеме қарқындылығын біртіндеп көбейтуге негізделген есептеу алгоритмі көрсетілген. Илімді топсалардың пайда болу реті мен сәйкес жүктеме анықталды. Статикалық анықталмайтын жүйелерді күш әдісімен есептеуді автоматтандыру үшін матрицалық формадағы алгоритм қолданылды.

A.K.Beysebayev, E.K.Bogatova, T.V.Zaikina

Strengthening calculation of the frame design for the limiting condition

In this work the algorithm of calculation of frame structures to limit state, based on the gradual increase in the intensity of the external load is stated. The order of occurrence of plastic hinges and the corresponding load are described. To automate the analysis of statically indeterminate systems by force algorithm is used in the matrix form.

УДК 517.95

М.Т.Дженалиев¹, К.Б.Иманбердиев², К.А.Айменова²

¹Институт математики и математического моделирования КН МОН РК,

²Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы (E-mail: tuvasharkhan@gmail.com)

В ограниченной двумерной прямоугольной области рассмотрена граничная задача для бигармонического уравнения. Изучаемая некорректная граничная задача сведена к задаче оптимального управления. В терминах сопряженной граничной задачи установлены условия оптимальности. Найден критерий сильной разрешимости некорректной граничной задачи.

Ключевые слова: некорректная задача, бигармоническое уравнение, методы оптимального управления, вариационное неравенство, сопряженная граничная задача.

Введение. В последнее время среди специалистов по уравнениям математической физики значительно возрос интерес к задачам, не являющимся корректными, по Ж. Адамару [1]. Задачи такого рода всегда привлекали внимание исследователей. Прежде всего, это связано не только с их важностью в теоретическом плане, но также и с тем, что с ними приходится сталкиваться во многих прикладных задачах из различных областей науки и техники. В связи с некорректными задачами можно отметить классические работы Ж. Адамара [1], А.Н. Тихонова [2], М.М. Лаврентьева [3] и многих других, обративших внимание исследователей на некорректные задачи и внесших существенный вклад в развитие этого важного направления математики.

Актуальность темы обусловлена, с одной стороны, важностью практического приложения теории некорректных задач при решении различных проблем науки и техники, и с другой — необходимостью построения новых методов решения этих задач.

Некорректные задачи для уравнения Лапласа рассматривались многими авторами. В данной работе изучается некорректная задача для бигармонического уравнения в двумерной прямоугольной области.

1. *Постановка задачи.* В данной работе изучается некорректная задача для бигармонического уравнения в двумерной прямоугольной области.

В области $\Omega = \{x, y \mid 0 < x < 2\pi, 0 < y < 1\}$ рассматривается следующая граничная задача:

$$\Delta^2 u = f(x, y), \{x \in (0, 2\pi), y \in (0, 1)\} = \Omega; \quad (1)$$

$$u^{(j)}(0, y) = u^{(j)}(2\pi, y), j = \overline{0, 3}; \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, u_y(x, 0) = \varphi_1(x), u_{yy}(x, 0) = 0, u_{yy}(x, 1) = 0, \quad (3)$$

с дополнительным условием $u(x, 1) \in U_g$ — выпуклое замкнутое множество из $L_2(0, 2\pi)$. (4)

Предполагается, что данные в задаче (1)–(3) удовлетворяют следующим условиям:

$$f \in L_2(\Omega); \varphi_1 \in L_2(0, 2\pi). \quad (5)$$

В книге R. Lattes, J.-L. Lions [4] указывается, что задача (1)–(3) является некорректно поставленной в пространстве $L_2(\Omega)$ (по этому поводу см. также [5; 253–268]).

Отметим, что критерий корректности однородной смешанной задачи Коши для уравнения Пуассона в прямоугольной области был установлен в работе Т.Ш.Кальменова и У.А.Искаковой [6]. В ней критерий корректности был получен в терминах собственных значений и коэффициентов разложения правой части уравнения по полной ортонормированной системе собственных функций некоторого семейства обобщенных спектральных задач с наличием оператора отклонения-инвертирования по одной из двух независимых переменных. В работе [7] рассматривается некорректная задача для уравнения теплопроводности. Общий метод регуляризации построения приближенного решения некорректных задач математической физики был предложен А.Н.Тихоновым [2]. В работе R. Lattes, J.-L. Lions [4] для регуляризации некорректно поставленных краевых задач предлагается метод квазиобращения путем замены исходного уравнения семейством вспомогательных (имеющих более высокий дифференциальный порядок) с малым параметром, для каждого из которых решается корректная граничная задача. Особенности и вопросы регуляризации задач Коши для абстрактных дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами изучают I.V.Melnikova и U.A.Anufrieva [8], где на основе применения методов полугрупп ими получены алгоритмы построения точных и регуляризованных решений.

В данной работе для решения некорректной задачи мы применяем методы оптимального управления.

2. *Задача оптимизации.* Для решения задачи (1)–(4) сформулируем в соответствие к ней следующую оптимизационную задачу:

$$\Delta^2 u = f(x, y); \quad (6)$$

$$u^{(j)}(0, y) = u^{(j)}(2\pi, y), j = \overline{0, 3}; \quad (7)$$

$$u(x, 0) = 0, u(x, 1) = \psi(x), u_{yy}(x, 0) = 0, u_{yy}(x, 1) = 0, \quad (8)$$

с функционалом оптимальности

$$J(\psi) = \int_0^{2\pi} |u_y(x, 0) - \varphi_1(x)|^2 dx \rightarrow \min_{\psi \in U_g}. \quad (9)$$

Заметим, что в оптимизационной задаче (6)–(9) функция $\psi(x)$ играет роль функции управления, подчиненной ограничению принадлежности заданному выпуклому замкнутому множеству $U_g \subset L_2(0, 2\pi)$. Кроме того, из теории эллиптических уравнений известно, что граничная задача (6)–(8) поставлена корректно, т.е. однозначно разрешима для любых заданных функций управления $\psi \in U_g$.

Как известно, из теории оптимального управления задача оптимизации (6)–(9) также является некорректной. Для изучения поставленной задачи будем применять стабилизатор Тихонова.

3. *Регуляризация задачи оптимизации.* Эффективным инструментом решения некорректной задачи является метод регуляризации. В нашем случае функционал

$$\alpha \int_0^{2\pi} |\psi(x)|^2 dx, \quad (\alpha > 0)$$

будет служить стабилизатором.

Рассмотрим задачу минимизации функционала:

$$J_\alpha(\psi) = \int_0^{2\pi} |u_y(x, 0) - \varphi_1(x)|^2 dx + \alpha \int_0^{2\pi} |\psi(x)|^2 dx \rightarrow \min_{\psi \in U_g} \quad (10)$$

Таким образом, мы получили регуляризованную оптимизационную задачу (6)–(8), (10). Она будет корректной задачей оптимизации. Поэтому для каждого значения $\alpha > 0$ эта задача имеет единственное оптимальное управление, доставляющее минимальное значение минимизируемому функционалу (10). Однако не исключается тот факт, что минимальное значение функционала (10) может быть строго больше нуля.

Для задачи оптимизации (6)–(8), (10) установим условия оптимальности.

Определение 1. Элемент $\bar{\psi} \in L_2(0, 2\pi)$, удовлетворяющий условию

$$J_\alpha(\bar{\psi}) = \inf_{\psi \in U_g} J_\alpha(\psi),$$

называется оптимальным управлением.

Введем следующие обозначения:

$u(x, y; \psi)$ есть решение задачи (6)–(8), соответствующее заданному управлению $\psi(x) \in U_g$;

$u(x, y; 0)$ — соответствует решению задачи (6)–(8) при $\psi(x) \equiv 0$;

$$\pi(\psi_1, \psi_2) = \int_0^{2\pi} [u_y(x, 0; \psi_1) - u_y(x, 0; 0)] \cdot \overline{[u_y(x, 0; \psi_2) - u_y(x, 0; 0)]} dx + \alpha \cdot \int_0^{2\pi} \psi_1(x) \overline{\psi_2(x)} dx;$$

$$L(\psi_1) = \int_0^{2\pi} [\varphi_1(x) - u_y(x, 0; 0)] \cdot \overline{[u_y(x, 0; \psi_1) - u_y(x, 0; 0)]} dx,$$

здесь $\pi(\psi_1, \psi_2)$ — билинейный непрерывный функционал на U_g , а $L(\psi_1)$ — линейный непрерывный функционал на допустимом множестве управлений U_g , так как ниже в п. 4 будет показано, что решение $u(x, y; \psi)$ задачи (6)–(8) не только непрерывно, но и является непрерывно дифференцируемым по управлению ψ .

Используя эти обозначения, функционал (10) можно переписать в виде:

$$J_\alpha(\psi) = \pi(\psi, \psi) - 2L(\psi) + \int_0^{2\pi} |u_y(x, 0; 0) - \varphi_1(x)|^2 dx.$$

4. *Существование решения регуляризованной задачи и вариационное неравенство.* Справедлива следующая теорема [9].

Теорема 1. Так как $\pi(\psi, \psi)$ — билинейный непрерывный симметричный функционал на U_g и удовлетворяет условию

$$\pi(\psi, \psi) \geq \|\psi\|^2, \quad (c = \text{const} > 0), \quad (11)$$

то для задачи (6)–(8), (10) найдется такой элемент $\bar{\psi} \in U_g$:

$$J(\bar{\psi}) = \inf_{\psi \in U_g} J(\psi),$$

и этот элемент будет единственным.

Неравенство (11) действительно имеет место, так как

$$\pi(\psi, \psi) = \int_0^{2\pi} [u_y(x, 0; \psi) - u_y(x, 0; 0)]^2 dx + \alpha \cdot \int_0^{2\pi} \psi^2(x) dx.$$

Решение оптимизационной задачи (6)–(8), (10) обозначим через

$$\bar{\psi}(x) = \arg \min_{\psi \in U_g} J_\alpha(\psi).$$

Далее согласно теории строго выпуклых задач оптимизации справедлив следующий критерий оптимальности, формулируемый в терминах производной по направлению.

Утверждение 1 (вариационное неравенство). Функция $\bar{\psi}(x) \in U_g$ является функцией оптимального управления, тогда и только тогда, когда выполняется следующее неравенство:

$$\langle J_{\alpha\psi}(\bar{\psi}), \psi - \bar{\psi} \rangle \geq 0, \quad \forall \psi \in U_g \subset L_2(0, 2\pi),$$

т.е. выполняется

$$\int_0^{2\pi} [u_y(x, 0; \psi) - \phi_1] \cdot \overline{u_{y\psi}(x, 0; \bar{\psi}) \cdot [\psi(x) - \bar{\psi}(x)]} dx + \alpha \cdot \int_0^{2\pi} \bar{\psi}(x) \cdot \overline{[\psi(x) - \bar{\psi}(x)]} dx \geq 0, \quad \forall \psi \in U_g. \tag{12}$$

Теперь проведем необходимые действия для дальнейшего преобразования вариационного неравенства (12).

Для этого граничную задачу (6)–(8) запишем в операторном виде:

$$Au = F \stackrel{\Delta}{=} \{f, \psi\}.$$

Так как граничная задача (6)–(8) для любых допустимых управлений однозначно разрешима, то ее решению $u(x, y; \psi)$, используя ее операторную запись, можно придать следующий вид:

$$u(x, y; \psi) = A^{-1}F = A_1^{-1}f + A_2^{-1}\psi.$$

Далее берем производную от этого решения по направлению

$$u_{\psi}(x, 0; \bar{\psi}) \cdot [\psi - \bar{\psi}] = A^{-1}(\psi - \bar{\psi}) = A_1^{-1}f + A_2^{-1}\psi - [A_1^{-1}f + A_2^{-1}\bar{\psi}] = u_{\psi}(x, y; \psi) - u_{\psi}(x, y; \bar{\psi}),$$

или

$$u_{\psi}(x, 0; \bar{\psi}) \cdot [\psi - \bar{\psi}] = u_{\psi}(x, y; \psi) - u_{\psi}(x, y; \bar{\psi}).$$

Таким образом, неравенство (12) принимает вид

$$\int_0^{2\pi} [u_y(x, 0; \psi) - \phi_1] \cdot \overline{[u_y(x, 0; \psi) - u_y(x, 0; \bar{\psi})]} dx + \alpha \cdot \int_0^{2\pi} \bar{\psi}(x) \cdot \overline{[\psi(x) - \bar{\psi}(x)]} dx \geq 0, \quad \forall \psi \in U_g. \tag{13}$$

5. *Сопряженная граничная задача.* Для дальнейшего изучения регуляризованной оптимизационной задачи (6)–(8), (10) введем сопряженную граничную задачу:

$$\begin{cases} \Delta^2 w = 0; \\ w^{(j)}(0, y) = w^{(j)}(2\pi, y), \quad j = \overline{0, 3}; \\ w(x, 0) = 0, \quad w(x, 1) = 0; \\ w_{yy}(x, 0) = u_y(x, 0; \bar{\psi}) - \phi_1, \quad w_{yy}(x, 1) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Для ее формального вывода рассмотрим следующее выражение:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \Delta^2 \tilde{u}(x, y) \overline{w(x, y)} dy dx = 0,$$

где $\tilde{u}(x, y) = u(x, y; \psi) - u(x, y; \bar{\psi})$ и $\Delta^2 \tilde{u}(x, y) = 0$.

Преобразуя это выражение, находим:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \Delta^2 \tilde{u}(x, y) \cdot \overline{w(x, y)} dy dx = -2 \int_0^{2\pi} [\psi(x) - \bar{\psi}(x)] \cdot \overline{w_{xxy}(x, 1)} dx - \int_0^{2\pi} \tilde{u}_y(x, 0) \cdot \overline{w_{yy}(x, 0)} dx - \int_0^{2\pi} [\psi(x) - \bar{\psi}(x)] \cdot \overline{w_{yy}(x, 1)} dx = 0. \tag{15}$$

Таким образом, отсюда мы получаем искомую сопряженную граничную задачу (14).

6. *Условия оптимальности.* Используя равенство $w_{yy}(x, 0) = u_y(x, 0) - \varphi_1$, перепишем выражение (15) в виде:

$$-2 \int_0^{2\pi} [\psi(x) - \overline{\psi(x)}] \cdot \overline{w_{xy}(x, 1)} dx - \int_0^{2\pi} \tilde{u}_y(x, 0) \cdot \overline{[u_y(x, 0; \psi) - \varphi_1]} dx - \int_0^{2\pi} [\psi(x) - \overline{\psi(x)}] \cdot \overline{w_{yyy}(x, 1)} dx = 0. \quad (16)$$

А из соотношений (16) и (13) придем к неравенству:

$$\int_0^{2\pi} [-2w_{xy}(x, 1) - w_{yyy}(x, 1) + \alpha \overline{\psi(x)}] \cdot \overline{[\psi(x) - \overline{\psi(x)}]} dx \geq 0, \quad \forall \psi \in U_g. \quad (17)$$

Таким образом, на основе утверждения 1 мы установили условия оптимальности, которые можно сформулировать в виде следующего утверждения:

Утверждение 2. Чтобы элемент $\overline{\psi(x)}$ был оптимальным решением в задаче (6)–(8) и (10), необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял граничным задачам (6)–(8), (14) и вариационному неравенству (17).

7. *Метод разделения переменных для условия оптимальности.* Для разрешения условий оптимальности (6)–(8), (14) и (17) используем метод разделения переменных. Будем искать решения граничных задач (6)–(8) и (14) в виде:

$$u(x, y) = \sum_{k \in Z} u_k(y) e^{ikx}, \quad w(x, y) = \sum_{k \in Z} w_k(y) e^{ikx}, \quad (18)$$

где

$$e^{ikx}, \quad \lambda_k = k^4, \quad k \in Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad (19)$$

системы ортонормированных собственных функций и собственных значений для спектральной задачи:

$$X_k^{IV}(x) = \lambda_k X_k(x), \quad X_k^{(j)}(0) = X_k^{(j)}(2\pi), \quad j = \overline{0, 3}.$$

Из системы (6)–(8), (14) и (17) на основе представлений их решений (18) соответственно получаем:

$$\begin{cases} u_k^{iv}(y) - 2k^2 u_k''(y) + k^4 u_k(y) = f_k(y), \quad k = 1, 2, \dots; \\ u_k(0) = 0; \quad u_k(1) = \psi_k; \quad u_k''(0) = 0; \quad u_k''(1) = 0; \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} w_k^{iv}(y) - 2k^2 w_k''(y) + k^4 w_k(y) = 0, \quad k = 1, 2, \dots; \\ w_k(0) = 0; \quad w_k(1) = 0; \quad w_k''(0) = u_k(0) - \varphi_{1k}; \quad w_k''(1) = 0; \end{cases} \quad (21)$$

$$[2k^2 w_k'(1) - w_k'''(1) + \alpha \overline{\psi_k} \overline{[\psi_k - \overline{\psi_k}]}] \geq 0, \quad (22)$$

$\forall \psi_k, k \in Z$, для которых $\psi \in U_g$. Здесь $f_k(y), \psi_k, \varphi_{1k}, k = 1, 2, \dots$ — коэффициенты Фурье функций $f(x, y), \psi(x), \varphi_1(x)$ по системе (19).

Итак, нами установлен следующий критерий оптимальности для задачи оптимизации (6)–(8) и (10).

Утверждение 3. Для оптимальности бесконечномерного вектора $\{\psi_k, k \in Z\}$ в задаче (6)–(8) и (10) необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял системам граничных задач (20)–(21) и вариационным неравенствам (22).

8. *Решение граничных задач (20) методом разделения переменных.* Для решения граничных задач (20) введем вспомогательную функцию

$$v_k(y) = u_k''(y) - k^2 u_k(y). \quad (23)$$

Тогда уравнения в (20) запишутся в виде: $v_k''(y) - k^2 v_k(y) = f_k(y)$. Таким образом, из (20) получаем систему граничных задач

$$\begin{cases} v_k''(y) - k^2 v_k(y) = f_k(y); \\ v_k(0) = 0, \quad v_k(1) = -k^2 \psi_k, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad k \neq 0. \end{cases} \quad (24)$$

Умножим уравнение из (24) на $\operatorname{sh} k(y - \eta)$ и проинтегрируем полученное по η от 0 до y . В результате будем иметь

$$-v'_k(0)shky + kv_k(y) = \int_0^y f_k(\eta)shk(y-\eta)d\eta, \quad k \in Z \setminus \{0\}. \quad (25)$$

Отсюда для $y=1$, учитывая граничные условия из (24), находим неизвестную постоянную $v'_k(0)$:

$$v'_k(0) = -\int_0^1 f_k(\eta) \frac{shk(1-\eta)}{shk} d\eta - \frac{k^3}{shk} \psi_k, \quad k \in Z \setminus \{0\}. \quad (26)$$

Теперь мы можем записать решение граничной задачи (24) в следующем виде:

$$v_k(y) = \int_0^1 G_k(y, \eta) f_k(\eta) d\eta - \psi_k \frac{k^2 shky}{shk}, \quad k \in Z \setminus \{0\}, \quad (27)$$

где функция Грина $G_k(y, \eta)$ определяется согласно соотношению:

$$G_k(y, \eta) = \begin{cases} -\frac{shk(1-y) \cdot shk\eta}{kshk}, & 0 < \eta < y < 1; \\ -\frac{shk(1-\eta) \cdot shky}{kshk}, & 0 < y < \eta < 1. \end{cases} \quad (28)$$

Далее из (20) и (23) получаем систему граничных задач для исходных неизвестных функций $u_k(y)$:

$$\begin{cases} u''_k(y) - k^2 u_k(y) = v_k(y); \\ u_k(0) = 0, \quad u_k(1) = \psi_k, \quad k \in Z \setminus \{0\}. \end{cases} \quad (29)$$

Эти задачи аналогичны граничным задачам (24). Их решения записываются в виде:

$$u_k(y) = \int_0^1 G_k(y, \theta) f_k(\theta) d\theta + \psi_k \frac{k^2 shky}{shk}, \quad k \in Z \setminus \{0\}. \quad (30)$$

Рассмотрим случай, когда $k=0$. Функцию Грина в этом случае можно было бы построить так же, как и для $k \neq 0$, однако ее можно получить простым предельным переходом

$$G_0(y, \eta) = \lim_{k \rightarrow 0} G_k(y, \eta) = \begin{cases} -(1-y)\eta, & 0 < \eta < y < 1; \\ -(1-\eta)y, & 0 < y < \eta < 1. \end{cases} \quad (31)$$

Из (24) и (30) соответственно получаем:

$$v_0(y) = \int_0^1 G_0(y, \eta) f_0(\eta) d\eta; \quad (32)$$

$$u_0(y) = \int_0^1 G_0(y, \theta) v_0(\theta) d\theta + \psi_0 y. \quad (33)$$

Таким образом, нами получены формулы (27), (30), (32) и (33) для решения системы граничных задач (20).

Из (30) и (33) находим решения системы граничных задач (20):

$$u_k(y) = \int_0^1 G_k(y, \theta) \left[\int_0^1 G_k(\theta, \eta) f_k(\eta) d\eta - \psi_k \frac{k^2 shk\theta}{shk} \right] d\theta + \psi_k \frac{shky}{shk}, \quad k \in Z \setminus \{0\}; \quad (34)$$

$$u_0(y) = \int_0^1 G_0(y, \theta) \int_0^1 G_0(\theta, \eta) f_0(\eta) d\eta d\theta + \psi_0 y. \quad (35)$$

9. Решение граничных задач (21) методом разделения переменных. Для решения системы сопряженных граничных задач (21) введем вспомогательную функцию

$$a_k(y) = w''_k(y) - k^2 w_k(y). \quad (36)$$

Тогда уравнение в (21) запишется в виде: $a''_k(y) - k^2 a_k(y) = 0$.

Таким образом, из (21) получаем систему граничных задач

$$\begin{cases} a''_k(y) - k^2 a_k(y) = 0; \\ a_k(0) = u'_k(0) - \varphi_{1k}, \quad a_k(1) = 0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad k \neq 0. \end{cases} \quad (37)$$

Умножим уравнение из (37) на $shk(y - \eta)$ и проинтегрируем полученное по η от 0 до y . В результате будем иметь

$$-a'_k(0)shky + ka_k(y) - k[u'_k(0) - \varphi_{1k}]chky = 0, \quad k \in Z \setminus \{0\}. \quad (38)$$

Отсюда для $y=1$, учитывая граничные условия из (21), находим неизвестную постоянную $a'_k(0)$:

$$-a'_k(0) = -k[u'_k(0) - \varphi_{1k}] \frac{chk}{shk}, \quad k \in Z \setminus \{0\}. \quad (39)$$

Теперь, используя (38), мы можем записать решение граничной задачи (37):

$$a_k(y) = [u'_k(0) - \varphi_{1k}] \frac{shk(1-y)}{shk}. \quad (40)$$

Далее из (21) и (36) получаем граничную задачу для исходной неизвестной функции $w_k(y)$:

$$\begin{cases} w''_k(y) - k^2 w_k(y) = a_k(y); \\ w_k(0) = 0, \quad w_k(1) = 0, \quad k \in Z \setminus \{0\}. \end{cases} \quad (41)$$

Граничные задачи (41) аналогичны задачам (24). Их решения записываются в виде:

$$w_k(y) = \int_0^1 G_k(y, \theta) a_k(\theta) d\theta, \quad k \in Z \setminus \{0\}, \quad (42)$$

где функция Грина $G_k(y, \eta)$ определяются согласно соотношениям (28). Рассмотрим случай $k=0$. Функция Грина в этом случае нами уже построена (31).

Из (40) и (42) соответственно получаем:

$$a_0(y) = [u'_0(0) - \varphi_{10}](1-y); \quad (43)$$

$$w_0(y) = \int_0^1 G_0(y, \theta) a_0(\theta) d\theta. \quad (44)$$

Таким образом, нами получены формулы (30), (42), (43) и (44) для решения системы граничных задач (21). Из (42) и (44) находим:

$$w_k(y) = \int_0^1 G_k(y, \theta) \left\{ [u'_k(0) - \varphi_{1k}] \frac{shk(1-\theta)}{shk} \right\} d\theta, \quad k \in Z \setminus \{0\}; \quad (45)$$

$$w_0(y) = \int_0^1 G_0(y, \theta) \{ [u'_0(0) - \varphi_{10}](1-\theta) \} d\theta. \quad (46)$$

Для полного определения решений сопряженных граничных задач (21) осталось найти производные $u'_k(0)$.

Из формулы (34) получаем:

$$\begin{aligned} u_k(y) = & \int_0^1 \int_0^1 G_k(y, \theta) G_k(\theta, \eta) f_k(\eta) d\eta d\theta + \\ & + \psi_k \left[\frac{kchkshky}{2sh^2k} + y \frac{kchky}{2shk} + \frac{shky}{shk} \right], \quad k \in Z \setminus \{0\}. \end{aligned} \quad (47)$$

Решение $u_0(y)$ определено ранее соотношением (35). Теперь, найдя производную от решений (47) и (35), получаем искомую величину производной для $k \in Z \setminus \{0\}$:

$$u'_k(0) = - \int_0^1 \frac{shk(1-\theta)}{shk} \int_0^1 G_k(\theta, \eta) f_k(\eta) d\eta d\theta + \psi_k \left[\frac{k^2chk}{2sh^2k} + \frac{k}{2shk} \right]. \quad (48)$$

Для случая $k=0$ из (35) получаем:

$$u'_0(y) = \int_0^1 \int_0^1 G_0(\theta, \eta) f_0(\eta) d\eta d\theta - \int_0^1 (1-\theta) \int_0^1 G_0(\theta, \eta) f_0(\eta) d\eta d\theta + \psi_0. \quad (49)$$

Из (49) получаем для искомой величины:

$$u'_k(0) = - \int_0^1 (1-\theta) \int_0^1 G_0(\theta, \eta) f_0(\eta) d\eta d\theta + \psi_0. \quad (50)$$

10. *Решение сопряженных граничных задач (21) и их производные.* Теперь подставим значения производной в точке $y = 0$, определенные формулами (48) и (50), в формулы, задающие решения сопряженных граничных задач (45) и (46). Имеем решения сопряженных граничных задач (21):

$$w_k(y) = \left[U_k + \Psi_k \left(\frac{k^2 ch k}{2 sh^2 k} + \frac{k}{2 sh k} \right) - \Phi_{1k} \right] \cdot \int_0^1 G_k(y, \theta) \frac{sh k(1-\theta)}{sh k} d\theta, \quad k \in Z \setminus \{0\}; \quad (51)$$

$$w_0(y) = [U_0 + \Psi_0 - \Phi_{10}] \int_0^1 (1-\theta) G_0(y, \theta) d\theta, \quad (52)$$

где

$$U_k = - \int_0^1 \frac{sh k(1-\theta)}{sh k} \int_0^1 G_k(\theta, \eta) f_k(\eta) d\eta d\theta, \quad k \in Z \setminus \{0\};$$

$$U_0 = - \int_0^1 (1-\theta) \int_0^1 G_0(\theta, \eta) f_0(\eta) d\eta d\theta.$$

Для получения подробного представления семейства вариационных неравенств (22) нам нужно выписать производные функции $w_k(y)$: $w'_k(y)$ и $w''_k(y)$, $k \in Z$ при $y = 1$ решений сопряженных граничных задач (21).

Из (51) и (52) при $y = 1$ получаем:

$$w'_k(1) = \left[U_k + \Psi_k \left(\frac{k^2 ch k}{2 sh^2 k} + \frac{k}{2 sh k} \right) - \Phi_{1k} \right] \cdot \frac{2k ch k - sh k}{4k sh^2 k}, \quad k \in Z \setminus \{0\}; \quad (53)$$

$$w'_0(1) = -\frac{1}{6} \cdot [U_0 + \Psi_0 - \Phi_{10}]; \quad (54)$$

$$w''_k(1) = \left[U_k + \Psi_k \left(\frac{k^2 ch k}{2 sh^2 k} + \frac{k}{2 sh k} \right) - \Phi_{1k} \right] \cdot \frac{k sh k - k^2 ch k}{2 sh^2 k}, \quad k \in Z \setminus \{0\}; \quad (55)$$

$$w''_0(1) = \frac{U_0 + \Psi_0 - \Phi_{10}}{2}. \quad (56)$$

11. *Частный случай вариационных неравенств (22).* Подставляя значения производных решений сопряженных граничных задач (21), определенные согласно формулам (53)–(56), в вариационные неравенства (22), получаем для значений их первых сомножителей в левой части следующее:

$$2k^2 w'_k(1) - w''_k(1) + \alpha \bar{\Psi}_k = [U_k - \Phi_{1k}] \cdot V_k + W_k \bar{\Psi}_k, \quad k \in Z \setminus \{0\}; \quad (57)$$

$$-w''_0(1) + \alpha \bar{\Psi}_0 = -\frac{U_0 - \Phi_{10}}{2} + \frac{-1 + 2\alpha}{2} \bar{\Psi}_0, \quad k = 0, \quad (58)$$

где

$$V_k = \frac{2k^2(2k ch k - sh k)}{4k sh^2 k} - \frac{k sh k + k^2 ch k}{2 sh^2 k}, \quad W_k = \left[\frac{k^2 ch k}{2 sh^2 k} + \frac{k}{2 sh k} \right] \cdot V_k + \alpha.$$

12. *Задача (1)–(5) при условии $U_g \equiv L_2(0, 2\pi)$.* Теперь положим, что $U_g \equiv L_2(0, 2\pi)$, т.е. снимем ограничение (4). Так как для функции $\psi(x)$ нет ограничений, кроме принадлежности ее пространству $L_2(0, 2\pi)$, и вариационное неравенство (22) превращается в вариационное равенство, то оптимальное значение коэффициентов Фурье $\bar{\Psi}_k$, $k = 1, 2, \dots$, находим, приравнявая нулю правые части соответственно выражений (57) и (58)

$$\bar{\Psi}_k = -\frac{[U_k - \Phi_{1k}] \cdot V_k}{W_k}, \quad k \in Z \setminus \{0\}; \quad (59)$$

$$\bar{\Psi}_0 = \frac{U_0 - \Phi_{10}}{-1 + 2\alpha}, \quad k = 0. \quad (60)$$

13. *Решения граничных задач (20), соответствующие оптимальным коэффициентам Фурье $\bar{\Psi}_k$, $k = 1, 2, \dots$* Подставляя в формулы (47) и (35) решения граничных задач (20), оптимальные коэффициенты Фурье $\bar{\Psi}_k$, $k \in Z$, из (59) и (60) получим:

$$u_k(y) = \int_0^1 \int_0^1 G_k(y, \theta) G_k(\theta, \eta) f_k(\eta) d\eta d\theta - \frac{[U_k - \varphi_{1k}] \cdot V_k}{W_k} \left[\frac{k \operatorname{ch} k \operatorname{sh} ky}{2 \operatorname{sh}^2 k} - y \frac{k \operatorname{ch} ky}{2 \operatorname{sh} k} + \frac{\operatorname{sh} ky}{\operatorname{sh} k} \right], \quad k \in Z \setminus \{0\}; \quad (61)$$

$$u_0(y) = \int_0^1 G_0(y, \theta) \int_0^1 G_0(\theta, \eta) f_0(\eta) d\eta d\theta + \frac{U_0 - \varphi_{10}}{-1 + 2\alpha} \cdot y, \quad (62)$$

где значения чисел $V_k, W_k, k \in Z \setminus \{0\}$, определены ниже формулы (58).

Теперь в формулах (61) и (62) устремим α к нулю. Будем иметь:

$$u_{k0}(y) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} u_k(y) = \int_0^1 \int_0^1 G_k(y, \theta) G_k(\theta, \eta) f_k(\eta) d\eta d\theta - \frac{[U_k - \varphi_{1k}] \cdot 2 \operatorname{sh}^2 k}{k^2 \operatorname{ch} k + k \operatorname{sh} k} \left[\frac{k \operatorname{ch} k \operatorname{sh} ky}{2 \operatorname{sh}^2 k} - y \frac{k \operatorname{ch} ky}{2 \operatorname{sh} k} + \frac{\operatorname{sh} ky}{\operatorname{sh} k} \right], \quad k \in Z \setminus \{0\}; \quad (63)$$

$$u_{00}(y) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} u_0(y) = \int_0^1 G_0(y, \theta) \int_0^1 G_0(\theta, \eta) f_0(\eta) d\eta d\theta - [U_0 - \varphi_{10}] \cdot y, \quad (64)$$

Далее заметим, что непосредственная проверка показывает справедливость равенств:

$$u'_k(0) = \varphi_{1k}, \quad k \in Z.$$

Этого и следовало ожидать, так как приведенные равенства должны иметь место согласно второму условию из соотношений (3), приведенного в постановке исходной некорректной граничной задачи с дополнительным условием.

14. Основной результат. Пример некорректной граничной задачи. Анализ формулы (63) для решений граничных задач (20) показывает:

– во-первых, с ростом индекса k и при $\alpha \rightarrow 0$ решения граничных задач (20) $u_k(y)$ (61) (соответственно (63)) могут неограниченно возрастать с асимптотикой $k \exp\{k\}$, если этот рост не будет «подавляться» соответствующим более быстрым уменьшением абсолютных величин коэффициентов Фурье φ_{1k} и значений норм $\|f_k(y)\|_{L_2(0,1)}$;

– во-вторых, справедлив следующий основной результат работы:

Теорема. Для того чтобы граничная задача (1)–(3) и (5) имела единственное $L_2(\Omega)$ -сильное решение, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:

$$\{k^{-2} \exp\{k\} \cdot \varphi_{1k}\}_{k=1}^{\infty}, \{k^{-2} \exp\{k\} \cdot \|f_k(y)\|_{L_2(0,1)}\}_{k=1}^{\infty} \subset l_2; \quad (65)$$

– в-третьих, можно рассматривать аналоги примера Адамара в случае нашей задачи. Примем следующие предположения:

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi_1(x) = k^2 \exp\{-\sqrt{k}\} \sin kx, \quad k \in Z. \quad (66)$$

Действительно, в рассматриваемом случае, используя формулы (63) и (64), решение граничной задачи (1)–(3) и (5) будет иметь вид:

$$u(x, y) = \frac{k^2 \exp\{-\sqrt{k}\} \cdot 2 \operatorname{sh}^2 k}{k^2 \operatorname{ch} k + k \operatorname{sh} k} \cdot \left[\frac{k \operatorname{ch} k \operatorname{sh} ky}{2 \operatorname{sh}^2 k} - y \frac{k \operatorname{ch} ky}{2 \operatorname{sh} k} + \frac{\operatorname{sh} ky}{\operatorname{sh} k} \right] \cdot \sin kx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (67)$$

Из (67) видно, что полученное решение в рассматриваемом нами примере единственно. Более того, при $k \rightarrow \infty$ функция $\varphi_1(x)$ равномерно стремится к нулю и притом не только сама, но и все ее производные, и принадлежать пространству $L_2(0, 2\pi)$. Однако решение (67) при $y > 0$ имеет вид синусоиды со сколь угодно большой амплитудой и не принадлежит пространству $L_2(\Omega)$.

Для того чтобы функция $\varphi_1(x)$ удовлетворяла условию (65), необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты Фурье $\varphi_{1k}(x)$ имели асимптотику для больших k порядка $\exp\{-(1 + \varepsilon)\}$, где $\varepsilon > 0$.

В рассматриваемом нами аналоге примера Адамара для коэффициентов Фурье функции $\varphi_1(x)$ имеем асимптотику, всего лишь равную: $k^2 \exp\{-\sqrt{k}\}$, и для коэффициентов Фурье решения $u(x, y)$

соответственно — $\exp\{k - \sqrt{k}\}$. Это показывает некорректность рассматриваемой граничной задачи для бигармонического уравнения.

Таким образом, доказанная теорема позволяет строить бесчисленное множество аналогов примера Адамара (некорректных граничных задач).

References

- 1 *Hadamard J.* The Cauchy problem for the linear equations with private derivatives of hyperbolic type. — Moscow: Nauka, 1978. — 352 p.
- 2 *Tihonov A.N., Arsenin V.Ya.* Methods of the solution of ill-posed problems. — Moscow: Nauka, 1979. — 142 p.
- 3 *Lavrentev M.M.* // Reports AS USSR. A series of the mathematician. — 1956. — Т. 20. — № 6. — P. 819–842.
- 4 *Lattes R., Lions J.-L.* Methode de quasireversibilite et applications. — Paris: Dunod, 1967.
- 5 *Dezin A.A.* The general questions of the theory of boundary problems. — Moscow: Nauka, 1980. — 207 p.
- 6 *Kalmenov T.Sh., Iskakova U.A.* // Reports of RAS. — 2007. — Т. 414. — № 2. — P. 168–171.
- 7 *Sobolev S.L.* The equations of mathematical physics. — Moscow: Nauka, 1966. — 444 p.
- 8 *Melnikova I.V., Anufrieva U.A.* // Journal of Mathematical Sciences. — 2008. — 148. — № 4. — P. 481–632.

М.Т.Жиенәлиев, Қ.Б.Иманбердиев, Қ.Ә.Айменова

Шектелген екі өлшемді облыста бигармоникалық тендеу үшін шекаралық есеп қарастырылды. Зерттелетін корректі емес шекаралық есеп тиімді басқару есебіне келтірілген. Түйіндес шекаралық есеп түсінігі негізінде тиімділік шарттары алынған. Корректі емес шекаралық есептің әлді шешімділігінің критерийі табылған.

M.T.Dzhenaliyev, K.B.Imanberdiyev, K.A.Ayumenova

Optimization method of solution ill-posed problem for biharmonic equation

In bounded two-dimensional rectangular region we consider a boundary value problem for the biharmonic equation. The studied ill-posed boundary problem was reduced to the optimal control problem. In terms of the adjoint boundary value problem the optimality conditions are established. The strongly solvability criterion is found for ill-posed boundary problem.

А.Н.Есбаев, А.К.Жанболова, С.Н.Петерс

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: snpeters@mail.ru)

В статье рассмотрены взаимосопряженные задачи для нагруженного уравнения теплопроводности, где нагруженное слагаемое представляет собой производную первого порядка от неизвестной функции в фиксированной точке. Известно, что для нагруженных уравнений не всегда можно применять методы исследования обычных ненагруженных уравнений. К подобного рода нагруженным уравнениям сводятся задачи оптимального управления, досрочного прогнозирования и регулирования уровня почвенной влаги. Также нагруженные уравнения возникают при численном решении интегральных и дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: нагруженные дифференциальные уравнения, уравнение теплопроводности, сопряженная задача, уравнение параболического типа, преобразование Лапласа.

Нагруженные дифференциальные уравнения находят многочисленные применения в задачах долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод и почвенной влаги. Нагруженные уравнения возникают также при исследовании нелинейных уравнений переноса частиц, задач оптимального управления, при численном решении интегродифференциальных уравнений, при эквивалентном преобразовании нелокальных краевых задач [1–4]. Классические вопросы, возникающие в теории краевых задач для уравнений в частных производных, остаются такими же как для краевых задач для нагруженных уравнений, но наличие нагруженного оператора не всегда позволяет напрямую применять методы исследований, хорошо развитые при исследованиях обычных уравнений.

Рассмотрим в области $Q = \{(x, t) : x > 0, t > 0\}$ следующую граничную задачу для нагруженного уравнения теплопроводности:

$$L_{\lambda} u = f \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = f(x, t); \\ u(x, 0) = 0, u(0, t) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где λ — комплексный параметр; $f(x, t) \in C(Q)$ — заданная функция. Обращая дифференциальную часть в граничной задаче (1), получим следующее соотношение:

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) u_{\eta}(\eta, \tau) \Big|_{\eta=1} d\tau + \int_0^t \int_0^{\infty} G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (2)$$

где

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left\{ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4t}\right) \right\} \text{— функция Грина.}$$

Теперь, дифференцируя (2) по x и полагая $x=1$, получим следующее интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$K_{\lambda} \mu = (I - \lambda K_1) \mu \equiv \mu(t) - \lambda \int_0^t K_1(t-\tau) \mu(\tau) d\tau = f_1(t), \quad (3)$$

где

$$\mu(t) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1}, \quad f_1(t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^t \int_0^{\infty} G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \right] \Big|_{x=1};$$

$$K_1(t-\tau) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \right] \Big|_{x=1} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}} e^{-z^2} dz \right] \Big|_{x=1} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t-\tau}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}} \Big|_{x=1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{t-\tau}} \cdot e^{-\frac{1}{4(t-\tau)}}. \quad (4)$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (3), переходим в пространство образов:

$$\hat{\mu}(p) \left[1 - \lambda \frac{e^{-\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} \right] = \hat{f}_1(p),$$

или

$$\hat{\mu}(p) = \hat{f}_1(p) + \frac{\lambda \frac{e^{-x_0\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}}{1 - \lambda \frac{e^{-x_0\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}} \hat{f}_1(p). \quad (5)$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, получим решение интегрального уравнения:

$$\mu(t) = f_1(t) + \int_0^t r(t-\tau) f_1(\tau) d\tau, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} r(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \frac{\lambda^n \tau_1^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{n}{2\sqrt{\pi}(t-\tau_1)^{3/2}} e^{-n^2 \frac{1}{4(t-\tau_1)}} d\tau_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \lambda^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^t \frac{\tau_1^{\frac{n-1}{2}}}{(t-\tau_1)^{3/2}} \cdot e^{-n^2 \frac{1}{4(t-\tau_1)}} d\tau_1 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^t \tau_1^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{n}{2(t-\tau_1)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{n^2}{4(t-\tau_1)}} d\tau_1 = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \lambda^n \cdot n \cdot t^{\frac{n-3}{4}} \cdot e^{-\frac{n^2}{8t}} \cdot W_{\frac{n+3}{2}, \frac{1}{4}}\left(\frac{n^2}{4t}\right), \end{aligned} \quad (7)$$

здесь $W_{\frac{3}{2}, \frac{1}{4}}\left(\frac{n^2}{4t}\right)$ — функция Уиттекера.

Окончательно решение интегрального уравнения (3) можно записать в следующем виде:

$$\mu(t) = f_1(t) + \int_0^t \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\lambda^n}{n} \cdot (t-\tau)^{\frac{n-3}{4}} \cdot e^{-\frac{n^2}{8(t-\tau)}} \cdot W_{\frac{n+3}{2}, \frac{1}{4}}\left(\frac{n^2}{4(t-\tau)}\right) \right\} f_1(\tau) d\tau. \quad (8)$$

Тогда решение исходной задачи (1) будет иметь вид:

$$u(x, t) = \lambda \int_0^t erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^{\infty} G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (9)$$

где $\mu(t)$ и $f_1(t)$ определяются из соотношений (8) и (4) соответственно.

Для полного исследования поставленной задачи (1) нужно рассмотреть её сопряженную, которая ставится следующим образом:

$$\begin{cases} -\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \bar{\lambda} \cdot \delta'(x-t) \otimes \int_0^{\infty} v(\xi, t) d\xi = g(x, t); \\ v(x, \infty) = 0, v(0, t) = v(\infty, t) = v_x(\infty, t) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Обращая дифференциальную часть уравнения (10) так же, как и уравнения (1), получим следующее уравнение:

$$K_{\bar{\lambda}}^* v \equiv v(t) - \bar{\lambda} \int_t^{\infty} K_1(\tau-t) v(\tau) d\tau = g_1(t), \quad (11)$$

где

$$v(t) = \bar{\lambda} \int_t^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}(\tau-t)} \cdot e^{-\frac{1}{4(\tau-t)}} \cdot v(\tau) d\tau + g_1(t); \quad (12)$$

$$g_1(t) = t^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_t^{\infty} \int_0^{\infty} \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau-t}}\right) \cdot g(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

$v(t) = 0$ будет решением этого уравнения. Но надо отметить, что есть и ненулевые решения. Так как уравнение (11) — уравнение с разностным ядром, к нему можно применить преобразование Лапласа. Вместе с тем учитываем, что справедливо следующее равенство [5]:

$$L\left\{\int_t^{\infty} K(t-\tau)\varphi(\tau) d\tau\right\} = \hat{K}(-p) \cdot \hat{\varphi}_L(p),$$

где

$$\hat{K}(-p) = \int_0^{\infty} K(-t)e^{pt} dt.$$

Теперь, если применить к однородному уравнению (11) преобразование Лапласа, получим следующее трансцендентное уравнение

$$\hat{\varphi}(p) \cdot [1 - \bar{\lambda} \cdot \hat{K}(-p)] = 0.$$

Если предположить, что $\hat{\varphi}_L(p) \neq 0$, то должно выполняться следующее равенство:

$$1 - \bar{\lambda} \cdot \hat{K}(-p) = 0. \quad (13)$$

В нашем случае

$$\hat{K}(-p) = \frac{e^{\sqrt{-p}}}{\sqrt{-p}}.$$

Тогда нам надо найти корни следующего трансцендентного уравнения:

$$\hat{A}^*(p) = 1 - \lambda \cdot \frac{e^{-\sqrt{-p}}}{\sqrt{-p}} = 0. \quad (14)$$

Корни уравнения (14) в явном виде найти нельзя, можно найти только приближенно [6]. Для этого, произведя замену $\sqrt{-p} = z$, уравнение (14) запишем в следующем виде:

$$e^z = -\frac{1}{\lambda} z. \quad (15)$$

Поэтому, рассматривая это уравнение как функцию $\lambda = \lambda(p)$, т.е. как конформное отображение, найдем во что отображается (на комплексной плоскости λ) область определения переменной p . По условию $\operatorname{Re}(-p) > 0$, т.е. $-\frac{\pi}{2} < \arg(-p) < \frac{\pi}{2}$, тогда $-\frac{\pi}{4} < \arg \sqrt{-p} < \frac{\pi}{4}$. Пусть $z = \sqrt{-p} = x + iy$, значит граница области определения переменной $-p$ — это линии $y = \pm x$. По закону соответствия границ достаточно найти образы этих линий. Получим следующее уравнение:

$$\lambda = z \cdot e^z$$

$$|\lambda| = |z| \cdot |e^z|;$$

$$\begin{cases} |\lambda| = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^x; \\ \arg \lambda = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + (y - 2k\pi), \end{cases}$$

где $k \in Z$.

1) Рассмотрим случай $y = x$:

$$\begin{cases} |\lambda| = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^x = \sqrt{2} \cdot x \cdot e^x; \\ \arg \lambda = \frac{\pi}{4} + x - 2k\pi. \end{cases}$$

Тогда из этого уравнения $x = \arg \lambda - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $|\lambda| = \sqrt{2} \left(\arg \lambda - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) \cdot e^{\arg \lambda - \frac{\pi}{4} + 2k\pi}$, где

$$\arg \lambda - \frac{\pi}{4} + 2k\pi > 0. \text{ В таком случае получаем уравнение } |\lambda| = \sqrt{2} \cdot \left| \arg \lambda - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right| \cdot e^{\left| \arg \lambda - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right|}.$$

2) Теперь рассмотрим случай $y = -x$:

$$\begin{cases} |\lambda| = \sqrt{2} \cdot x \cdot e^x; \\ \arg \lambda = -\frac{\pi}{4} - x \pm 2k\pi. \end{cases}$$

Тогда из этой системы уравнений выходит, что $x = -\arg \lambda - \frac{\pi}{4} \pm 2k\pi$,

$$|\lambda| = \sqrt{2} \left(-\arg \lambda - \frac{\pi}{4} - 2k\pi \right) \cdot e^{-\arg \lambda - \frac{\pi}{4} - 2k\pi}. \text{ Так как } -\arg \lambda - \frac{\pi}{4} - 2k\pi > 0, \text{ это уравнение можно записать как}$$

$$|\lambda| = \sqrt{2} \left(\arg \lambda - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) \cdot e^{\arg \lambda - \frac{\pi}{4} + 2k\pi}.$$

Объединяя оба случая, можно записать эти уравнения в следующем виде:

$$|\lambda| = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}} \left| \arg \lambda - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right| \cdot e^{|\arg \lambda - \frac{\pi}{4} + 2k\pi|}. \tag{16}$$

Линии, определяемые уравнением (16), разбивают комплексную плоскость параметра λ на не пересекающиеся области $D_m, m = 0, 1, 2, \dots$ (рис. 1 и 2).

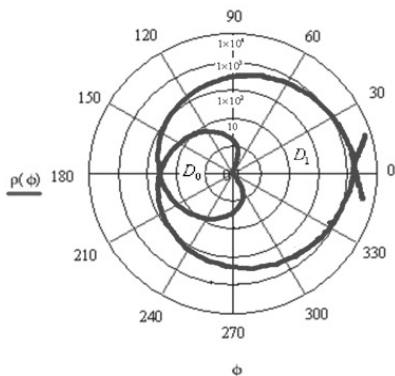


Рисунок 1. Плоскость спектрального параметра λ (увеличенный масштаб)

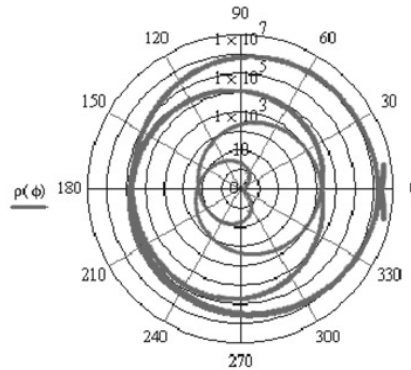


Рисунок 2. Плоскость спектрального параметра λ (уменьшенный масштаб)

Внешние границы ∂D_m области D обозначаем соответственно $\Gamma_m, m = 0, 1, 2, \dots$

Замечание 1. Заметим, что кроме области D_0 , которая имеет только внешнюю границу $\Gamma_0 = \partial D_0$, каждая из областей D_m имеет границу ∂D_m , состоящую из внешней Γ_m и внутренней Γ_{m-1} частей:

$$\partial D_m = \Gamma_{m-1} \cup \Gamma_m.$$

Причем внешняя Γ_m и внутренняя Γ_{m-1} части границы ∂D_m области D_m имеют одну общую точку, лежащую на действительной оси комплексной плоскости параметра λ .

Таким образом, получаем, что $\bar{\lambda} \in \Gamma_m$, $m = 0, 1, 2, \dots$, тогда и только тогда, когда существует хотя бы одна точка \tilde{p} , для которой выполнено равенство $\hat{A}^*(p, \bar{\lambda}) = 0$.

Для любого λ функция $\hat{A}^*(p, \bar{\lambda})$ в левой полуплоскости может иметь только конечное число нулей p_k , $k = 1, 2, \dots, m$ (их число определяется значением $|\bar{\lambda}|$). Если $\bar{\lambda} \in D_m$, тогда число корней равно только m .

Если $\bar{\lambda} \in D_m$, то решение однородного уравнения

$$K_\lambda^* v \equiv v(t) - \bar{\lambda} \int_t^\infty K_1(\tau - t)v(\tau) d\tau = 0 \quad (17)$$

будет иметь вид:

$$\mu(t) = \sum_{k=1}^m c_k \cdot e^{p_k t}, \quad (18)$$

где c_k — произвольные постоянные.

Теперь найдем какое-либо частное решение неоднородного уравнения (14). Предположим, что преобразование Лапласа функции $g(t)$ аналитично в полосе $-\varepsilon < \operatorname{Re} p < \varepsilon$. В таком случае из уравнения (16) при $\forall \bar{\lambda} \notin \Gamma_m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) получим

$$\hat{v}(p) = \hat{g}(p) + \bar{\lambda} \frac{e^{-\sqrt{-p}}}{\sqrt{-p}} \cdot \hat{g}(p), \quad (19)$$

$$1 - \bar{\lambda} \frac{e^{-\sqrt{-p}}}{\sqrt{-p}}$$

тогда

$$\hat{v}(p) = \hat{g}(p) + \bar{\lambda} \frac{e^{-\sqrt{-p}}}{\sqrt{-p} - \bar{\lambda} e^{-\sqrt{-p}}} \cdot \hat{g}(p). \quad (20)$$

При переходе в этих соотношениях к оригиналам получаем:

$$v(t) = g(t) + \bar{\lambda} \int_t^\infty r^*(t - \tau)g(\tau) d\tau, \quad (21)$$

где

$$r^*(\theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{-\sqrt{-p}}}{\sqrt{-p} - \bar{\lambda} e^{-\sqrt{-p}}} \exp(\theta p) dp, \quad \theta < 0. \quad (22)$$

Если корни уравнения $\sqrt{-p} - \bar{\lambda} e^{-\sqrt{-p}} = 0$ находятся на мнимой оси, то интегрирование берем по контуру, чтобы они обходили точки по левому краю.

В формуле (22) находим вычет подынтегральной функции по правой разрезанной полуплоскости.

Теперь, используя лемму Жордана, найдем резольвенту $r^*(\theta)$:

$$r^*(\theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{-\sqrt{-p} + p\theta}}{\sqrt{-p} - \bar{\lambda} e^{-\sqrt{-p}}} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_I + \frac{1}{2\pi i} \int_{II} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \operatorname{res} \left[\frac{e^{-\sqrt{-p} + p\theta}}{\sqrt{-p} - \bar{\lambda} e^{-\sqrt{-p}}} \right]. \quad (23)$$

На «берегу» I имеем (рис. 3):

$$p = x \cdot e^{-i0} = x, \quad \sqrt{-p} = \sqrt{-x} = i\sqrt{x}.$$

На «берегу» II:

$$p = x \cdot e^{2\pi i} = x, \quad \sqrt{-p} = -i\sqrt{x}.$$

Тогда

$$\int_I + \int_{II} = \int_0^\infty \left[\frac{e^{i\sqrt{x}}}{-i\sqrt{x} - \bar{\lambda} e^{i\sqrt{x}}} - \frac{e^{-i\sqrt{x}}}{i\sqrt{x} - \bar{\lambda} e^{-i\sqrt{x}}} \right] \cdot e^{x\theta} dx = - \int_0^\infty \frac{2i\sqrt{x} \cos \sqrt{x}}{x + 2\lambda\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + \lambda^2} \cdot e^{x\theta} dx, \quad \theta < 0.$$

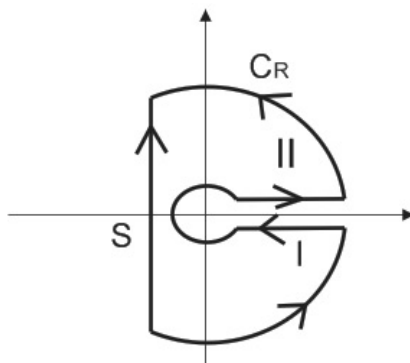


Рисунок 3. Контур интегрирования

Из этого следует

$$r^*(t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2i \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} \cdot \cos \sqrt{x} \cdot e^{x\theta}}{x + 2\lambda \cdot \sqrt{x} \cdot \sin \sqrt{x} + \lambda^2} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} \cdot \cos \sqrt{x} \cdot e^{x\theta}}{x + 2\lambda \cdot \sqrt{x} \cdot \sin \sqrt{x} + \lambda^2} dx, \theta < 0.$$

Делаем следующие замены:

$$\sqrt{x} = \xi, \quad x = \xi^2, \quad dx = 2\xi d\xi.$$

Тогда

$$r^*(\theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi^2 \cdot e^{\theta \xi^2} \cdot \cos \xi}{\xi^2 + 2\lambda \xi \cdot \sin \xi + \lambda^2} d\xi, \theta < 0. \tag{24}$$

Таким образом, когда $|\bar{\lambda}| \in D_m$ общее решение интегрального уравнения (21) будет иметь вид:

$$v(t) = g(t) + \bar{\lambda} \int_t^\infty r^*(t-\tau)g(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^m c_k \cdot e^{p_k t}. \tag{25}$$

Если $|\lambda| \in D_0$, то интегральное уравнение (11) имеет единственное решение:

$$v(t) = g(t) + \bar{\lambda} \int_t^\infty r^*(t-\tau)g(\tau) d\tau.$$

Для того чтобы решение $v(t)$, определяемое формулой (25), было суммируемым достаточно, чтобы функция $r^*(t-\tau)$ была ограничена для любых $0 < t \leq \tau < \infty$, так как функция $g_1(t) + \sum_{k=1}^m c_k \cdot e^{p_k t}$ является суммируемой функцией переменной t . Очевидно, что функция $r^*(t-\tau)$ будет ограниченной. Таким образом доказана:

Теорема. Множество $C \setminus D_0$ состоит из характеристических чисел K^* (11). Причем если $\lambda \in D_m, m = 0, 1, 2, \dots$, то $\dim Ker(K^*) = m$; и соответствующие собственные функции имеют вид:

$$v_{\lambda, k}(t) = \exp(p_k t), \quad k = 1, \dots, m,$$

где числа p_k определяются из равенств (14).

References

- 1 Dzhemaliev M.T., Ramazanov M.I. The loaded equations as indignations of the differential equations. — Almaty: Gylym, 2010.
- 2 Akhmanova D.M., Dzhemaliev M.T., Ramazanov M.I. About a boundary task for the spectral loaded operator of heat conductivity. Siberian mathematical magazine. — 2011. — Т. 52. — № 1. — P. 3–14.
- 3 Saldatov A.R., Ramazanov M.I., Shal'dakova B.A. About regional tasks for the spectral loaded parabolic operators. I // Messenger HAG. Mathematics of a series. — 2011. — № 2 (62). — P. 85–92.
- 4 Saldatov A.R., Ramazanov M.I., Shal'dakova B.A. About regional tasks for the spectral loaded parabolic operators. II // Messenger HAG. Mathematics of a series. — 2011. — № 3 (62). — P. 88–95.
- 5 Krasnov M.L. Integrated equations. — Moscow: Science, 1975. — P. 304.

А.Н.Есбаев, А.К.Жанболова, С.Н.Петерс

Мақалада жүктелген жылуөткізгіштік теңдеуі үшін өзара түйіндес есептер қарастырылған, мұндағы жүктелген қосылғыш белгісіз функцияның орнықтырылған нүктедегі бірінші ретті туындысы болып табылады. Қарапайым жүктелмеген теңдеулерге қолданылатын зерттеу әдістерін жүктелген теңдеулерге әр уақытта қолданыла бермейтіндігі белгілі. Осындай жүктеулі теңдеулерге тиімді басқару есептері, алдын ала болжау және жер ылғалдылығының деңгейін реттеу есептері келтірілді. Сонымен қоса жүктелген теңдеулер интегралдық және дифференциалдық теңдеулерін сандық есептеуде пайда болды.

A.N.Esbayev, A.K.Zhanbolova, S.N.Peters

About the first regional task for poorly — the loaded parabolic equation

In work mutually conjugate tasks for the loaded equation of heat conductivity where the loaded composed represents a derivative of the first order from unknown function in the fixed point are considered. It is known that not always it is possible to apply methods of research of the usual not loaded equations to the loaded equations. To this sort of loaded equations problems of optimum control, early forecasting and regulation of level of soil moisture are reduced. Also loaded equations arise at the numerical solution of the integrated and differential equations.

УДК 510.67

А.Р.Ешкеев

Казахстанский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: modth1705@mail.ru)

Δ -

В статье исследованы теоретико-модельные свойства нового класса теорий. В этом классе проведена работа по описанию счетно-категоричных и несчетно-категоричных теорий при соответствующих дополнительных условиях. Рассматриваемый класс теорий является позитивным обобщением йонсоновских теорий в том смысле, что вместо продолжений рассматриваются погружения.

Ключевые слова: язык первого порядка, позитивно аксиоматизируемая теория, йонсоновская теория, категоричный модельный компаньон.

Категоричные Δ-йонсоновские теории. Теперь мы хотим определить понятие Δ-йонсоновских теорий (Δ-*J*). В том случае, если при некотором фиксированном Δ, в определении рассматриваемой Δ-*PJ* теории [1] заменить все Δ-продолжения на Δ-погружения, то мы получим определение Δ-йонсоновских теорий (Δ-*J*). Легко заметить, этот класс теорий является позитивным обобщением йонсоновских теорий в отличие от (Δ-*PJ*) теорий, которые могут быть вообще говоря и нейонсоновскими. В нашем случае это не так, так как продолжения всегда являются вложениями.

Пусть *L* — язык первого порядка. *At* есть множество атомарных формул данного языка. $B^+(At)$ — замкнутое множество относительно позитивных булевых комбинаций (конъюнкция и дизъюнкция) всех атомарных формул, их подформул и замены переменных. $Q(B^+(At))$ есть множество формул в пренексном нормальном виде, полученное с помощью применения кванторов (\forall и \exists) к $B^+(At)$. На-

зовем формулу позитивной, если она принадлежит множеству $Q(B^+(At))$. Теория называется позитивно аксиоматизируемой, если ее аксиомы позитивны. $B(L^+)$ — это произвольная булева комбинация формул из L^+ . Таким образом в дальнейшем мы в качестве морфизмов имеем только погружения.

Когда $\Delta = B(At)$ мы получаем обычную йонсоновскую теорию с той лишь разницей, что у нее только позитивные $\forall\exists$ -аксиомы.

В дальнейшем все определения понятий, касающихся йонсоновских теорий (в обычном смысле), считаются известными и их можно извлечь, например, в [1].

Следующий результат можно найти в работе Д.Сарацино [2]:

Теорема 1. Если L — счетный язык и T — полная ω -категоричная теория, то T имеет ω -категоричный модельный компаньон.

При изучении йонсоновских теорий главным инструментом их исследования является семантический метод, который заключается в следующем: элементарные свойства центра йонсоновской теории «транслируются» на саму теорию. При этом элементарная теория семантической модели йонсоновской теории аналогична позитивной робинсоновской теории и является инвариантом этой йонсоновской теории, так как все семантические модели одной и той же йонсоновской теории элементарно эквивалентны между собой.

Следующее определение принадлежит А.Макинтайру [3].

Теория T позитивно модельно полна, если T модельно полна и каждая экзистенциальная L -формула эквивалентна в T некоторой позитивно экзистенциальной L -формуле.

Модель $A \in ModT$ называется простой (simple) в $ModT$, если каждый нетривиальный морфизм из A в B , где $B \in ModT$, является инъективным.

Из работы В.Вайспфенинга [4] можно извлечь следующий результат:

Теорема 2. Следующие условия эквивалентны:

- i) T позитивно модельно полна;
- ii) T модельно полна и каждая T -модель является простейшей в $ModT$.

Легко заметить, что позитивная робинсоновская теория в смысле [5, 6] является обобщением понятия оболочки Кайзера T^0 для йонсоновской теории T . В случае когда $\Delta = B(At)$ и Δ - J теория совершенна, следует, что понятия семантической модели для позитивной йонсоновской теории и универсальной области из [5, 6] совпадают. С помощью этого замечания мы хотим доказать результат, описывающий счетно категоричные Δ -йонсоновские теории.

Теорема 3. Пусть T — Δ - J -теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) теория T^* ω -категорична,
- 2) теория T ω -категорична.

Доказательство. 1) \Rightarrow 2).

1) Пусть $T^* = Th(C)$ ω -категорична, где C — T -универсальная T -однородная модель теории T . Она существует в силу того, что T , в частности, является йонсоновской теорией. Так как T^* полная, то в силу теоремы 1, T^* имеет ω -категоричный модельный компаньон T^* . В силу модельной совместности T и T^* , T^* и T^* , и так как отношение может быть модельно совместным транзитивно, мы имеем, что T^* модельно совместна с T . Из этого следует, что T^* является модельным компаньоном T . По теореме Робинсона о единственности модельного компаньона, следует, что $T^* = T^*$. Следовательно, T^* модельно полна и, следовательно, теория T совершенна. Тогда, в силу критерия о совершенности йонсоновских теорий, получим, что $E_T = ModT^*$. Отсюда, так как T^* ω — категорична по условию, следует, что в E_T — всего одна счетная модель с точностью до изоморфизма. Обозначим эту модель через D . Пусть A — счетная неэкзистенциально замкнутая произвольная модель теории T не изоморфная D . Тогда, в силу индуктивности теории, модель A Δ продолжается в некоторую B , где $B \in (E_T)^+$. Так как рассматриваемая теория является йонсоновской, мы имеем, что $(E_T)^+ \supseteq E_T$. Покажем обратное включение. Из того, что T^* модельно полна в силу совершенности и так как $E_T = ModT^*$, следует, что любая модель теории T^* является простейшей, тогда T^* позитивно модельно полна. Тогда, по определению, любая \exists -формула эквивалентна некоторой позитивной

∃-формуле. Следовательно, $(E_T)^+ \subseteq E_T$. Таким образом, $(E_T)^+ = E_T$. Тогда и в $(E_T)^+$ только одна счетная модель с точностью до изоморфизма, т.е. $B \cong D$. Тогда в B содержится Δ-начало изоморфное A , что противоречит предположению о том, что A не изоморфно D . Таким образом, T ω-категорична.

2) ⇒ 1). Пусть T ω-категорична. Предположим противное, т.е. в $ModT^*$ существуют две счетные неизоморфные модели. Обозначим их A и B . Так как $T \subseteq T^*$, то $ModT^* \subseteq ModT$, а следовательно, так как A и B из $ModT^*$, то получаем противоречие с ω-категоричностью T .

Далее мы рассмотрим несчетно категоричные Δ- J -теории, дадим следующие определения из работы [7].

Формула $\varphi(\bar{x})$ называется Δ⁺-формулой относительно теории T , если существуют позитивно экзистенциальные формулы $\psi_1(\bar{x})$ и $\psi_2(\bar{x})$ такие, что $T \models (\varphi \leftrightarrow \psi_1)$ и $T \models (\neg\varphi \leftrightarrow \psi_2)$.

Мы будем говорить, что теория T допускает R_1^+ , если для любой позитивно экзистенциальной формулы $\varphi(\bar{x})$, совместной с T , существует формула $\psi(\bar{x}) \in \Delta^+$, совместная с T , такая что $T \models \psi \leftrightarrow \varphi$.

Счетная модель теории T называется счетно-алгебраически универсальной моделью, если в неё Δ-погружаются все счетные модели данной теории.

Модель A является Δ-алгебраически простой моделью теории T , если A является моделью теории T и A может быть Δ-погружена в каждую модель теории T .

Δ- J -теория называется универсальной, если её аксиомы позитивно-универсальны.

Следующие результаты содержатся в [7].

Теорема 4. Пусть T — универсальная теория, полная для экзистенциальных предложений, имеющая счетно алгебраически универсальную модель. Тогда T имеет алгебраически простую модель, которая (Σ, Δ) -атомная.

Теорема 5. Пусть T — $\forall\exists$ -теория, полная для экзистенциальных предложений, допускающая R_1 . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) T имеет алгебраически простую модель;
- 2) T имеет (Σ, Δ) -атомную модель;
- 3) T имеет (Δ, Σ) -атомную модель;
- 4) T имеет Δ-nice алгебраически простую модель;
- 5) T имеет единственную алгебраически простую модель,

где условие R_1 следующее: если для любой экзистенциальной формулы $\varphi(\bar{x})$, совместной с T , существует формула $\psi(\bar{x}) \in \Delta$ совместная с T , такая что $T \models \psi \leftrightarrow \varphi$, а формула $\varphi(\bar{x})$ называется Δ-формулой относительно теории T , если существуют экзистенциальные формулы $\psi_1(\bar{x})$ и $\psi_2(\bar{x})$ такие, что $T \models (\varphi \leftrightarrow \psi_1)$ и $T \models (\neg\varphi \leftrightarrow \psi_2)$.

Как следствие можно получить следующие результаты относительно Δ- J -теории.

Теорема 6. Пусть T — универсальная Δ- J -теория, полная для позитивных экзистенциальных предложений, имеющая счетно алгебраически универсальную модель. Тогда T имеет Δ-алгебраически простую модель, которая (Σ, Δ^+) -атомная.

Теорема 7. Пусть T — Δ- J -теория, полная для позитивно экзистенциальных предложений, допускающая R_1 . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) T имеет Δ-алгебраически простую модель;
- 2) T имеет (Σ, Δ^+) -атомную модель;
- 3) T имеет единственную Δ-алгебраически простую модель.

Пусть $A, B \in (E_T)^+$ и $A \subsetneq B$. Тогда B называется Δ-алгебраически простым модельным расширением A в $(E_T)^+$, если для любой модели $C \in (E_T)^+$ из того, что A Δ-погружается в C , следует, что B Δ-погружается в C .

Следующий классический результат Морли из [8] описывает ω_1 -категоричные теории на языке простых расширений.

Теорема 8. Полная теория T ω_1 -категорична тогда и только тогда, когда любая её счетная модель имеет простое собственное элементарное расширение.

Следующий результат является обобщением этой теоремы.

Теорема 9. Пусть T — универсальная Δ - J -теория, полная для позитивных экзистенциальных предложений, для которой выполняется R_1^+ и $\Delta = B(At)$. Тогда эквивалентны следующие условия:

- 1) T^* ω_1 -категорична;
- 2) любая счетная модель из $(E_T)^+$ имеет Δ -алгебраически простое модельное расширение в $(E_T)^+$.

Доказательство

1) \Rightarrow 2) Если T^* ω_1 -категорична, то она совершенна в силу теоремы Морли о несчетной категоричности. Тогда в силу критерия совершенности йонсоновской теории мы имеем, что теория T^* модельно полна и $ModT^* = E_T$. В этом случае следует, что $E_T = (E_T)^+$. Если теория T^* модельно полна, то любое Δ -погружение является изоморфным вложением, а в силу модельной полноты T^* элементарным. Так как T^* — полная теория, то, применяя к ней указанную выше теорему 8, получаем требуемое.

2) \Rightarrow 1) Обращаясь к семантической модели C теории T (она существует, так как T — йонсоновская теория), получим, что модель C ω -универсальная. Её мощность, вообще говоря, больше, чем счетная. Поэтому рассмотрим её счетную элементарную подмодель D . В силу того, что C экзистенциально замкнута, её элементарная подмодель D тоже экзистенциально замкнута. Отсюда имеем, что она счетно-алгебраически универсальна. Теперь остается применить теорему 8, согласно которой теория T имеет Δ -алгебраически простую модель A_0 . Определим по индукции $A_{\delta+1}$, которая будет Δ -алгебраически простым модельным расширением модели A_δ и $A_\lambda = \cup\{A_\delta \mid \delta < \lambda\}$. Тогда пусть $A_\lambda = \cup\{A_\delta \mid \delta < \omega_1\}$. Предположим, что $B \models T$ и $cardB = \omega_1$. Для того чтобы показать, что $B \approx A$, разложим B в цепь $\{B_\delta \mid \delta < \omega_1\}$ счетных моделей. В силу йонсоновости теории T это возможно. Определим функцию $g : \omega_1 \rightarrow \omega_1$ и цепь $\{f_\delta : A_{g_\delta} \rightarrow B_\delta \mid 0 < \delta < \omega_1\}$ Δ -погружений индукцией по δ :

1. $g0 = 0$ и $f_0 : A_0 \rightarrow B_0$.
2. $g\lambda = \cup\{g\delta \mid \delta < \lambda\}$ и $f_\lambda = \cup\{f_\delta \mid \delta < \lambda\}$.
3. $f_{\delta+1}$ равна объединению цепи $\{f_\delta^\gamma \mid \gamma < \rho\}$, которая определяется индукцией по γ .

$$4. f_{\delta+1}^0 = f_\delta, f_{\delta+1}^\lambda = \cup\{f_{\delta+1}^\gamma \mid \gamma < \lambda\}.$$

5. Предположим, что $f_1^\gamma : A_{g_{\delta+\gamma}} \rightarrow B_{\delta+1}$. Если $f_{\delta+1}^\gamma$ — отображение на, то $\rho = \gamma$. В противном случае в силу Δ -алгебраической простоты $A_{g_{\delta+\gamma+1}}$ можно продолжить $f_{\delta+1}^\gamma$ до $f_{\delta+1}^{\gamma+1} : A_{g_{\delta+\gamma+1}} \rightarrow B_{\delta+1}$.

$$6. g(\delta + 1) = g\delta + \rho.$$

Ясно, что $f = \cup\{f_\delta \mid \delta < \omega_1\}$ отображает (Δ -погружает) A в B . Так как B — произвольная модель теории T , а A — единственная Δ -алгебраически простая и позитивно экзистенциально замкнутая модель в силу условия и построения, то отсюда следует, что $(E_T)^+$ в несчетной мощности имеет единственную модель, значит семантическая модель теории T насыщена, т.е. йонсоновская теория T совершенна. Отсюда следует, что $ModT^* = (E_T)^+$. Следовательно, T^* ω_1 -категорична.

References

- 1 Yeshkeyev A.R. Jonsson theory: Manual. — Karaganda: Publishing House of the KSU, 2009. — 250 p.
- 2 Saracino D. Model companion for ω -categorical theories // Proc. Amer. Math. Soc. — 1973. — № 39. — P. 591–598.
- 3 Macintyre A. Model-completeness for sheaves of structures // Fundamenta mathematicae. — 1973. — Vol. 81. — P. 73–89.

- 4 Weispfenning V. The model-theoretic significance of complemented existential formulas // The Journal of Symbolic Logic. — Dec. 1981. — Vol. 46. — № 4. — P. 843–849.
- 5 Ben-Yaacov I. Positive model theory and compact abstract theories // Journal of Mathematical Logic. — 2003. — № 1. — P. 85–118.
- 6 Ben-Yaacov I. Compactness and independence in non first order frameworks // Bulletin of Symbolic logic. — 2005. — Vol. 11. — № 1. — P. 28–50.
- 7 Baldwin J.T., Kueker D.W. Algebraically prime models // Ann. Math. Logic. — 1981. — 20. — P. 289–330.
- 8 Gerald E. Sacks. Saturated models Theory. — Moscow: Mir, 1976. — 192 p.

А.Р.Ешкеев

Δ -

Мақалада теориялардың бір жаңа класының модельді-теоретикалық қасиеттері қарастырылды. Сол класта кейбір қосымша берілген шарттар бойынша сол теориялардың категориялық сұрақтары зерттелді. Олардың ω -категориялық және ω_1 -категориялық жағдайлары кейбір қосымша берілген шарттар арқылы көрсетілген. Қарастырылған класта жалғасулардың орнына батулармен жұмыс жасалды. Бұл теориялар йонсон теориялардың позитивті жалпыламасы болып табылады.

A.R.Eshkeev

Δ -jonsson's theories

In this article we considered some new class of theories and we have been considered model-theoretical properties of such theories. In particular with concerned such theories under some additional properties it was described ω -categorical and ω_1 -categorical cases. In this class of theories instead of continuations we considered particular case of embeddings-immersions. And this class of theories is became positive generalization of jonsson's theories.

УДК 510.67

А.Р.Ешкеев¹, Р.М.Оспанов², О.И.Ульбрихт¹

¹Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова;

²Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева (E-mail modth1705@mail.ru)

Δ -

В статье рассмотрены теоретико-модельные свойства нового класса теорий Δ -йонсоновских теорий. Были исследованы свойства решеток формул этих теорий и их связь с известными вопросами в теории моделей. В частности, исследованы свойства совершенности таких теорий и их связь, связанные с вопросами алгебры Линденбаума-Тарского.

Ключевые слова: йонсоновские теории, булева алгебра, модельный компаньон, экзистенциальная формула, бескванторное дополнение.

Введение

Выделим два направления в развитии теории моделей. В [1] их называют западной и восточной теорией моделей, так как один из основоположников теории моделей А.Тарский жил на западном побережье США с 1940 г., а другой А.Робинсон — на восточном. Западная теория моделей развивается в традициях Скулема и Тарского. Она в большей степени мотивировалась проблемами в теории чисел, анализе и теории множества, и в ней используются все формулы логики первого порядка.

Восточная теория моделей развивается в традициях Мальцева и Робинсона. Она мотивировалась проблемами в абстрактной алгебре, где формулы теорий обычно имеют самое большее два блока кванторов. Она делает ударение на множества бескванторных формул и экзистенциальных формул. В отличие от западной теории моделей, которая изучает полные теории, восточная теория моделей, вообще говоря, имеет дело с неполными теориями. Класс неполных теорий достаточно широк, поэтому можно ограничиться индуктивными теориями ($\forall\exists$ -аксиоматизируемыми). В смысле полноты рассматриваемой теории максимальное требование, как правило, — $\forall\exists$ -полнота. Всем этим условиям удовлетворяют йонсоновские теории. Таким образом сделаем вывод, что изучение йонсоновских теорий относится по своей сути к проблематике «восточной» теории моделей. В данной статье мы рассмотрим указанный выше вопрос в рамках изучения неполных теорий, а именно в классе йонсоновских теорий.

Следующие теории являются примерами йонсоновских теорий:

- 1) группы;
- 2) абелевы группы;
- 3) булевы алгебры;
- 4) линейные порядки;
- 5) поля характеристики p (p — простое число либо нуль);
- 6) упорядоченные поля.

Следующий результат является главным при описании теоретико-модельных свойств совершенных йонсоновских теорий.

Теорема 0.1 [2]. Пусть T — йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) T совершенна;
- 2) T^* — модельный компаньон T ;
- 3) $Mod T^* = E_T$;
- 4) $T^* = T^f$,

где E_T — класс T — экзистенциально замкнутых моделей T ; T^0 — оболочка Кайзера (максимальная $\forall\exists$ теория, взаимно модельно совместная с T); $T^f = Th(F_T)$, где F_T — класс генерических моделей T (в смысле конечного форсинга Робинсона); T^M — модельный компаньон йонсоновской теории T . Известны следующие факты и теоремы относительно связи йонсоновских теорий и их компаньонов [2].

Пусть T — йонсоновская теория. *Компаньоном* йонсоновской теории T называется такая теория $T^\#$ той же сигнатуры, которая удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $(T^\#)_\forall = T_\forall$;
- 2) для любой йонсоновской теории T' , если $T_\forall = T'_\forall$, то $T^\# = (T')^\#$.
- 3) $T_{\forall\exists} \subseteq T^\#$.

Естественными интерпретациями компаньона $T^\#$ являются T^* , T^0 , T^f , T^M , T^e , где T -компаньон есть оболочка Кайзера; T^* -компаньон есть центр; T^M -компаньон есть модельный компаньон; T^f -компаньон есть конечный форсинг компаньон в смысле Робинсона; T^e -компаньон есть элементарная теория класса всех экзистенциально-замкнутых моделей теории T .

Факт 0.1. Для любой йонсоновской теории T эквивалентны следующие условия:

- 1) T совершенна;
- 2) T^* модельно полна.

Факт 0.2. Для любой полной для \exists -предложений йонсоновской теории T следующие условия эквивалентны:

- 1) T^* модельно полна;

2) для каждого $n < \omega$ $E_n(T)$ — булева алгебра, где $E_n(T)$ есть решетка \exists -формул с n свободными переменными.

Теорема 0.2. Пусть T — йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) T совершенна;
- 2) T^* $\forall\exists$ -аксиоматизируема.

Теорема 0.3. Пусть T — йонсоновская теория. Тогда эквивалентны следующие условия:

- 1) T совершенна;
- 2) $T^* = T^0$.

Теорема 0.4. Пусть T — йонсоновская теория. Тогда эквивалентны следующие условия:

- 1) T совершенна;
- 2) T имеет модельный компаньон.

Следующие леммы есть лёгкий результат применения указанных выше теорем.

Лемма 0.1. Если $T^\#$ — компаньон йонсоновской теории T и T^M — модельный компаньон T , то $T^\# = T^M$.

Лемма 0.2. Пусть T_1 и T_2 — йонсоновские теории. Тогда эквивалентны следующие условия:

- 1) T_1 и T_2 взаимно модельно совместны;
- 2) $T_1^\# = T_2^\#$.

Пусть L — язык первого порядка. At есть множество атомарных формул данного языка. $B^+(At)$ — замкнутое множество относительно позитивных булевых комбинаций (конъюнкция и дизъюнкция) всех атомарных формул, их подформул и замены переменных. $Q(B^+(At))$ есть множество формул в пренексном нормальном виде, полученное с помощью применения кванторов (\forall и \exists) к $B^+(At)$. Назовем формулу *позитивной*, если она принадлежит множеству $Q(B^+(At)) = L^+$. Теория называется *позитивно аксиоматизируемой*, если ее аксиомы позитивны. $B(L^+)$ — это произвольная булева комбинация формул из L^+ .

Определим Δ -морфизмы между структурами.

Пусть M и N — структуры языка, $\Delta \subseteq B(L^+)$. Отображение $h: M \rightarrow N$ называется Δ -гомоморфизмом (символически $h: M \xrightarrow{\Delta} N$), если для любого $\varphi(\bar{x}) \in \Delta$, $\forall \bar{a} \in M$ из того, что $M \models \varphi(\bar{a})$, следует, что $N \models \varphi(h(\bar{a}))$. Модель M называется *началом* в N и мы говорим, что M продолжается в N , при этом $h(M)$ называется *продолжением* M . Если отображение h инъективно, то говорят, что отображение h *погружает* M в N (символически $h: M \xleftarrow{\Delta} N$). В дальнейшем мы будем использовать термин Δ -продолжение и Δ -погружение. В рамках этого определения (Δ -гомоморфизма) легко заметить, что изоморфное вложение и элементарное вложение являются Δ -погружениями, когда $\Delta = B(At)$ и $\Delta = L$, соответственно.

Если C — класс L -структур, то мы говорим, что элемент M из C Δ *позитивно экзистенциально замкнут* в C , если каждый Δ -гомоморфизм из M в любой элемент из C является Δ -погружением.

Говорим, что теория T *допускает Δ -JEP*, если для любых двух $\Delta A, B \in ModT$ существуют $C \in ModT$ и Δ -гомоморфизмы $h_1: A \xrightarrow{\Delta} C$, $h_2: B \xrightarrow{\Delta} C$.

Говорим, что теория T *допускает Δ -AP*, если для любых $A, B, C \in ModT$, таких что $h_1: A \xrightarrow{\Delta} C$, $g_1: A \xrightarrow{\Delta} B$, где h_1, g_1 — Δ -гомоморфизмы, существует $D \in ModT$ и $h_2: C \xrightarrow{\Delta} D$, $g_2: B \xrightarrow{\Delta} D$, где h_2, g_2 — Δ -гомоморфизмы, такие что $h_2 \circ h_1 = g_2 \circ g_1$.

Теория T называется Δ -*позитивной йонсоновской* (Δ -PJ)-теорией, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. T имеет бесконечную модель;
2. T позитивно $\forall\exists$ -аксиоматизируема;
3. T допускает Δ -JEP;
4. T допускает Δ -AP.

Когда $\Delta = B(At)$, мы получаем обычную йонсоновскую теорию с той лишь разницей, что у нее только позитивные $\forall\exists$ -аксиомы. Тем самым рассматриваемая теория устойчива относительно гомоморфизмов.

При изучении йонсоновских теорий главным инструментом их исследования является семантический метод, который заключается в следующем: элементарные свойства центра йонсоновской теории «транслируются» на саму теорию. При этом элементарная теория семантической модели йонсоновской теории аналогична позитивной робинсоновской теории и является инвариантом этой йонсоновской теории, так как все семантические модели одной и той же йонсоновской теории элементарно эквивалентны между собой. В связи с этим в том случае, если Δ -PJ теория нейонсоновская в классическом смысле, то мы под её семантической моделью будем понимать любую её универсальную область U , а под центром — следующее множество предложений $T_\Delta^* = Th_\Delta(U)$.

Мы хотим определить понятия Δ -йонсоновских теорий. В том случае, если при некотором фиксированном Δ рассматриваемая Δ -PJ-теория является йонсоновской в классическом смысле, применяем относительно неё все обозначения и результаты, как в [3].

В данной статье рассматриваются Δ -йонсоновские теории счетного языка первого порядка. Это теории, которые получаются из Δ -позитивных йонсоновских теорий с помощью следующего действия. В определении Δ -позитивных йонсоновских теорий всюду вместо Δ -продолжений будем рассматривать Δ -погружения. Далее в этой статье для экономии под йонсоновской теорией будет пониматься Δ -йонсоновская теория.

Получен ряд результатов, устанавливающих связь между свойствами йонсоновской теории, центрального пополнения данной йонсоновской теории и свойствами решетки классов эквивалентности экзистенциальных формул относительно этой теории. В терминах решетки формул, введенных в работе [4] (дополняемость, псевдо-дополняемость, слабая дополняемость, алгебра Стоуна), найдены необходимые и достаточные условия элиминации кванторов центрального пополнения йонсоновской теории, позитивной модельной полноты центрального пополнения йонсоновской теории, совершенности йонсоновской теории, йонсоновости центрального пополнения йонсоновской теории.

При изучении полных теорий одним из основных методов является метод использования свойств топологического пространства $S_n(T)$ ультрафильтров булевой алгебры $F_n(T)$ фиксированной теории T . С помощью этого метода исследуются такие классические понятия теории моделей, как стабильность модели и теории, насыщенность модели, однородность модели, диаграмма модели и т.д. В случае неполной теории мы можем рассмотреть решетку $E_n(T)$ экзистенциальных формул, которая является подрешеткой булевой алгебры $F_n(T)$. В силу незамкнутости экзистенциальных формул в общем случае относительно булевых логических операций свойства топологического пространства экзистенциальных типов существенно отличаются от полного случая. Понятно, что такой подход (ограничение $F_n(T)$ до $E_n(T)$) является обобщением случая, когда мы имеем дело с полными теориями. Так как йонсоновские теории являются, вообще говоря, неполными, было бы интересно рассмотреть свойства решетки экзистенциальных формул в связи с указанным выше контекстом (например, как в [4]). В данной работе, помимо семантического метода и других общих результатов, используются понятия и результаты из работ [1, 4–6].

1. Решетки экзистенциальных формул

Введем определения понятий и дадим связанные с ними результаты относительно решеточных свойств экзистенциальных формул, основываясь на [4–6].

Пусть L — язык первого порядка. Пусть T — индуктивная теория языка L . Обозначим через $E_n(L)$ множество всех экзистенциальных формул языка L с n свободными переменными, $E(L) = \bigcup_{n < \omega} E_n(L)$. Пусть $E_n(T)$ — дистрибутивная решетка классов эквивалентности

$$\varphi^T = \{\psi \in E_n(L) \mid T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi\}, \varphi \in E_n(L), E(T) = \bigcup_{n < \omega} E_n(T).$$

Определение 1.1 [4]. Пусть $\varphi^T, \psi^T \in E_n(T)$ и $\varphi^T \cap \psi^T = 0$. Тогда ψ^T называется *дополнением* φ^T , если $\varphi^T \cup \psi^T = 1$; ψ^T называется *псевдо-дополнением* φ^T , если для всех $\mu^T \in E_n(T)$ $\varphi^T \cap \mu^T = 0 \Rightarrow \mu^T \leq \psi^T$; ψ^T называется *слабым дополнением* φ^T , если для всех $\mu^T \in E_n(T)$ $(\varphi^T \cup \psi^T) \cap \mu^T = 0 \Rightarrow \mu^T = 0$.

Определение 1.2 [4].

- 1) φ^T называется *дополняемым*, если φ^T имеет дополнение.
- 2) φ^T называется *слабо дополняемым*, если φ^T имеет слабое дополнение.
- 3) φ^T называется *псевдо-дополняемым*, если φ^T имеет псевдо-дополнение.
- 4) $E_n(T)$ называется *дополняемой*, если каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ дополняем.
- 5) $E_n(T)$ называется *слабо дополняемой*, если каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ слабо дополняем.
- 6) $E_n(T)$ называется *псевдо-дополняемым*, если каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ псевдо-дополняем.

Далее рассмотрим формулы, устойчивые относительно расширений моделей и подмоделей.

Определение 1.3 [5]. Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется *устойчивой относительно расширений моделей* в $ModT$, если для любых моделей A и B теории T таких, что $A \subset B$, и для любых $a_1, \dots, a_n \in A$ из того, что $A \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow B \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$.

Теорема 1.1 [5]. Формула φ устойчива относительно расширений моделей в $ModT$ тогда и только тогда, когда существует экзистенциальная формула ψ такая, что $T \models \varphi \leftrightarrow \psi$.

Определение 1.4 [5]. Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется *устойчивой относительно подмоделей* в $ModT$, если для любых моделей A и B теории T таких, что $A \subset B$, и для любых $a_1, \dots, a_n \in A$ из того, что $B \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow A \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$.

Теорема 1.2 [5]. Формула φ устойчива относительно подмоделей в $ModT$ тогда и только тогда, когда существует универсальная формула ψ такая, что $T \models \varphi \leftrightarrow \psi$.

Рассмотрим понятие инвариантной формулы и связь между инвариантностью экзистенциальной формулы и дополняемостью её класса в $E(T)$.

Определение 1.5 [4]. Формула φ называется *инвариантной* в $ModT$, если она устойчива одновременно относительно расширений моделей в $ModT$ и относительно подмоделей в $ModT$.

Теорема 1.3 [4]. Экзистенциальная формула φ инвариантна в $ModT$ тогда и только тогда, когда φ^T дополняем в $E(T)$.

Теорема 1.4 [4]. Экзистенциальная формула φ инвариантна в $Mod(Th_{\forall\exists}(E_T))$, где E_T — класс экзистенциально замкнутых моделей теории T , тогда и только тогда, когда φ^T слабо дополняем в $E(T)$.

Введем необходимые определения и сформулируем известные результаты, которые устанавливают связь между модельной полнотой, элиминацией кванторов, позитивной модельной полнотой теории T и свойствами решетки экзистенциальных формул $E_n(T)$.

Определение 1.6 [5]. Теория T называется *модельно полной*, если $T \cup \Delta_A$ полна в языке L_A для любой модели A теории T .

Теорема 1.5 [5].

1) Теория T модельно полна тогда и только тогда, когда каждая формула устойчива относительно подмоделей в $ModT$.

2) Теория T модельно полна тогда и только тогда, когда каждая формула устойчива относительно расширений моделей в $ModT$.

Определение 1.7 [5]. Отметим, что теория T допускает элиминацию кванторов в L , если для каждой формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ языка L существует бескванторная формула $\psi(x_1, \dots, x_n)$ такая, что

$$T \models \forall x_1 \dots \forall x_n (\varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_n)).$$

Теорема 1.6 [1].

1) Пусть T' — модельный компаньон теории T , где T — универсальная теория. В этом случае T' — модельное пополнение T , если и только если теория T допускает элиминацию кванторов.

2) Пусть T' — модельный компаньон теории T . В этом случае T' — модельное пополнение T , если и только если теория T обладает свойством амальгамируемости.

Определение 1.8 [3]. Теория T называется *подмодельно полной*, если $T \cup \Delta_A$ полна в L_A для любой подмодели A модели теории T .

Теорема 1.7 [3]. Теория T подмодельно полна тогда и только тогда, когда T допускает элиминацию кванторов.

Теорема 1.8 [4]. Теория T подмодельно полна тогда и только тогда, когда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет бескванторное дополнение.

Определение 1.9 [3]. Теория T называется *позитивно модельно полной*, если она модельно полна и каждая экзистенциальная формула языка L эквивалентна в T позитивной экзистенциальной формуле.

В следующих теоремах, полученных в работе [4], устанавливается связь между выше определенными понятиями и свойствами решетки экзистенциальных формул $E_n(T)$.

Теорема 1.9 [4]. Теория T позитивно модельно полна тогда и только тогда, когда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет позитивное экзистенциальное дополнение.

Теорема 1.10 [4]. Теория T имеет модельный компаньон тогда и только тогда, когда $E_n(T)$ слабо дополняема.

Определение 1.10 [6]. Решетка называется *алгеброй Стоуна*, если для любого её элемента верно следующее: псевдо-дополнение от псевдо-дополнения элемента равно самому элементу.

Теорема 1.11 [4]. Теория T имеет модельное пополнение тогда и только тогда, когда $E_n(T)$ — алгебра Стоуна.

Теорема 1.12 [4]. Теория T_\forall имеет модельное пополнение тогда и только тогда, когда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет слабое бескванторное дополнение.

2. Йонсоновские теории, их центры и их связь на языке свойств решеток экзистенциальных формул этих теорий

Рассмотрим йонсоновские теории и установим связь между свойствами йонсоновской теории, центрального пополнения йонсоновской теории и свойствами решетки классов эквивалентности экзистенциальных формул относительно этой теории. Для этого мы будем использовать результаты из [4–6].

Дадим следующие определения.

Определение 2.1. Теория T называется *йонсоновской*, если

1) T имеет бесконечную модель;

2) $T \forall\exists$ -аксиоматизируема;

3) T обладает свойством совместного вложения (*JEP*), т.е. любые две модели $A|_T$ и $B|_T$ изоморфно вкладываются в некоторую модель $C|_T$;

4) T обладает свойством амальгамируемости (*AP*), т.е. если для любых $A, B, C|_T$ таких, что $f_1: A \rightarrow B, f_2: A \rightarrow C$ — изоморфные вложения, существуют $D|_T$, изоморфные вложения $g_1: B \rightarrow D, g_2: C \rightarrow D$ такие, что $g_1 f_1 = g_2 f_2$.

Определение 2.2 [3]. *Семантической моделью* C_T йонсоновской теории T называется ω^+ -однородная-универсальная модель теории T (в смысле [3]).

Следующие определения даны в [3].

Определение 2.3 [3]. Пусть $\kappa \geq \omega$. Модель M теории T называется

– *κ -универсальной для T* , если каждая модель T мощности строго меньше κ изоморфно вкладывается в M ;

– *κ -однородной для T* , если при любых двух моделях A и A_1 теории T , являющихся подмоделями M мощности строго меньше κ , и изоморфизме $f: A \rightarrow A_1$, для каждого расширения B модели A , являющегося подмоделью M и моделью T мощности строго меньше κ , существуют расширение B_1 модели A_1 , являющееся подмоделью M , и изоморфизм $g: B \rightarrow B_1$, продолжающий f .

Определение 2.4 [3]. *Однородной-универсальной для T моделью* называется κ -однородная-универсальная для T модель мощности κ , где $\kappa \geq \omega$.

Определение 2.5 [3]. *Центром (центральной моделью)* йонсоновской теории T называется $T^* = Th(C_T)$.

Определение 2.6 [3]. Йонсоновская теория T называется *совершенной*, если каждая семантическая модель C_T является насыщенной моделью T^* .

В работе [7] была установлена связь между совершенностью йонсоновской теории и существованием её модельного компаньона. В дальнейшем нам будут необходимы следующие утверждения.

Теорема 2.1 [3]. Пусть T — йонсоновская теория. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) T совершенна;

2) T имеет модельный компаньон.

Теорема 2.2. Пусть T — йонсоновская теория. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) T полна;

2) T модельно полна.

Была установлена связь между совершенностью йонсоновской теории и свойствами решетки $E_n(T)$. Имеет место следующее утверждение [3].

Теорема 2.3. Пусть T — полная для \exists -предложений йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) T совершенна;
- 2) T^* модельно полна;
- 3) $E_n(T)$ — булева алгебра,

где полнота теории для \exists -предложений означает, что любые две модели этой теории относительно экзистенциальных предложений не отличаются друг от друга.

В связи с указанными выше результатами относительно введенных понятий нами получены результаты, связывающие понятия из [4] с йонсоновскими теориями.

В следующей теореме в терминах решетки экзистенциальных формул $E_n(T)$ найдены необходимые и достаточные условия элиминации кванторов центрального пополнения йонсоновской теории T и положительной модельной полноты центрального пополнения йонсоновской теории T .

Теорема 2.4. Пусть T — полная для \exists -предложений йонсоновская теория; T^* — центр теории T . Тогда

- 1) T^* допускает элиминацию кванторов тогда и только тогда, когда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет бескванторное дополнение;
- 2) T^* положительно модельно полна тогда и только тогда, когда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет положительное экзистенциальное дополнение.

Доказательство. 1) Пусть T^* допускает элиминацию кванторов. Тогда по теореме 1.7 T^* подмодельно полна. Тогда теория T^* в силу определения модельно полна, и по теореме 2.3 $E_n(T)$ является булевой алгеброй, т.е. каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет некоторое дополнение. В силу элиминации кванторов T^* , так как T^* — пополнение теории T , то и относительно теории T каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет некоторое бескванторное дополнение.

Обратно, пусть каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет бескванторное дополнение. Тогда $E_n(T)$ является булевой алгеброй и по теореме 2.3 T^* модельно полна, а также в силу пункта 2 теоремы 1.5 мы имеем, что любая формула относительно теории T^* эквивалентна некоторой экзистенциальной формуле, т.е. класс этой формулы принадлежит $E_n(T^*)$. В силу \exists -полноты теории T $E_n(T) = E_n(T^*)$. Следовательно, в силу того, что каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет бескванторное дополнение и $E_n(T)$ является булевой алгеброй, любая формула в $E_n(T^*)$ бескванторна. Таким образом, теория T^* допускает элиминацию кванторов.

2) Пусть теория T^* положительно модельно полна. Тогда в силу определения 1.9 теория T^* модельно полна и для каждой экзистенциальной формулы φ существует положительная экзистенциальная формула ψ такая, что $T^* \mid -\varphi \leftrightarrow \psi$. По теореме 2.3 $E_n(T)$ является булевой алгеброй, т.е. каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет экзистенциальное дополнение, и так как для каждой экзистенциальной формулы φ существует положительная экзистенциальная формула ψ такая, что $T^* \mid -\varphi \leftrightarrow \psi$, получаем, что каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет положительное экзистенциальное дополнение. Тем самым необходимое условие пункта 2 доказано.

Докажем достаточность пункта 2. Пусть каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет положительное экзистенциальное дополнение. Тогда по теореме 1.9 теория T положительно модельно полна, и, следовательно, по определению модельно полна. Тогда по теореме 2.2 мы имеем, что теория T полна, и так как теория T^* является центральным пополнением теории T , мы получаем, что $T = T^*$. Таким образом, T^* положительно модельно полна.

Тем самым доказательство теоремы 2.4 завершено.

В следующей теореме в терминах решетки экзистенциальных формул $E_n(T)$ найдены необходимые и достаточные условия совершенности йонсоновской теории T .

Теорема 2.5. Пусть T — йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) T — совершенна;
- 2) $E_n(T)$ слабо дополняема;
- 3) $E_n(T)$ — алгебра Стоуна.

Доказательство. Докажем из 1) в 2). Пусть йонсоновская теория T совершенна, тогда по теореме 2.1 она имеет модельный компаньон T^M . Из [1] известно, что $T^M = T^0$, где $T^0 = Th_{\forall\exists}(E_T)$ — оболочка Кайзера йонсоновской теории. Так как в силу определения модельного компаньона T^M модельно полна, по пункту 1 теоремы 1.5 вытекает, что каждая формула рассматриваемого языка устойчива относительно подмоделей в $ModT^M$. Следовательно, и каждая экзистенциальная формула этого языка устойчива относительно подмоделей в $ModT^M$, в то же время каждая экзистенциальная формула этого языка устойчива относительно расширений моделей в $ModT^M$, и, следовательно, по определению 1.5, эта формула инвариантна в $ModT^M$. Отсюда по теореме 1.4 следует, что каждая экзистенциальная формула слабо дополняема. Таким образом, $E_n(T)$ слабо дополняема.

Докажем из 2) в 1). Если $E_n(T)$ слабо дополняема, то по теореме 1.10 теория T имеет модельный компаньон. Тогда по теореме 2.1 T совершенна. Тем самым, 1) эквивалентно 2).

Докажем из 1) в 3). Заметим, что по пункту 2 теоремы 1.9 модельный компаньон йонсоновской теории является её модельным пополнением. Тогда из совершенности теории T по теореме 1.11 следует, что $E_n(T)$ — алгебра Стоуна.

Докажем из 3) в 1). Если $E_n(T)$ — алгебра Стоуна, то по теореме 1.11 теория T имеет модельный компаньон, и, следовательно, по теореме 2.1 теория T совершенна.

Тем самым доказательство теоремы 2.5 завершено.

В следующей теореме в терминах решетки формул найдены необходимые и достаточные условия йонсоновости центра йонсоновской теории.

Теорема 2.6. Пусть T — йонсоновская теория. Тогда эквивалентны следующие условия:

- 1) T^* — йонсоновская теория;
- 2) каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет бескванторное слабое дополнение.

Для доказательства необходимости нам понадобится следующее утверждение:

Факт ().* [7]. Если модельный компаньон T^M определен, то определен модельный компаньон $(T_{\forall})^M$ и $T^M = (T_{\forall})^M$.

Доказательство. Докажем из 1) в 2). Пусть T^* — йонсоновская теория, тогда из [1] следует, что теория T совершенна. Тогда по теореме 2.1 теория T имеет модельный компаньон, равный теории T^* , который по пункту 2 теоремы 1.6 является модельным пополнением теории T . В силу взаимной модельной совместности теории T и теории T_{\forall} всех универсальных следствий теории T и факта (*) модельное пополнение теории T является модельным пополнением теории T_{\forall} . Тогда по теореме 1.12 каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет слабое бескванторное дополнение.

Докажем из 2) в 1). Пусть каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет бескванторное слабое дополнение. Тогда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет слабое дополнение, т.е. $E_n(T)$ слабо дополняема. Тогда по теореме 2.5 теория T совершенна. Тогда из [1] следует, что теория T^* является йонсоновской теорией.

Тем самым доказательство теоремы 2.6 завершено.

3. К вопросу А.Д.Тайманова в классе Δ -йонсоновских теорий

Данная часть работы обобщает результаты из [8] на случай Δ -йонсоновских теорий.

При изучении свойств моделей полных теорий первого порядка полезными являются сведения о булевых алгебрах (алгебрах Линденбаума-Тарского) $F_n(T)$, $n \in \omega$, теории T . В связи с этими булевыми алгебрами $F_n(T)$, $n \in \omega$, хорошо известен вопрос академика А.Д.Тайманова (можно ознакомиться в работе [7]):

(*) Какими свойствами должны обладать булевы алгебры B_n , $n \in \omega$, чтобы существовала полная теория T , такая что B_n была изоморфна $F_n(T)$, $n \in \omega$?

В [7] профессором Т.Г.Мустафиным были даны ответы на частные случаи этого вопроса. Им были получены следующие результаты:

Теорема 3.1 [7]. Для любой булевой алгебры B существует такая полная теория T , что:

а) $B \cong F_1(T)$;

б) если B конечная, то T категорична в счетной мощности;

в) если стоуновское пространство алгебры B счетно, то T тотально трансцендентна.

Теорема 3.2 [7]. Для того, чтобы для конечных булевых алгебр B_1, B_2 существовала такая категоричная в счетной мощности теория T , что $F_1(T) \cong B_1, F_2(T) \cong B_2$, необходимо и достаточно, чтобы число атомов B_2 было больше квадрата числа атомов B_1 .

В связи с этим мы будем говорить, что вопрос (*) решается положительно для теории T , если существует такая последовательность булевых алгебр $B_n, n \in \omega$, что B_n изоморфна $F_n(T), n \in \omega$.

Рассмотрим теорию T счетного языка первого порядка L .

Хорошо известно, что, работая с йонсоновскими теориями, в некоторых случаях мы имеем возможность ограничить себя экзистенциальными формулами и экзистенциально-замкнутыми моделями рассматриваемой йонсоновской теории. В этом случае вместо алгебр Линденбаума-Тарского $F_n(T), n \in \omega$, следует рассматривать решетки экзистенциальных формул $E_n(T), n \in \omega$. Таким образом, указанный выше вопрос А.Д.Тайманова можно сформулировать следующим образом:

(**) Какими свойствами должны обладать решетки $E_n, n \in \omega$, чтобы существовала йонсоновская теория T , такая что E_n была бы изоморфна $E_n(T), n \in \omega$?

Аналогично, мы будем говорить, что вопрос (**) решается положительно для йонсоновской теории T , если существует такая последовательность решеток $E_n, n \in \omega$, что E_n изоморфна $E_n(T), n \in \omega$.

В связи с этими вопросами (*), (**) получены следующие результаты:

Теорема 3.3. Пусть T совершенная, полная для экзистенциальных предложений йонсоновская теория. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) положительное решение вопроса (**) относительно теории T ;

2) положительное решение вопроса (*) относительно теории T^* , где T^* является центром теории T ;

3) положительное решение вопроса (**) относительно $\#$ — компаньона теории T , $\# \in \{*, 0, m, f, e\}$, где 0-компаньон есть оболочка Кайзера; *-компаньон есть центр; m -компаньон есть модельный компаньон; f -компаньон есть конечный форсинг компаньон в смысле Робинсона; e -компаньон есть элементарная теория класса всех экзистенциально-замкнутых моделей теории T .

Доказательство следует из применения указанных выше теорем 2.5 и 2.6.

Если множество универсальных следствий йонсоновской теории также является йонсоновской теорией (что вообще говоря не всегда так), то тогда мы получим следующий результат.

Теорема 3.4. Пусть T — совершенная, полная для экзистенциальных предложений йонсоновская теория и теория T_{\forall} является йонсоновской, где T_{\forall} — множество универсальных предложений, выводимых из T .

Тогда эквивалентны следующие условия:

1) положительное решение вопроса (**) относительно теории T_{\forall} , где T_{\forall} — множество универсальных предложений, выводимых из T ;

2) положительное решение вопроса (*) относительно теории T^* , где T^* является центром теории T .

Доказательство следует из теоремы 0.1 и теоремы 3.3.

Все неопределенные в этой статье определения понятий можно прочитать в [8].

References

- 1 Weispfennig V. The model-theoretic significance of complemented existential formulas // The Journal of Symbolic Logic. — Vol. 46. — № 4. — Dec. 1981. — P. 843–849.
- 2 Yeshkeyev A.R., Ospanov R.M. The connection of properties of the lattice $E_n(T)$ of existential formulas of Jonsson's theory with the properties of center of the theory T // Herald of KarSU. Ser. of Mathematics. — 2007. — № 2 (46). — P. 9–14.
- 3 Yeshkeyev A.R., Ospanov R.M. About $PE_n(T)$ lattices of Δ -PJ-theories // Herald of KarSU. Series of Mathematics. — 2007. — № 4.
- 4 Handbook of mathematical logic: In 4 parts / Ed. Dzh.Barvaysa.-Part 1. Model theory: Lane. from English. — Moscow: Nauka; Home edition of physical and mathematical literature, 1982. — P. 126.
- 5 Sikorski R. Boolean algebra. — Moscow: Nauka, 1969. — 376 p.
- 6 Mustafin T.G. On Boolean algebra theories // Mathematics and physics research. — Karaganda: KSU Publ., 1974. — Issue 1. — P. 80–84.
- 7 Begetaeva G.S., Yeshkeyev A.R. On lattices of existential formulas of Jonsson's theory // All-Russian conference on the 100 - anniversary S.L.Edelmana. — Krasnoyarsk. 5–6, November, 2010. — P. 8–14.
- 8 Yeshkeyev A.R. Jonsson theory. — Karaganda: KSU Publ., 2009. — 250 p.

А.Р.Ешкеев, Р.М.Оспанов, О.И.Ульбрихт

Δ -

Мақалада жаңа Δ -йонсондық теориялардың кейбір модельді-теориялық және экзистенциалдық формулалардың торына қатысты йонсондық теориялардың орталық толығының кейбір қасиеттері қарастырылды. Осы ұғымдардың арасындағы модельдер теориясында белгілі сұрақтарға сай байланыстар дәлелденді. Δ -йонсондық теориялардың кемелдегі және Линденбаум-Тарский алгебраларымен байланысты сұрақтар қарастырылды.

A.R.Eshkeev, R.M.Ospanov, O.I.Ulbriht

The lattices of existential formulas of Δ -jonsson's theories

We are considering some model-theoretical properties of Δ -Jonsson's theory regarding the lattice of existential formulas of this theory. With this subject we are proved theorems about relations between these items. It is turns out that properties of perfectness of Jonsson's theories had description in terms of different kinds of completeness of the lattice of existential formulas of this theory. Also we considered links with famous question of A.D.Taimanov on Boolean algebras.

УДК 615.036.2

С.К.Жумагулова¹, Б.М.Саданова²

¹Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова;

²Карагандинский государственный технический университет (E-mail: - saulesha_81@mail.ru)

В статье рассмотрен набор компонентов, который позволяет организовать поиск документов в интранет с использованием системы поиска на локальном компьютере Google Desktop Search. Приведено описание предлагаемого способа поиска информации в локальных сетях, а также принципиальная схема функционирования предлагаемого решения. Изучен алгоритм реализации данной системы в качестве Windows-сервисов. Охарактеризованы компоненты сервера. Проанализированы планы расширения функциональности приложения несколькими способами.

Ключевые слова: компонент хранилища, метаданные, пространство имен System.Collections, .NET Remoting, компонент сервера.

Трудно переоценить значение использования компьютера в современных предприятиях и организациях. Практически все процессы в них связаны с прямым или косвенным использованием компьютеров. Объемы хранилищ документов организаций исчисляются гигабайтами, а в некоторых случаях и терабайтами. При таких объемах поиск нужного документа (особенно в слабоструктурированных хранилищах) становится достаточно сложной проблемой. Он усугубляется тем, что часто в организации имеется несколько хранилищ документов, расположенных на разных серверах, и ручной поиск документа в таком случае становится практически невозможным.

Поэтому создание эффективных поисковых машин в электронных хранилищах организаций является актуальной задачей. Необходимо создать набор компонентов для поиска информации в локальных сетях с распределенными или сосредоточенными на одном компьютере хранилищами документов с использованием существующих (желательно бесплатных) программных средств.

Основным результатом выполненной работы является разработанный с использованием технологии .NET набор компонентов, который позволяет организовать поиск документов в интранет с использованием системы поиска на локальном компьютере Google Desktop Search [1].

Выбранный подход, а именно «разработка интерфейса (оболочки — *wrapper*) для «обертывания» существующих программ или существующих компонентов сторонних разработчиков» может быть обоснован относительно малой трудоемкостью реализации и большой эффективностью.

Описание предлагаемого решения:

- 1) берется существующая поисковая система (Search engine), которая работает эффективно, но не удовлетворяет каким-то потребностям;
- 2) разрабатывается компонент-оболочка, которая, взаимодействуя с поисковой системой, решает поставленную задачу;
- 3) создается компонент, который организует взаимодействие с разработанной оболочкой.

Принципиальная схема предложенного решения представлена на рисунке 1.

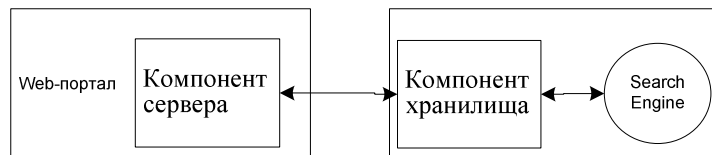


Рисунок 1. Принципиальная схема функционирования предлагаемого решения

Это решение предполагает создание системы, включающей две основные части:

1) компонент, устанавливающийся на компьютер, к которому будут адресованы запросы конечных пользователей (далее — *компонент сервера*). Именно он организует взаимодействие с разработанной оболочкой для поисковой системы;

2) множества компонентов, устанавливаемых на компьютеры, где находятся хранилища документов (далее — *компонент хранилища*). Именно он взаимодействует с поисковым движком для получения результатов поиска.

Основные части системы реализованы в качестве Windows-сервисов [2].

Компонент сервера может быть подключен к программе, которая нуждается в предоставляемой ей функциональности. Это может быть Web-сервер, некоторое приложение, которое предоставляет доступ к компоненту на основе Windows-форм и т.п. Получая запрос от подключившего его приложения, компонент рассылает его всем или нескольким зарегистрированным в нем компонентам хранилищ (в зависимости от того, указан ли в запросе набор хранилищ, интересующий пользователя). Затем он собирает ответы, полученные от компонентов хранилищ и передает их вызывавшему приложению.

Компонент хранилища несет в себе больше функциональности. Получая запрос от компонента сервера, он передает его GDS, затем разбирает его и каждый результат сохраняет как объект класса *Google Answer*. В результате в имеющемся массиве результатов выбираются те, доступ к которым разрешен для запрашивающего пользователя (папки, к которым разрешен доступ, задаются настройкой компонента). Эти выбранные результаты возвращаются компоненту сервера.

Принципиальная архитектура системы на основе компонентов изображена на рисунке 2.

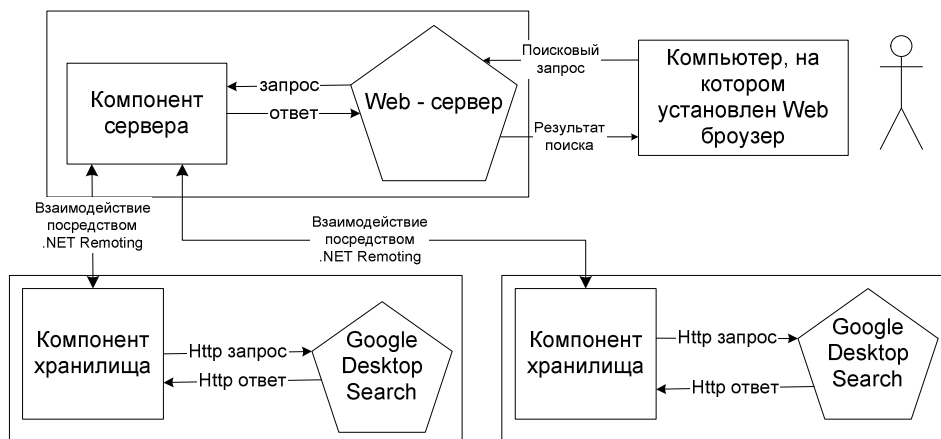


Рисунок 2. Архитектура поисковой системы

Принципиальным решением при построении системы является выбор системы взаимодействия между компонентом сервера и компонентами хранилищ. Рассмотрим два основных варианта — COM/DCOM и .NET Remoting. Значительная часть мощи и простоты использования объектной технологии обусловлена лежащими в ее основе системой типов и моделью объектов. В DCOM действуют те же ограничения, которые присущи системе типов и объектно-ориентированным возможностям COM. COM не поддерживает наследование реализации, за исключением конструкций, подобных агрегированию и включению. Средства обработки ошибок ограничены кодами возврата, так как COM не поддерживает исключения. Система типов COM также является непоследовательной и разрозненной. COM-системы на основе языка C++ используют описания типов в исходных текстах (IDL), тогда как Visual Basic и языки сценариев — двоичные описания типов (библиотеки типов). Ни IDL, ни библиотеки типов не могут считаться безусловным стандартом, так как каждый из этих вариантов поддерживает конструкции, не поддерживаемые другим вариантом. Наконец, COM не поддерживает целый ряд объектно-ориентированных конструкций, таких как модификаторы `static`, виртуальные функции и перегружаемые методы.

В противоположность DCOM .NET Remoting является мощной и простой в использовании технологией во многом благодаря общей системе типов (`common type system`, CTS) и общезыковой исполняющей среде (`common language runtime`, CLR). Информация о типах — метаданные — стандартизована и доступна. CTS определяет набор базовых типов, которые должны поддерживаться всеми .NET-совместимыми языками. Эти элементы так же надежны при удаленном взаимодействии, как и при взаимодействии между классами внутри одной программы. Более того, метаданные имеют унифицированный формат и хранятся вместе с определяющей их сборкой (`assembly`), поэтому удаленным объектам не требуются отдельные описания типов, как в DCOM и CORBA.

Благодаря возможности использовать всю мощь объектно-ориентированных средств .NET, .NET Remoting полностью поддерживает наследование реализации, свойства, а также статические, виртуальные и перегружаемые методы. CLR и CTS позволяют разработчикам использовать одну объектную систему как для локальных, так и для удаленных объектов и избегать проектных решений, в которых удаленное расположение объектов ограничивает свободу использования объектно-ориентированного подхода. Наконец, .NET полностью поддерживает распространение исключений между удаленными процессами, что значительно упрощает обработку ошибок для распределенных объектов по сравнению с кодами возврата DCOM [3].

Исходя из приведенных аргументов, для решения поставленной задачи был выбран более новый, более удобный .NET Remoting.

В наши дни существует несколько завоевавших успех на рынке технологий созданий распределенных приложений — CORBA, Java RMI, DCOM. Все они более или менее полно удовлетворяют запросы пользователей, хотя прежде, чем это стало так, каждая из этих технологий прошла немалый путь.

С появлением .NET возникла альтернатива этим технологиям — .NET Remoting. Одно из главных отличий Remoting от предшественников состоит в том, что эта технология создана для работы в управляемой среде. Там, где раньше речь шла о процессах и взаимодействии между ними, теперь говорится о контекстах и доменах приложений. Дело в том, что CLR контролирует типы в управляемом коде и проверяет, не производится ли обращений по недопустимым адресам. Это позволяет нескольким управляемым приложениям исполняться внутри одного процесса так же изолированно, как и в неуправляемой модели, где каждому из приложений отводится собственный процесс.

.NET Remoting — это технология управляемых удаленных вызовов между доменами приложений. Домены приложений — это единицы изоляции в CLR, которые создаются и работают внутри процесса. Код и объекты, исполняющиеся в одном домене приложения, не имеют непосредственного доступа к коду и объектам, исполняемым в другом домене. Именно это определяет сферу применимости Remoting.

На рисунке 3 приведена схема, иллюстрирующая работу .NET Remoting.

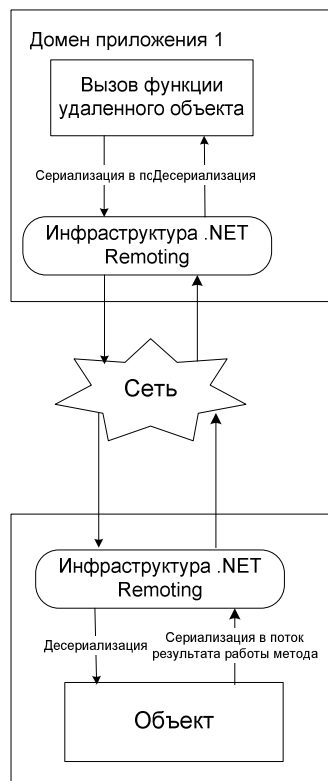


Рисунок 3. Принципиальная схема функционирования .NET Remoting

Программисту для работы с удаленными объектами теперь достаточно лишь зарегистрировать классы некоторым образом и затем можно не задумываться о том, что объекты этих классов — удаленные.

Описание компонента сервера.

Компонент сервера обладает следующей функциональностью:

I. Поисковая функциональность:

- 1) на основе запроса, полученного от использующего его приложения, формировать запрос к Google Desktop Search;
- 2) осуществлять взаимосвязь с зарегистрированными в нём компонентами хранилищ;
- 3) обладать способностью рассылать запрос и получать ответ от компонентов хранилищ;
- 4) обеспечивать поддержку разграничения поисковых прав в зависимости от принадлежности пользователя, осуществляющего поиск, к тем или иным поисковым группам;
- 5) обеспечить выборочную рассылку к некоторой группе поисковых хранилищ для поддержки функционирования групп хранилищ;
- 6) быть устойчивым к разрывам сети;
- 7) обеспечивать функциональность сервера вне зависимости от того, аутентифицирован ли какой-либо пользователь в системе;
- 8) содержать информацию о текущем состоянии поисковых хранилищ;
- 9) кэшировать результаты поиска.

II. Функциональность по настройке поисковых хранилищ.

- 1) обеспечивать возможность удаленной настройки поискового хранилища, то есть задания поисковых групп и разрешенных для них путей.

Использованные в компоненте пространства имен .NET Framework

- Пространство имен System.Collections.

Пространство *System.Collections* библиотеки классов .NET Framework содержит классы, служащие контейнерами для групп или наборов (collections) данных. Один из примеров — *ArrayList*, реализующий массивы переменной длины. Благодаря этому и другим типам, определенным в *System.Collections*, можно потратить больше времени на написание кода, специфичного для вашего приложения, и меньше — на утомительное написание инфраструктурного кода [4].

В реализованном наборе компонентов активно использовался класс *ArrayList* как контейнер для объектов класса *Google Answer*.

- Пространство имен *System.Runtime.Remoting*.

Пространство имен *System.Runtime.Remoting* обеспечивает возможность взаимодействия между удаленными классами через .NET Remoting.

- Пространство имен *Microsoft.Win32*.

Содержит классы двух типов: классы, обрабатывающие события, вызываемые операционной системой, и классы, работающие с системным реестром. Предназначено для извлечения части настроек из реестра, в том числе о месторасположении файла конфигурации.

Набор компонентов разрабатывается таким образом, чтобы его функциональность могла быть легко расширена. В дальнейшем планируется расширить функциональность приложения следующим образом:

- добавить возможность искать в некоторых выбранных каталогах (при условии что к ним у пользователя имеется доступ);
- расширить спектр информации, получаемой от компонентов хранилищ о каждом конкретном файле такими сведениями, как:
 - размер;
 - дата создания;
 - дата изменения;
 - создать возможность поиска и по этим параметрам;
- реализовать возможность работать с помощью .NET Remoting через HTTP, а не через TCP, что даст возможность использовать систему в тех организациях, где филиалы не соединены единой локальной сетью, а связь между локальными сетями филиалов осуществляется через Интернет и для безопасности защищена брандмауэрами.

Разработка систем поиска в локальных сетях является актуальной на сегодняшний день задачей. Скорость нахождения необходимой информации — фактор, в значительной мере сказывающийся на производительности труда сотрудников, а соответственно, и на производительности организации в целом. Показателем того, что такие системы необходимы, является наличие большого выбора подобных систем на рынке программного обеспечения [5].

Разработанное приложение имеет достаточно большие перспективы, так как основано на бесплатном движке поиска и в то же время предоставляет достаточно широкий спектр поисковых услуг.

Показателем того, что такие системы необходимы, является наличие большого выбора подобных систем на рынке программного обеспечения [5].

References

- 1 *Jef Prosz.* Programming for .NET / Russian edition. — Moscow, 2003.
- 2 *McLean S., Naftel J., Williams K.* Microsoft .NET Remoting / Russian edition. — Moscow, 2003.
- 3 *Gunnerson E.* Introduction in C# — St. Petersburg, 2001.
- 4 *Michael Dzh.* Young Microsoft XML // Step by step. — Moscow, 2000.
- 5 *Richter G.* Programming on the Microsoft .NET Framework/Platform Russian edition. — Moscow, 2003.

С.К.Жумагулова, Б.М.Саданова

Мақалада Google Desktop Search локалды компьютерде іздеу жүйесін пайдаланумен интранетте құжаттарды іздеуді ұйымдастыруға мүмкіндік беретін компоненттер жиынтығы қарастырылған. Ұсынылатын локалды желілерде ақпаратты іздеу тәсілі берілген. Бұл жүйені Windows-сервис арқылы іске асыру алгоритмі зерттелген. Сервер компоненттері анықталған. Қосымшаның жұмысын кеңейту мақсатымен әр түрлі тәсілдер жоспарлары келтірілген.

S.K.Gumagulova, B.M.Sadanova

Research and development of means of search in local collections of documents

In article the set of components which allows to organize search of documents in the intranet with use of system of search on the local Google Desktop Search computer is considered. The description of an offered way of information search is provided in local networks, and also the schematic diagram of functioning of the offered decision. The algorithm of realization of this system as Windows-services is considered. Server components are described. Plans of expansion of functionality of the appendix are provided in several ways.

-

В статье построены равномерные приближения решения сингулярно-возмущенной системы дифференциальных уравнений с любой степенью точности в особо критическом случае. Единственность решения исходной задачи строится методом последовательных приближений. При этом собственные значения жордановых клеток матрицы могут быть кратными, не имеют нулей и порядки не меняются при изменении независимого переменного. Приведены оценка и доказательства сходимости последовательных приближений.

Ключевые слова: сингулярно-возмущенные дифференциальные уравнения, собственные значения, метод последовательных приближений.

Рассмотрим задачу:

$$\varepsilon x'(t, \varepsilon) = J(t)x(t, \varepsilon) + \varepsilon(f(t) + B(t)x(t, \varepsilon)) + g(t, x(t, \varepsilon)); \quad (1)$$

$$x(t_0, \varepsilon) = x^0(\varepsilon), \quad \|x^0(\varepsilon)\| = O(\varepsilon), \quad (2)$$

где $J(t)$ — жорданова форма некоторой первоначально заданной матрицы $A(t)$, которая имеет собственные значения $\lambda_k(t)$, $k = \overline{1, m}$; причем среди $\lambda_k(t)$ могут оказаться кратные; $f(t) = \text{colon}(f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t))$; $B(t) = (b_{kj}(t))_1^m$; $\varepsilon > 0$ — малый параметр; $g(t, x(t, \varepsilon)) = \text{colon}(g_1(t, x), g_2(t, x), \dots, g_m(t, x))$, $g(t, 0) \equiv 0$; $[t_0, T]$ — отрезок действительной оси, $t_0 < T_0$; $[t_0, T_0] \subset S_r$ — открытый круг радиуса $r \geq \frac{1}{2}|T_0 - t_0| + d$ ($d > 0$) с центром в точке $((T_0 + t_0)/2, 0)$; $t \in S_r$; $Jm\lambda_1(t_1, t_2) > 0$ ($j = \overline{1, m}$), $0 < \delta - \text{const}$; $\Phi(S_r)$ — пространство аналитических функций в S_r .

Решение $x(t, \varepsilon) = \text{colon}(x_1(t, \varepsilon), x_2(t, \varepsilon), \dots, x_m(t, \varepsilon))$ будем искать в классе $x_k(t, \varepsilon) \in \Phi(S_r)$ ($k = \overline{1, m}$) по t .

Будем требовать выполнения следующих условий:

Пусть

I. $\lambda_k(t) \in \Phi(S_r)$; $f_k(t) \in \Phi(S_r)$; $b_{kj}(t) \in \Phi(S_r)$; $g_k(t, x) \in \Phi(\Delta(t, x))$ ($k, j = \overline{1, m}$); $g(t, x(t, \varepsilon))$ разлагаются в области $\Delta(t, x)$ в ряды по степеням переменных x_1, x_2, \dots, x_m , причем разложения начинаются по степеням не ниже второго порядка.

II. а) собственные значения $\lambda_1(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, $\lambda_2(t) = \alpha(t) - i\beta(t)$ являются γ -кратными $1 < \gamma$, $2\gamma \leq m$, где $\alpha(t), \beta(t)$ — действительные функции, причем $\alpha(t) < 0$ при $t_0 \leq t < a_0$; $\alpha(t) > 0$ при $a_0 < t \leq T_0$; $\alpha(a_0) = 0$, но $\beta(a_0) \neq 0$.

б) $\text{Re}\lambda_j(t) < 0$ при $t \in H_0 = \{(t_1, t_2) : t_0 \leq t_1 \leq T_0; -\infty < t_2 < +\infty\}$ для $j = 2\gamma + 1, \dots, m$.

III. $\lambda_1(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, $\lambda_2(t) = \alpha(t) - i\beta(t)$ не имеют нулей на H_0 .

IV. Пусть матрица $J(t)$ является жордановой формой матрицы $A(t)$. Порядки жордановых клеток матрицы $A(t)$, определяемые собственными значениями $\lambda_1(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, $\lambda_2(t) = \alpha(t) - i\beta(t)$, не меняются при изменении t на промежутке $t_0 \leq t \leq T_0$, т.е. элементарные делители матрицы $A(t)$ вида $(\lambda - \lambda_j(t))^p$ ($j = 1, 2$) с изменением переменной t на промежутке $[t_0, T_0]$, натуральное число p остаются постоянными, а собственные значения $\lambda_1(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, $\lambda_2(t) = \alpha(t) - i\beta(t)$ являются переменными величинами.

Что касается остальных собственных значений, т.е. тех, у которых $\operatorname{Re}\lambda_j(t) < 0$ при $t_0 \leq t_1 \leq T_0$, то их кратность и число отвечающих им элементарных делителей не существенны, более того обе эти величины могут меняться с изменением t .

Мы имеем $A(t) = B_0(t)J(t)B_0^{-1}$, где $J(t)$ — жорданова форма матрицы $A(t)$. Жордановы клетки матрицы $A(t)$, определяемые собственными значениями $\lambda_1(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, $\lambda_2(t) = \alpha(t) - i\beta(t)$, обозначим через $J_1(t), J_2(t), \dots, J_s(t)$; а жордановы клетки, определяемые собственными значениями $\lambda_j(t)$ ($\operatorname{Re}\lambda_j(t) < 0$ при $t_0 \leq t_1 \leq T_0$ для $j = 2r+1, m$), обозначим через $\tilde{J}_1(t), \tilde{J}_2(t), \dots, \tilde{J}_q(t)$ ($q \leq m - 2k$).

Тогда $J(t) = \{J_1(t), J_2(t), \dots, J_s(t), \tilde{J}_1(t), \tilde{J}_2(t), \dots, \tilde{J}_q(t)\}$.

Пусть $\lambda_0(t)$ — собственное число матрицы $A(t)$. Собственному числу λ_0 соответствует элементарный делитель вида $(\lambda - \lambda_0)^p$, где натуральное число $p \geq 1$.

Тогда жордановы клетки порядка p соответствующего элементарному делителю $(\lambda - \lambda_0)^p$ можно взять в виде:

$$J_0(t) = \begin{vmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \lambda_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma & \lambda_0 \end{vmatrix},$$

где $\gamma \neq 0$ — постоянное комплексное число (в частности, можно считать его достаточно малым по модулю), квадратная матрица имеет порядок p [1].

Теорема. Пусть выполнены условия I–IV. Тогда для задачи (1), (2) при $t_0 \leq t \leq T_0 - \tilde{\delta}(\varepsilon)$ существует единственное решение и для него справедлива оценка

$$\|x(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon, \tag{3}$$

где $c > 0$ — постоянная, не зависящая от t и ε ; $\tilde{\delta}(\varepsilon) \geq 0$ — непрерывная функция при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\delta}(\varepsilon) = 0$.

Задачи (1), (2) решаются методом последовательных приближений.

Теперь наша основная задача заключается в оценке и доказательстве сходимости последовательных приближений на множестве $(\Delta \cup K_\varepsilon) \subset H_0$; $t = t_1 + it_2$; t_1, t_2 — действительные переменные, области Δ, K_ε определим ниже.

Числа p, q будем выбирать так, чтобы для них имело место неравенство: $0 < p < q < 1$. Заметим, что из равенства

$$u_1(t_1^*, 0) = -\varepsilon^p \quad (u_1(t_1^*, 0) = -\varepsilon^q; \quad u_1(t_1^*, 0) = -\varepsilon) \tag{4}$$

в некоторой окрестности точки $(t_1^* = t_0, \varepsilon = 0)$ однозначно определяются

$$t_1^* = t_0 + \delta(\varepsilon) \quad (t_1^* = t_0 + \gamma(\varepsilon); \quad t_1^* = t_0 + \gamma_1(\varepsilon)),$$

где $\delta(\varepsilon) \geq 0$ ($\gamma(\varepsilon) \geq 0; \gamma_1(\varepsilon) \geq 0$) — непрерывная функция от ε при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ($\varepsilon_0 > 0$) и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon) = 0$

$$\left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\gamma}(\varepsilon) = 0; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\gamma}_1(\varepsilon) = 0 \right).$$

Здесь все условия существования неявной функции выполняются. Аналогично из равенства (4) в некоторой окрестности точки $(t_1^* = T_0, \varepsilon = 0)$ однозначно определяется $t_1^* = T_0 - \tilde{\delta}(\varepsilon)$ ($t_1^* = T_0 - \tilde{\gamma}(\varepsilon); \quad t_1^* = T_0 - \tilde{\gamma}_1(\varepsilon)$), где $\tilde{\delta}(\varepsilon) \geq 0$ ($\tilde{\gamma}(\varepsilon) \geq 0; \quad \tilde{\gamma}_1(\varepsilon) \geq 0$) — непрерывная функция от ε при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ($\varepsilon_0 > 0$) и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\delta}(\varepsilon) = 0$ ($\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\gamma}(\varepsilon) = 0; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\gamma}_1(\varepsilon) = 0$).

Пусть $u_1'(t_1, t_2) = -Jm\lambda_1(t_1, t_2) \neq 0$. Тогда из равенства $u_1(t_1, t_2^*) = -\beta(\varepsilon)$, при любом допустимом t_1 в некоторой окрестности точки $(t_2^* = t_2, \varepsilon = 0)$, однозначно определяется $t_2^* = \tilde{\varphi}(t_1, \varepsilon)$. Здесь $\beta(\varepsilon) > 0$ — непрерывная функция такая, что $\varepsilon \leq \beta(\varepsilon) \leq \varepsilon^p$ при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Для оценки последовательных приближений $\{x_k^{(n)}\}$ ($n = 2, \dots; k = \overline{1, m}$) будем использовать основную лемму 4 работы [2]. В рассматриваемом случае все условия леммы 4 работы [2] выполняются. Поэтому все заключения леммы 4 работы [2] имеют место.

Пусть линия уровня (C_1) соединяет точки $(t_0 + \gamma(\varepsilon), 0)$, $(T_0 - \tilde{\gamma}(\varepsilon), 0)$; линия уровня (C_2) — точки $(t_0 + \delta(\varepsilon), 0)$, $(T_0 - \tilde{\delta}(\varepsilon), 0)$; а линия уровня (\bar{C}) соединяет точки $(t_0 + \gamma_1(\varepsilon), 0)$, $(T_0 - \tilde{\gamma}_1(\varepsilon), 0)$.

Через точки $(T_0 - \tilde{\delta}(\varepsilon), 0)$ проведем прямую, параллельную оси t_2 . Эта прямая с линией уровня (C_1) имеет единственную точку пересечения $(T_0 - \tilde{\delta}(\varepsilon), t_{21})$ (условие $Jm\lambda_1(t) > 0$).

Введем в рассмотрение полосу Π , ограниченную линиями уровня (C_1) и (C_2) , отрезком действительной оси $[t_0 + \gamma(\varepsilon), T_0 - \tilde{\delta}(\varepsilon)]$ и отрезком, соединяющим точки $(T_0 - \tilde{\delta}(\varepsilon), 0)$, $(T_0 - \tilde{\delta}(\varepsilon), t_{21})$.

На полосе Π рассмотрим уравнение

$$u_1(t_1, t_2) = at_1 + b; \tag{5}$$

где

$$a = \frac{\varepsilon^q - \varepsilon^p}{T_0 - t_0 - \gamma(\varepsilon) - \tilde{\delta}(\varepsilon)}; \quad b = \frac{\varepsilon^p [t_0 + \gamma(\varepsilon)] - \varepsilon^q [T_0 - \tilde{\delta}(\varepsilon)]}{T_0 - t_0 - \gamma(\varepsilon) - \tilde{\delta}(\varepsilon)}.$$

В полосе Π существует непрерывно дифференцируемая кривая (K_0) , соединяющая точки $(t_0 + \gamma(\varepsilon), 0)$, $(T_0 - \tilde{\delta}(\varepsilon), 0)$ и имеющая уравнение (5). Причем из (5) однозначно определяется $t_2 = \varphi(t_1)$ с областью существования $t_0 + \gamma(\varepsilon) \leq t_1 \leq T_0 - \tilde{\delta}(\varepsilon)$ и $u_1(t_1, \varphi(t_1))$ убывает при $t_0 + \gamma(\varepsilon) \leq t_1 \leq T_0 - \tilde{\delta}(\varepsilon)$.

Возьмем кривую (K_0^*) , симметричную к (K_0) . Область, ограниченную (K_0) и (K_0^*) , обозначим $K_\varepsilon \subset H_0$; Еще возьмем кривую (C^*) , симметричную к (\bar{C}) . Область, ограниченную (\bar{C}) и (C^*) , обозначим $\bar{K} \in H_0$ ($K_\varepsilon \subset \bar{K}$).

Будем оценивать $x^{(1)}(t, \varepsilon)$ для $t \in \tilde{K} = \Delta_1 \cup \bar{K} \cup \tilde{\Delta}_1$, где

$$\Delta_1 = \{(t_1, t_2) : t_0 \leq t_1 \leq t_0 + \gamma_1(\varepsilon); t_2 = 0\};$$

$$\tilde{\Delta}_1 = \{(t_1, t_2) : T_0 - \tilde{\gamma}_1(\varepsilon) \leq t_1 \leq T_0; t_2 = 0\}.$$

Если $(t_1, t_2) \in \Delta_1$ ($t = t_1, t_2 = 0$), то l_1 состоит из одного отрезка прямой, соединяющего точку $(t_2, 0)$ с точкой $(t_1, 0)$ ($t_0 \leq t_1 \leq t_0 + \gamma(\varepsilon)$). В этом случае $\operatorname{Re} \lambda_j(t) \leq -\alpha$, $\alpha > 0 - const$.

Если $(t_1, t_2) \in \bar{K}$, то $l_1 = \bigcup_{k=1}^3 l_k^{(1)}$, где $l_1^{(1)}$ — отрезок прямой, соединяющий точки $(t_0, 0)$ с точкой $(t_0 + \gamma_1(\varepsilon), 0)$; $l_2^{(1)}$ — отрезок кривой (\bar{C}) , соединяющий точки $(t_0 + \gamma_1(\varepsilon), 0)$ с точкой $(t_1, t_2^* = \tilde{\varphi}(t_1, \varepsilon))$; $l_3^{(1)}$ — отрезок прямой, соединяющий точки (t_1, t_2^*) с точкой (t_1, t_2) .

Если $(t_1, t_2) \in \tilde{\Delta}_1$, то путь интегрирования l_1 определим как $l_1 = \bigcup_{k=1}^3 l_k^{(1)}$, где $l_1^{(1)}$ — отрезок прямой, соединяющий точки $(t_0, 0)$ с точкой $(t_0 + \gamma_1(\varepsilon), 0)$ (как в случае, когда $((t_1, t_2) \in \bar{K})$; $l_2^{(1)}$ — отрезок кри-

вой (\bar{C}) , соединяющий точку $(t_0 + \gamma_1(\varepsilon), 0)$ с точкой $(T_0 - \tilde{\gamma}_1(\varepsilon), 0)$; $l_3^{(1)}$ — отрезок прямой, соединяющий точки $(T_0 - \tilde{\gamma}_1(\varepsilon), 0)$ с точкой $(t_1, t_2 = 0)$.

Справедлива оценка

$$\|x^{(1)}(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon,$$

где $c = const, t \in \tilde{K}$.

Теперь будем оценивать $x^{(n)}(t, \varepsilon) (n=2,3,\dots)$ для $\forall t \in \Delta \cup K_\varepsilon$ при $\lambda_j(t) = \lambda_1(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$; $(\lambda_j(t) = \lambda_2(t) = \overline{\lambda_1(t)})$, где $\Delta = \{(t_1, t_2) : t_0 \leq t_1 \leq t_0 + \gamma_1(\varepsilon), t_2 = 0\}$; K_ε определена раньше.

Если $(t_1, t_2) \in \Delta (t = t_1, t_2 = 0)$, то l состоит из одного отрезка прямой, соединяющего точку $(t_0, 0)$ с точкой $(t_1, 0) (t_0 \leq t_1 \leq t_0 + \gamma(\varepsilon))$. В этом случае $\text{Re} \lambda_j(t) \leq -\alpha, \alpha > 0 (j=1,2)$.

Пусть $(t_1, t_2) \in K_\varepsilon$. Тогда $l = \bigcup_{k=1}^3 l^{(k)}$, где $l^{(1)}$ — отрезок прямой, соединяющий точки $(t_0, 0)$ с точкой $(t_0 + \gamma(\varepsilon), 0)$; $l^{(2)}$ — отрезок кривой (K_0) , соединяющий точки $(t_0 + \gamma(\varepsilon), 0)$ с точкой $(t_1, t_2^* = \tilde{\varphi}(t_1, \varepsilon))$; $l^{(3)}$ — отрезок прямой, соединяющий точки (t_1, t_2^*) с точкой (t_1, t_2) .

Имеет место следующая оценка для $(t_1, t_2) \in \Delta \cup K_\varepsilon$:

$$\|x^{(n)}(t, \varepsilon)\| \leq c\alpha_n(\varepsilon),$$

где

$$\alpha_n(\varepsilon) = \varepsilon [1 + \varepsilon^{p_0} + \varepsilon^{2p_0} + \dots + \varepsilon^{(n-1)p_0}];$$

$$p_0 = 1 - p - q; 0 < p < q < \frac{1}{2}, n = 1, 2, \dots; c > 0 - const.$$

Существует $0 < \varepsilon_0 < 1$ такое, что $0 < \varepsilon^{p_0} < 1$ при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, где $p_0 = 1 - p - q, 0 < p < q < \frac{1}{2}$. Сле-

довательно, $c\alpha_n(\varepsilon) < \frac{c\varepsilon}{1 - \varepsilon^{p_0}}$.

Таким образом, можно считать, что доказана оценка

$$\|x(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon$$

для $(t_1, t_2) \in \Delta \cup K_\varepsilon$.

Ряд $x^{(1)}(t, \varepsilon) + [x^{(2)}(t, \varepsilon) - x^{(1)}(t, \varepsilon)] + \dots + [x^{(n)}(t, \varepsilon) - x^{(n-1)}(t, \varepsilon)] + \dots$ мажорируется сходящимся рядом.

$$c\varepsilon + c\varepsilon q_0 + c\varepsilon q_0^2 + \dots + c\varepsilon q_0^{n-1} + \dots,$$

где $q_0 = c\varepsilon^{p_0}, p_0 = 1 - p - q, 0 < p < q < \frac{1}{2}, 0 < c - const$.

Поэтому при $t_0 \leq t \leq T_0 - \tilde{\delta}(\varepsilon)$ справедлива оценка

$$\|x(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon, \text{ где } c = const.$$

Теорема доказана.

Следует отметить, что точка $t = T_0$ является особой критической точкой: $u_k(T_0, 0) = 0$;

$\text{Re} \lambda_k(T_0, 0) > 0$. Кроме этого, мы получим, что

$$d\tau_2 = \frac{\text{Re} \lambda_1(t_1, t_2) - a}{\text{Im} \lambda_1(t_1, t_2)} d\tau_1.$$

Следует учесть, что если (t_1, t_2) — внутренняя точка области H_0 , то гармоническая функция $\text{Im} \lambda_1(t_1, t_2) > 0$ и если (t_1, t_2) — граничная точка области H_0 , то может иметь место $\text{Im} \lambda_1(t_1, t_2) = 0$ (достаточно взять пример $\lambda_k(t_1, t_2) = \sin t \pm i \cos t$).

Так как в работе [2] $u_k(T_0, 0) = -d < 0$, где $0 < d - const$, то в работе [2] можно считать, что $\text{Im}\lambda_1(t_1, t_2) > 0$. Мы рассматриваем случай, когда $u_k(T_0, 0) = 0$. Поэтому может иметь место $\text{Im}\lambda_1(t_1, t_2) = 0$. Это есть появления особенности особой критической точки $t = T_0$.

References

- 1 *Petrovsky I.G.* Lectures on theory of ordinary differential equations. — Moscow: Nauka, 1964. — P. 154–159.
- 2 *Alybaev K.S.* The method of line-level research singularly perturbed when condition is stable: Diss. on competition. uch. Art. Dr. phys. — Mat. Sciences: 01.01.02. — Bishkek, 2001. — 204 p.

Б.Калимбетов, М.Маматкулова

-

Макалада аса ерекше жағдайда кез келген дәлдік дәрежедегі сингулярлы-ауытқулы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімдерінің біркелкі жуықтауы құрылған. Бастапқы есептің жалғыз шешімі біртіндеп жуықтау әдісімен құрылды. Сонымен қоса матрицаның жордан торларының меншікті мәндері еселік болуы, нөлдері болмауы және тәуелсіз айнымалылары өзгерген жағдайда реті өзгермеуі мүмкін. Сондай ақ біртіндеп жуықтаудың жинақтылығың дәлелі және бағасы келтірілген.

B.Kalimbetov, M.Mamatkulova

Asymptotic behavior solutions of singularly perturbed differential equations in the case of change of stability

In this paper uniform approximations are constructed for solving singularly perturbed system of differential equations with any degree of accuracy in a special critical case. The uniqueness of solution to the original problem is constructed by successive approximations. In this case eigenvalues of Jordan blocks of matrix may be multiple, have no zeros and practices do not change with changes in independent variable. The evaluation of evidence and convergence of successive approximations.

Р.С.Каренов

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: karenov@mail.ru)

Рассмотрены основные предпосылки применения корреляционно-регрессионного анализа в экономических исследованиях. Проанализированы этапы алгоритма расчетов при корреляционном анализе связи парной корреляции. Предложены методические основы корреляционно-регрессионного анализа изменения урожайности зерновых культур в зависимости от качества пахотной земли. Разработан методический подход корреляционно-регрессионного анализа динамики численности населения районного центра Карагандинской области. Рекомендованы методические принципы анализа экономического показателя работы уранового рудника с применением математического аппарата парной корреляции. Составлены методические положения по изучению деятельности крестьянских хозяйств зерносеющих районов Карагандинского региона с использованием прикладного аппарата корреляционно-регрессионного анализа.

Ключевые слова: связь, корреляция, регрессия, анализ, коэффициент, применение, оценка, аппроксимация, зависимость, уравнение.

Корреляционная и регрессионная связи как частные случаи стохастической формы связи

Связь между двумя переменными x и y может быть функциональной (полной) или корреляционной (неполной). Последнее означает, что каждому конкретному значению x соответствует не одно, а несколько значений y ; с изменением x меняется распределение значений признака y .

В производстве строгие функциональные зависимости между исследуемыми величинами относительно редки. В абсолютном большинстве случаев изменения одних явлений не вызывают строго обусловленных изменений других — налицо стохастическая форма связи. Частными случаями стохастической формы связи являются корреляционная и регрессионная связи [1–5].

Две случайные величины являются корреляционно связанными, если математическое ожидание одной из них меняется в зависимости от изменения другой. Соответственно метод математической статистики, изучающий корреляционные связи между явлениями, называется корреляционным анализом. Связь между случайной и неслучайной величинами называется регрессионной. Исследование вида зависимости между переменными величинами называется регрессионным анализом.

Регрессионный анализ тесно связан с корреляционным. Основными предпосылками их применения являются:

- 1) нормальное распределение случайных величин;
- 2) случайные величины x_1 и x_2 (в многомерном случае — x_1, x_2, \dots, x_m) можно рассматривать как выборку из двумерной (в многомерном случае — многомерной) генеральной совокупности с нормальным законом распределения;
- 3) дисперсия случайной величины x_1 остается постоянной при изменении величины x_2 или пропорциональна известной функции x_2 ;
- 4) математическое ожидание величины x_1 при x_2 , принявшей определенное значение, можно выразить в виде функции $x_1 = f(x_2)$, линейной относительно определяемых параметров.

Функция $f(x, a)$ считается линейно зависимой от a , если соблюдается равенство

$$f(x_1, a_1 + a_2) = \varphi_1(x_1, a_1) + \varphi_2(x_1, a_2).$$

Регрессионный анализ предъявляет менее жесткие требования к исходной информации. Его применение возможно даже при некотором отличии распределения случайных величин от нормального, что важно для анализа процессов горного производства, так как распределение изучаемых величин процессов горного производства, включая экономические, часто бывает асимметрично.

В качестве функции (зависимой переменной) в регрессионном анализе принимают случайную переменную, а аргументом (независимой переменной), как правило, является неслучайная переменная.

Необходимые условия применения корреляционного анализа

Корреляция может быть парной и множественной [6–10]. *Парная корреляция* — это связь между двумя показателями, один из которых является фактором, другой — результативным показателем.

Множественная корреляция — связь между несколькими факторами и одним результативным показателем.

Приемы корреляционного анализа на сегодняшний день нашли наибольшее применение. Необходимыми условиями применения корреляционного анализа в экономических исследованиях являются:

1. Наличие достаточно большого количества наблюдений о величине исследуемых факторных и результативных показателей (в динамике или за текущий год по совокупности однородных объектов).

2. Исследуемые факторы должны иметь количественное измерение и отражение в тех или иных источниках информации.

Применение корреляционного анализа позволяет решить следующие основные задачи [11]:

а) определить изменение результативного показателя под воздействием одного или нескольких факторов (в абсолютном измерении), это значит, определить, на сколько единиц изменяется величина результативного показателя при изменении факторного на единицу;

б) установить относительную степень зависимости результативного показателя от каждого фактора.

Исследование корреляционных соотношений имеет огромное значение в АХД (анализе хозяйственной деятельности) промышленных и сельскохозяйственных предприятий. Это проявляется в том, что значительно углубляется факторный анализ, устанавливаются место и роль каждого фактора в формировании уровня исследуемых показателей, углубляются знания об изучаемых явлениях, определяются закономерности их развития и как итог обосновываются планы и управленческие решения, более объективно оцениваются итоги деятельности предприятий и более полно определяются внутрихозяйственные резервы.

Теснота связи между двумя явлениями измеряется парным коэффициентом корреляции (парным корреляционным отношением при криволинейной парной зависимости). Количественная оценка тесноты связи в зависимости от корреляционного отношения (коэффициента корреляции) приведена в таблице 1.

Т а б л и ц а 1

()*

| Величина корреляционного отношения | 0,1–0,3 | 0,3–0,5 | 0,5–0,7 | 0,7–0,9 | 0,9–0,99 |
|------------------------------------|---------|-----------|----------|---------|----------------|
| Теснота связи | Слабая | Умеренная | Заметная | Высокая | Весьма высокая |

*Примечание. Данные работы [12].

Общая формула корреляционного отношения:

$$R_{yx} = \sqrt{\frac{\sigma_y^2 - \sigma_{yx}^2}{\sigma_y^2}} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{yx}^2}{\sigma_y^2}},$$

где σ_{yx}^2 — среднее квадратическое отклонение y от теоретических значений y_x ; y_x определяется на основе уравнений регрессии; σ_y^2 — среднее квадратическое отклонение эмпирических (фактических) значений y .

В случае прямолинейной зависимости корреляционное отношение называется коэффициентом корреляции и обозначается буквой r .

Корреляционное отношение (коэффициент корреляции) принимает значения от 0 до 1:

– если $R_{yx}(r) = 0$, то связь между показателями отсутствует;

– если $R_{yx}(r) = 1$, то связь функциональная (детерминированная);

- если $R_{yx}(r)$ — отрицательная величина, то связь между показателями обратная;
- если $R_{yx}(r)$ — положительная величина, то связь между показателями прямая.

Этапы алгоритма расчетов при корреляционном анализе связи парной корреляции

Алгоритм расчетов при корреляционном анализе связи парной корреляции состоит из ряда этапов.

Этап 1. Производится отбор наиболее важных существенных факторов, влияющих на результирующий показатель. При отборе факторов учитываются причинно-следственные связи между показателями, причем все факторы должны быть количественно измеримы. Большую помощь при отборе факторов для корреляционной модели оказывают аналитические группировки, способ сравнения параллельных и динамических рядов, линейные графики. Отбор показателей для анализа и придание им статуса фактора или результирующего значения осуществляются на основе знания экономических законов. Например, знание закона спроса и предложения помогает изучить влияние ценового фактора на изменение спроса. Отобранные для анализа показатели и результаты наблюдений за их изменением помещаются в таблицу, в которой факторные признаки располагаются в порядке возрастания или убывания, т.е. ранжируются.

Этап 2. Данные из таблицы наносятся на плоскость координат — строится корреляционное поле. Иначе говоря, выявление корреляционной связи между компонентами графическим методом выполняется путем нанесения единичных значений выборки на миллиметровую бумагу в прямоугольной системе координат (рис. 1).

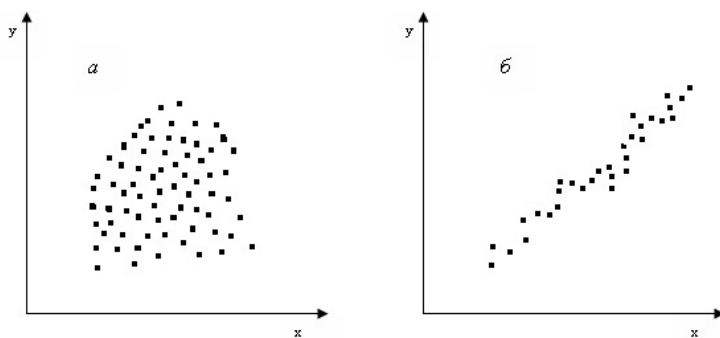


Рисунок 1. Графический способ выявления корреляционной связи между компонентами:
а — отсутствие корреляционной связи; б — наличие корреляционной связи*

*Примечание. Данные работы [13; 64].

Здесь на осях координат — переменные величины, связь между которыми нужно установить. Если поле точек покажет отсутствие корреляционной связи между компонентами (рис. 1, а), то дальнейшее вычисление коэффициентов парной корреляции при анализе двух переменных нецелесообразно. Корреляционная связь или отсутствует, или она завуалирована влиянием прочих величин и необходимо использовать методы множественного корреляционного анализа.

Этап 3. На данном этапе осуществляется выявление характера распределения случайных величин. Если графический метод показал наличие корреляционной взаимосвязи между изучаемыми случайными величинами (рис. 1, б), необходимо установить характер распределения их единичных значений в соответствующих статистических выборках.

Поскольку методы корреляционного и регрессионного анализов приемлемы для статистических выборок только с нормальным распределением случайных величин или выборок, которые можно привести к нормальному виду распределений (например, логнормальные распределения), все дальнейшие рассуждения относятся только к этому виду распределений случайных величин.

Этап 4. На данном этапе производится анализ корреляционных и регрессионных связей между изучаемыми явлениями. При этом решаются две основные задачи: устанавливается степень тесноты связи между переменными признаками путем вычисления коэффициента корреляции или корреляционного отношения и с помощью уравнений регрессии определяется аналитическая форма связи между вариациями признаков.

Уравнения регрессии между вариацией признаков x и y определяют форму связи между ними. Влияние прочих посторонних факторов выражено в уравнениях регрессии в виде средних постоянных величин.

Для установления аналитического выражения варьирования признака y_j в зависимости от x_i применяют метод выравнивания, сущность которого заключается в замене эмпирической линии, построенной в прямоугольной системе координат по данным единичных значений выборки (рис. 2), линией, представляющей аналитическое выражение искомой зависимости.

Для отыскания коэффициентов уравнения регрессии применяют метод наименьших квадратов, согласно которому отыскиваются такие значения коэффициентов уравнения регрессии, при которых сумма квадратов отклонений фактических значений варьирующего признака от вычисленных по уравнению была бы наименьшей из всех возможных. Это значит, находят параметры регрессионного уравнения при условии

$$\frac{\sum (\bar{y}_x - y)^2}{n} = \min.$$

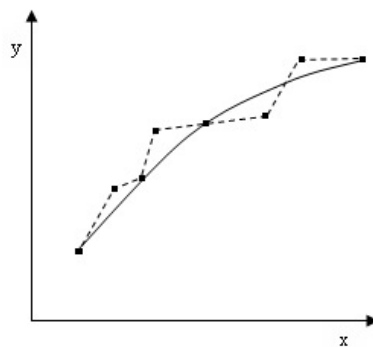


Рисунок 2. Аппроксимация эмпирической линии регрессии расчетной кривой*

*Примечание. Данные работы [13; 65].

Исследуемые регрессионные зависимости могут быть прямолинейными или криволинейными. Криволинейная форма связи может быть представлена уравнением гиперболы, параболы, логарифмической функцией и т.д.

Методы расчета параметров нелинейных корреляционных уравнений аналогичны методам расчета прямолинейных, так как и здесь сохраняется требование наименьших квадратов.

Одним из способов нахождения зависимости является метод замены переменной. Этот метод довольно часто используется при решении различных математических задач. Он заключается в том, что независимый фактор заменяется некоторой функцией этого фактора, которая переводит нелинейную зависимость в разряд линейных.

Корреляционно-регрессионный анализ изменения урожайности зерновых культур в зависимости от качества пахотной земли

Наиболее простым уравнением, которое характеризует прямолинейную зависимость между двумя показателями, является уравнение прямой:

$$Y_x = a + bx,$$

где x — факторный показатель; Y — результативный показатель; a и b — параметры уравнения регрессии, которые требуется отыскать.

Это уравнение описывает такую связь между двумя признаками, при которой с изменением факторного показателя на определенную величину наблюдается равномерное возрастание или убывание значений результативного показателя. В качестве примера для иллюстрации корреляционного анализа прямолинейной зависимости могут быть использованы сведения об изменении урожайности зерновых культур (Y) в зависимости от качества пахотной земли (X) по данным 20 крестьянских хозяйств Карагандинской области (табл. 2).

Значения коэффициентов a и b находят из системы уравнений, полученных по способу наименьших квадратов. В данном случае система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} na + b \sum x = \sum y; \\ a \sum x + b \sum x^2 = \sum xy, \end{cases}$$

где n — количество наблюдений (в нашем исследовании — 20).

Значения $\sum x, \sum y, \sum xy, \sum x^2$ рассчитываются на основе фактических исходных данных (табл. 3).

Т а б л и ц а 2

20

| Номер хозяйства | Качество земли, балл | Урожайность, ц/га | Номер хозяйства | Качество земли, балл | Урожайность, ц/га |
|-----------------|----------------------|-------------------|-----------------|----------------------|-------------------|
| 1 | 32 | 19,5 | 11 | 45 | 24,2 |
| 2 | 33 | 19,0 | 12 | 46 | 25,0 |
| 3 | 35 | 20,5 | 13 | 47 | 27,0 |
| 4 | 37 | 21,0 | 14 | 49 | 26,8 |
| 5 | 38 | 20,8 | 15 | 50 | 27,2 |
| 6 | 39 | 21,4 | 16 | 52 | 28,0 |
| 7 | 40 | 23,0 | 17 | 54 | 30,0 |
| 8 | 41 | 23,3 | 18 | 55 | 30,2 |
| 9 | 42 | 24,0 | 19 | 58 | 32,0 |
| 10 | 44 | 24,5 | 20 | 60 | 33,0 |

Т а б л и ц а 3

| n | x | y | xy | x^2 | y^2 | Y_x |
|-------|-----|-------|-------|-------|----------|-------|
| 1 | 32 | 19,5 | 624 | 1024 | 380,25 | 19,8 |
| 2 | 33 | 19,0 | 627 | 1089 | 361,00 | 20,2 |
| 3 | 35 | 20,5 | 717 | 1225 | 420,25 | 21,0 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 20 | 60 | 33,0 | 1980 | 3600 | 1089,00 | 31,0 |
| Итого | 900 | 500,0 | 22900 | 41500 | 12860,00 | 500,0 |

Подставив полученные значения в систему уравнений, получим

$$\begin{cases} 20a + 900b = 500; \\ 900a + 41500b = 22900. \end{cases}$$

Отсюда: $a = 7,0$; $b = 0,4$.

Таким образом, уравнение связи, которое описывает зависимость урожайности от качества почвы, будет иметь вид:

$$Y_x = 7,0 + 0,4x.$$

Коэффициент a — постоянная величина результативного показателя, которая не связана с изменением данного фактора. Параметр b показывает среднее изменение результативного показателя с повышением или понижением величины фактора на единицу его измерения. Как показало наше исследование, с увеличением качества почвы на один балл урожайность зерновых культур повышается в среднем на 0,4 ц/га.

Подставив в уравнение регрессии соответствующие значения X , можно определить выравненные (теоретические) значения результативного показателя (Y) для каждого хозяйства. Например, чтобы рассчитать урожайность зерновых культур для первого хозяйства, где качество почвы оценивается 32 баллами, необходимо это значение подставить в уравнение связи:

$$Y_x = 7 + 0,4 * 32 = 19,8 \text{ ц/га.}$$

Полученная величина показывает, какой была бы урожайность при качестве почвы 32 балла, если бы данное хозяйство использовало свои производственные возможности в такой степени, как в среднем все крестьянские хозяйства Карагандинской области.

Наши аналогичные расчеты сделаны для каждого крестьянского хозяйства региона. Данные приведены в последней графе таблицы 3. Сравнение фактического уровня урожайности с расчетным позволяет оценить результаты работы отдельных сельскохозяйственных предприятий (крестьянских хозяйств) Карагандинской области.

Для измерения тесноты связи между факторными и результативными показателями определяется коэффициент корреляции.

В случае прямолинейной формы связи между изучаемыми показателями коэффициент корреляции рассчитывается по следующей формуле:

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sqrt{\left(\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\right)\left(\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}\right)}} = \frac{\overline{xy} - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sqrt{\left(\sum x^2 n - (\sum x)^2\right)\left(\sum y^2 n - (\sum y)^2\right)}} \quad (1)$$

Подставляя значения $\sum xy$, $\sum x$, $\sum y$, $\sum x^2$ и $\sum y^2$ в формулу (1), получаем

$$r = \frac{22900 - \frac{900 * 500}{20}}{\sqrt{\left(41500 - \frac{900^2}{20}\right)\left(12860 - \frac{500^2}{20}\right)}} = 0,660.$$

Коэффициент корреляции может принимать значения от 0 до ± 1 . Чем ближе его величина к 1, тем более тесная связь между изучаемыми явлениями, и наоборот. В данном случае величина коэффициента корреляции является существенной ($r = 0,660$). Это позволяет сделать вывод о том, что урожайность почвы — один из основных факторов, от которого в данном районе зависит уровень урожайности зерновых культур.

Если коэффициент корреляции возвести в квадрат, получим коэффициент детерминации ($d = 0,435$). Он показывает, что урожайность зерновых культур на 43,5 % зависит от качества почвы, а на долю других факторов приходится 56,5 % прироста урожайности.

Что касается измерения тесноты связи при криволинейной форме зависимости, то здесь используется не линейный коэффициент корреляции, а корреляционное отношение (индекс корреляции).

Корреляционно-регрессионный анализ динамики численности населения районного центра Карагандинской области

В плано-экономических расчетах широкое использование получила показательная производственная функция

$$y = a_0 a_1^x.$$

Чтобы это уравнение привести к линейной форме, его логарифмируют и получают

$$\lg y = \lg a_0 + x \lg a_1.$$

При расчете параметров с помощью способа наименьших квадратов записывают

$$S = \sum (\lg a_0 + x \lg a_1 - \lg y)^2 \rightarrow \min.$$

Поэтому система нормальных уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} n \lg a_0 + \lg a_1 \sum x &= \sum \lg y; \\ \lg a_0 \sum x + \lg a_1 \sum x^2 &= \sum x \lg y. \end{aligned}$$

Решая приведенную систему с помощью определителей, имеем

$$\begin{aligned} \Delta &= n \sum x^2 - (\sum x)^2; \\ \Delta_{\lg a_0} &= \sum x^2 \sum \lg y - \sum x \sum x \lg y; \\ \Delta_{\lg a_1} &= n \sum x \lg y - \sum x \sum x \lg y. \\ \lg a_0 &= \frac{\sum x^2 \sum \lg y - \sum x \sum x \lg y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}; \end{aligned} \tag{2}$$

$$\lg a_1 = \frac{n \sum x \lg y - \sum x \sum x \lg y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}. \tag{3}$$

После упрощения формул (2) и (3) получают следующие выражения для определения логарифмов параметров:

$$\lg a_1 = \frac{\sigma_{\lg y}}{\sigma_x} r_{x \lg y}; \tag{4}$$

$$\lg a_0 = \overline{\lg y} - x \lg a_1. \tag{5}$$

В ходе проведенного исследования сделана попытка рассчитать параметры показательной функции, которая, на наш взгляд, может наиболее точно описать динамику численности населения одного из районных центров Карагандинской области за последние 10 лет.

Исходные данные для корреляционно-регрессионного анализа, а также произведенные расчеты по определению параметров показательной функции представлены в таблице 4.

Т а б л и ц а 4

(10)

| № п/п | Год | Население, тыс. чел. | Расчетные величины | | | | | |
|------------|-----|-------------------------|--------------------|---------|-----|---------|-----------|-------|
| | | | i | x | y | $\lg y$ | $x \lg y$ | x^2 |
| 1 | 1 | 52 | 1,7160 | 1,7160 | 1 | 2,9447 | 1,7356 | 54,4 |
| 2 | 2 | 56 | 1,7482 | 3,4964 | 4 | 3,0562 | 1,7419 | 55,2 |
| 3 | 3 | 57 | 1,7559 | 5,2676 | 9 | 3,0832 | 1,7482 | 56,0 |
| 4 | 4 | 58 | 1,7634 | 7,0537 | 16 | 3,1096 | 1,7543 | 56,8 |
| 5 | 5 | 58 | 1,7634 | 8,8171 | 25 | 3,1096 | 1,7604 | 57,6 |
| 6 | 6 | 59 | 1,7709 | 10,6251 | 36 | 3,1361 | 1,7672 | 58,5 |
| 7 | 7 | 59 | 1,7709 | 12,3960 | 49 | 3,1361 | 1,7731 | 59,3 |
| 8 | 8 | 60 | 1,7782 | 14,2252 | 64 | 3,1620 | 1,7796 | 60,2 |
| 9 | 9 | 61 | 1,7853 | 16,0680 | 81 | 3,1873 | 1,7853 | 61,0 |
| 10 | 10 | 61 | 1,7853 | 17,8533 | 100 | 3,1873 | 1,7917 | 61,9 |
| Σ | 55 | 581 | 17,6375 | 97,5184 | 385 | 31,1121 | 17,6375 | 580,9 |
| Σ/n | 5,5 | 85,1 | 1,76375 | × | × | × | 1,76375 | 58,09 |

Система нормальных уравнений по данным таблицы 4 имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} 10 \lg a_0 + 55 \lg a_1 &= 17,6375; \\ 55 \lg a_0 + 385 \lg a_1 &= 97,5184. \end{aligned}$$

Решим эту систему уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta &= 10 \cdot 385 - 55 \cdot 55 = 825; \\ \Delta_{\lg a_0} &= 17,6375 \cdot 385 - 97,5184 \cdot 55 = 1426,9255; \\ \Delta_{\lg a_1} &= 10 \cdot 97,5184 - 55 \cdot 17,6375 = 5,1215; \\ \lg a_0 &= 1426,9255 : 825 = 1,729606; \lg a_1 = 5,1215 : 825 = 0,006208; \\ a_0 &= 53,6545; a_1 = 1,014397. \end{aligned}$$

Искомые корни системы можно получить по формулам (4) и (5). Но для этого необходимо вычислить $\sigma_{\lg y}$, σ_x и $r_{x \lg y}$:

$$\sigma_{\lg y} = \frac{\sqrt{10 \cdot 31,1121 - 17,6375^2}}{10} = 0,01990;$$

$$\sigma_x = \frac{\sqrt{10 \cdot 385 - 55^2}}{10} = 2,8723;$$

$$r_{x \lg y} = \frac{10 \cdot 97,5184 - 55 \cdot 17,6375}{\sqrt{(10 \cdot 385 - 55^2)(10 \cdot 31,1121 - 17,6375^2)}} = 0,896030.$$

Поэтому определяемые параметры составляют

$$\lg a_1 = \frac{0,01990}{2,8723} \cdot 0,89603 = 0,006208; \quad a_1 = 1,014397;$$

$$\lg a_0 = 1,76375 - 0,006208 \cdot 55 = 1,729606; \quad a_0 = 53,6545.$$

Таким образом, показательная производственная функция, моделирующая изменение численности населения, имеет вид

$$y = 53,6545 \cdot 1,014397^x.$$

В таблице 4 выполнен расчет количества населения на основе полученной функции. Как видно из таблицы, $\sum \lg \bar{y}_x = \sum \lg y$. Но сумма теоретических уровней населения за 10 лет несколько меньше фактической суммы.

В случае применения показательной функции вида $y = a_1^x$ коэффициент регрессии лучше определять не по способу наименьших квадратов, а из уравнения

$$\lg a_1 \sum x = \sum \lg y.$$

Параллельно с показательной функцией находит применение и экспоненциальная зависимость вида

$$y = a_0 e^{a_1 x}.$$

Прологарифмировав (в натуральных логарифмах) уравнение функции, имеем:

$$\ln y = \ln a_0 + a_1 x.$$

В соответствии с требованием способа наименьших квадратов получаем следующую функцию:

$$S = \sum (\ln a_0 + a_1 x - \ln y)^2 \rightarrow \min.$$

В конечном счете приходим к такой системе нормальных уравнений:

$$n \ln a_0 + a_1 \sum x = \sum \ln y;$$

$$\ln a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 = \sum x \ln y.$$

Корни этой системы определяются формулами, аналогичными формулам (2) и (3):

$$\ln a_0 = \frac{\sum x^2 \sum \ln y - \sum x \sum x \ln y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2};$$

$$a_1 = \frac{n \sum x \ln y - \sum x \sum \ln y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}.$$

Последние формулы можно представить в следующем виде:

$$a_1 = \frac{\sigma \ln y}{\sigma x} r_{x \ln y}; \quad (6)$$

$$\ln a_0 = \ln y - a_1 \bar{x}. \quad (7)$$

Нами вычислены в порядке сопоставления параметры экспоненциальной производственной функции по данным таблицы 4, т.е. использована динамика численности населения обследуемого районного центра Карагандинского региона.

На основе таблицы 5 нами получена следующая система нормальных уравнений:

$$10 \ln a_0 + 55 a_1 = 40,6116;$$

$$55 \ln a_0 + 358 a_1 = 224,5439.$$

Эта система совершенно аналогична предыдущей системе уравнений, с помощью которой находились параметры функции $y = a_0 a_1^x$. Только в настоящей системе уравнений логарифмы свободных членов увеличились в 2,3026, в модуль перевода десятичных логарифмов в натуральные.

Решением приведенной системы являются:

$$\ln a_0 = 3,982565; a_0 = 53,6545; a_1 = 0,014294.$$

Т а б л и ц а 5

$$y = a_0 e^{a_1 x}$$

| Год | Население, чел. | Расчетные величины | | | | | |
|----------------|-----------------|--------------------|-----------|-----------|-------|-----------------|-------------|
| | | $\ln y$ | $x \ln y$ | $\ln^2 y$ | x^2 | $\ln \bar{y}_x$ | \bar{y}_x |
| 1 | 52 | 3,9512 | 3,9512 | 15,6120 | 1 | 3,9964 | 54,4000 |
| 2 | 56 | 4,0254 | 8,0508 | 16,2038 | 4 | 4,0110 | 55,2000 |
| 3 | 57 | 4,0431 | 12,1293 | 16,3467 | 9 | 4,0254 | 56,0000 |
| 4 | 58 | 4,0604 | 16,2416 | 16,4868 | 16 | 4,0395 | 56,8000 |
| 5 | 58 | 4,0604 | 20,3020 | 16,4868 | 25 | 4,0535 | 57,6000 |
| 6 | 59 | 4,0775 | 24,4650 | 16,6260 | 36 | 4,0690 | 58,5000 |
| 7 | 59 | 4,0775 | 28,5425 | 16,6260 | 49 | 4,0826 | 59,3000 |
| 8 | 60 | 4,0943 | 32,7544 | 16,7633 | 64 | 4,0977 | 60,2000 |
| 9 | 61 | 4,1109 | 36,9981 | 16,8995 | 81 | 4,1109 | 61,0000 |
| 10 | 61 | 4,1109 | 41,1090 | 16,8995 | 100 | 4,1255 | 61,9000 |
| $\sum 55$ | 581 | 40,6116 | 224,5439 | 164,9504 | 385 | 40,6116 | 580,9000 |
| $\sum / n 5,5$ | 58,1 | 4,06116 | × | × | × | 4,06116 | 58,0900 |

Это же решение может быть получено по формулам (6) и (7). Следовательно, экспоненциальная производственная функция, описывающая динамику численности населения, имеет следующий вид:

$$y = 53,6545 e^{0,014294x}.$$

Если учесть, что

$$e^{0,014294x} = 1,014397, \text{ то } y = 53,6545 \cdot 1,014397^x,$$

т.е. мы пришли к показательной функции, которая была получена нами раньше.

Корреляционно-регрессионный анализ зависимости суммы прямых затрат на добычу условной единицы металла от продуктивности обрабатываемой жилой площади

В процессе исследования нами сделана попытка выявить зависимость суммы прямых затрат на добычу условной единицы металла (y , долл./усл.ед.) при очистной выемке на урановых месторождениях Республики Казахстан от продуктивности обрабатываемой жилой площади x , выражаемой числом добытых условных единиц металла с 1 м^2 обработанной жилой площади (рис. 3).

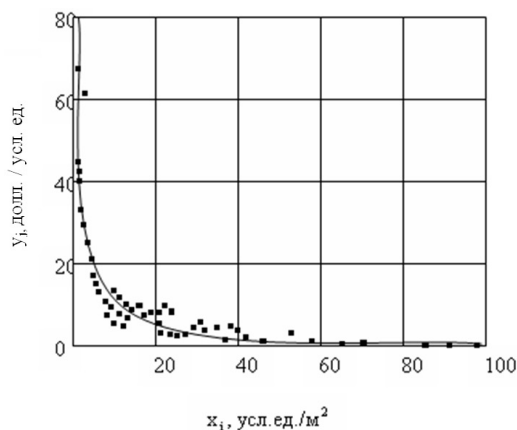


Рисунок 3. Зависимость суммы прямых затрат на добычу металла (в условных единицах) от условной продуктивности обрабатываемой жилой площади

Единичные значения условных затрат на добычу условной единицы металла с 1 м² жилой площади по очистным блокам представлены в таблице 6.

Нанесенные на график в прямоугольной системе координат, они показали наличие корреляционной связи между независимой переменной x и функцией y , форма которой могла быть аппроксимирована уравнением второй степени.

Это предположение было подтверждено при нанесении единичных значений выборки на график в логарифмическом масштабе (рис. 4), где была получена четкая линейная зависимость

$$\lg y = f(\lg x).$$

Для аппроксимации было выбрано уравнение вида (гипербола)

$$y = a + \frac{b}{x_i}.$$

Значение коэффициента a_{yx} определено по формуле:

$$a_{yx} = \frac{\sum y_i \sum \frac{1}{x_i^2} - \sum \frac{y_i}{x_i} \sum \frac{1}{x_i}}{n \sum \frac{1}{x_i^2} - \left(\sum \frac{1}{x_i} \right)^2}.$$

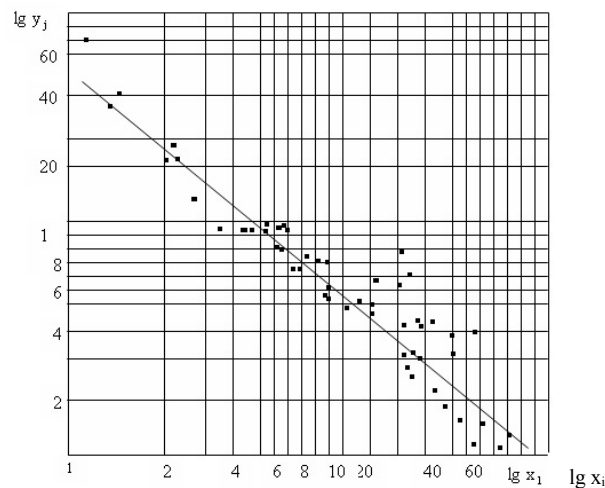


Рисунок 4. Эмпирическая линия регрессии в логарифмическом масштабе $\lg x_i$

Т а б л и ц а 6

1 2

| № п/п | x_i | y_i | y_i^2 | $\frac{1}{x_i^2}$ | y_i | y_i^2 | $\frac{y_i}{x_i}$ |
|-------|-------|-------|-----------|-------------------|---------|-----------|-------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 21,0 | 7,0 | 49,0000 | 0,0023 | 4,2958 | 18,4539 | 0,3333 |
| 2 | 2,6 | 60,55 | 3666,3025 | 0,1479 | 24,3617 | 593,4924 | 23,2885 |
| 3 | 10,1 | 9,25 | 85,5625 | 0,0098 | 7,3558 | 54,1078 | 0,9158 |
| 4 | 53,1 | 4,01 | 16,0801 | 0,0004 | 2,5817 | 6,6652 | 0,0755 |
| 5 | 101,1 | 1,43 | 2,0449 | 0,0001 | 2,0494 | 4,2000 | 0,0141 |
| 6 | 59,0 | 1,79 | 3,2041 | 0,0003 | 2,4696 | 6,0989 | 0,0303 |
| 7 | 1,3 | 32,05 | 1027,2025 | 0,5917 | 47,2630 | 2233,7912 | 24,6538 |
| 8 | 6,5 | 9,25 | 85,5625 | 0,0237 | 10,6209 | 112,8035 | 1,4231 |
| 9 | 2,44 | 22,39 | 501,3121 | 0,1736 | 26,2702 | 690,1234 | 9,3292 |
| 10 | 20,3 | 9,57 | 91,5849 | 0,024 | 4,3936 | 19,3037 | 0,4714 |
| 11 | 10,0 | 8,80 | 77,4400 | 0,0100 | 7,4147 | 54,9778 | 0,8800 |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-----------------|--------|--------|------------|--------|-------------|------------|----------|
| 12 | 41,1 | 2,43 | 5,9049 | 0,0006 | 2,9091 | 8,4629 | 0,0591 |
| 13 | 3,4 | 15,01 | 225,3001 | 0,0865 | 18,9732 | 359,9823 | 4,4147 |
| 14 | 36,3 | 2,08 | 4,3264 | 0,0008 | 3,1007 | 9,6143 | 0,0573 |
| 15 | 32,7 | 4,48 | 20,0704 | 0,0009 | 3,2813 | 10,7669 | 0,1370 |
| 16 | 4,2 | 11,89 | 141,3721 | 0,0567 | 15,637 | 244,5283 | 2,8310 |
| 17 | 16,7 | 5,27 | 27,7729 | 0,0036 | 5,0259 | 25,2597 | 0,3156 |
| 18 | 14,6 | 6,46 | 41,7316 | 0,0047 | 5,5387 | 30,6772 | 0,4425 |
| 19 | 23,2 | 7,51 | 56,4001 | 0,0019 | 4,0269 | 16,2159 | 0,3237 |
| 20 | 1,2 | 69,43 | 4820,5249 | 0,6944 | 51,0799 | 2609,1562 | 57,8583 |
| 21 | 28,0 | 4,61 | 21,2521 | 0,0013 | 3,5870 | 12,8666 | 0,1646 |
| 22 | 9,8 | 6,91 | 47,7481 | 0,0104 | 7,5363 | 56,7958 | 0,7051 |
| 23 | 21,2 | 4,51 | 20,3401 | 0,0022 | 4,2691 | 18,2252 | 0,2127 |
| 24 | 41,0 | 3,34 | 11,1556 | 0,0006 | 2,9127 | 8,4838 | 0,0815 |
| 25 | 45,4 | 1,78 | 3,1684 | 0,0005 | 2,7719 | 7,6834 | 0,0392 |
| 26 | 7,6 | 8,39 | 70,3921 | 0,0173 | 9,2951 | 86,3989 | 1,1039 |
| 27 | 27,5 | 3,48 | 12,1104 | 0,0013 | 3,6256 | 13,1450 | 0,1265 |
| 28 | 8,5 | 9,22 | 85,0084 | 0,0138 | 8,4655 | 71,6647 | 1,0847 |
| 29 | 16,9 | 7,51 | 56,4001 | 0,0035 | 4,9837 | 24,8378 | 0,444 |
| 30 | 5,0 | 7,82 | 61,1524 | 0,0400 | 13,3691 | 78,7328 | 1,5640 |
| 31 | 8,3 | 5,37 | 28,8369 | 0,0156 | 8,6343 | 74,5511 | 0,6470 |
| 32 | 71,2 | 1,36 | 1,8496 | 0,0002 | 2,2907 | 5,2748 | 0,0191 |
| 33 | 29,4 | 4,17 | 17,3849 | 0,0012 | 3,4857 | 12,1501 | 0,1418 |
| 34 | 10,0 | 7,43 | 55,2049 | 0,0100 | 7,4147 | 54,9778 | 0,7430 |
| 35 | 2,1 | 22,63 | 512,1169 | 0,2268 | 29,8144 | 888,8984 | 10,7762 |
| 36 | 2,2 | 29,04 | 843,3216 | 0,2066 | 28,5256 | 813,7099 | 13,2000 |
| 37 | 10,0 | 7,26 | 52,7076 | 0,0100 | 7,4147 | 54,9778 | 0,7260 |
| 38 | 39,2 | 3,97 | 15,7609 | 0,0007 | 2,9794 | 8,8768 | 0,1013 |
| 39 | 10,0 | 6,71 | 45,0241 | 0,0100 | 7,4147 | 54,9778 | 0,6710 |
| 40 | 22,7 | 3,50 | 12,2500 | 0,0019 | 4,0835 | 16,6750 | 0,1542 |
| 41 | 107,9 | 1,20 | 1,4400 | 0,0001 | 2,0122 | 4,0489 | 0,0111 |
| 42 | 20,8 | 3,75 | 14,0625 | 0,0023 | 4,3231 | 18,6892 | 0,1803 |
| 43 | 6,9 | 12,16 | 147,8656 | 0,0210 | 10,0899 | 101,8061 | 1,7623 |
| 44 | 11,4 | 6,12 | 37,4544 | 0,0077 | 6,6835 | 44,6692 | 0,5368 |
| 45 | 66,4 | 1,12 | 1,2544 | 0,0002 | 2,3571 | 5,5559 | 0,0169 |
| 46 | 11,2 | 6,69 | 44,7561 | 0,0080 | 6,7768 | 45,9250 | 0,5973 |
| 47 | 1,4 | 36,34 | 1320,5956 | 0,5102 | 43,9914 | 1935,2433 | 25,9571 |
| 48 | 2,3 | 24,70 | 6010,0900 | 0,1890 | 27,3488 | 747,9569 | 10,7391 |
| 49 | 84,4 | 1,03 | 1,0609 | 0,0001 | 2,1659 | 4,6911 | 0,0122 |
| 50 | 15,9 | 6,06 | 36,7236 | 0,0040 | 5,2053 | 27,0951 | 0,3811 |
| 51 | 7,0 | 11,25 | 126,5625 | 0,0204 | 9,9666 | 99,3331 | 1,6071 |
| 52 | 9,4 | 8,80 | 77,4400 | 0,0113 | 7,7948 | 60,7589 | 0,9362 |
| 53 | 5,5 | 11,11 | 123,4321 | 0,0331 | 12,2865 | 150,9581 | 2,0200 |
| 54 | 1,6 | 38,74 | 1500,7876 | 0,3906 | 38,6750 | 1495,7556 | 24,2125 |
| 55 | 1,5 | 42,84 | 1835,2656 | 0,4444 | 41,1560 | 1693,8163 | 28,5600 |
| 56 | 24,5 | 2,89 | 8,3521 | 0,0017 | 3,8907 | 15,1375 | 0,1180 |
| 57 | 3,7 | 12,66 | 160,2556 | 0,0730 | 17,5532 | 308,1148 | 3,4216 |
| 58 | 107,6 | 1,5625 | 0,0001 | 2,0138 | 4,0554 | 4,0554 | 0,0116 |
| 59 | 8,0 | 8,29 | 68,7241 | 0,0156 | 8,9033 | 79,2688 | 1,0369 |
| 60 | 6,0 | 9,46 | 89,4916 | 0,0278 | 11,3843 | 129,6023 | 1,5867 |
| 61 | 5,5 | 12,77 | 163,0729 | 0,0331 | 12,2865 | 150,9581 | 2,3218 |
| 62 | 6,7 | 13,64 | 186,0496 | 0,0223 | 10,3475 | 107,0708 | 2,0358 |
| 63 | 4,5 | 11,66 | 135,9556 | 0,0494 | 14,6923 | 215,8637 | 2,5911 |
| 64 | 2,7 | 16,96 | 287,6416 | 0,1372 | 34,5135 | 552,8847 | 6,2815 |
| 65 | 98,9 | 1,12 | 1,2544 | 0,0001 | 2,0625 | 4,2539 | 0,0113 |
| 66 | 25,3 | 2,55 | 6,5025 | 0,0016 | 3,8139 | 14,5458 | 0,1008 |
| 67 | 27,3 | 3,51 | 12,3201 | 0,0013 | 3,6415 | 13,2605 | 0,1286 |
| 68 | 5,9 | 9,69 | 93,8961 | 0,0287 | 11,5525 | 133,4603 | 1,6424 |
| $\sum \Sigma^*$ | 1557,0 | 758,02 | 20015,7862 | 4,4205 | 11,147353** | 17737,3638 | 279,3679 |

* $(1/x_i) = 11,0627$.** Среднее значение y .

После подстановки численных значений

$$a_{yx} = \frac{758,02 \cdot 4,4205 - 279,3679 \cdot 11,0627}{68 \cdot 4,4205 - 11,0627^2} = 1,46.$$

Значение коэффициента b_{yx} определено по формуле:

$$b_{yx} = \frac{n \sum \frac{y_i}{x_i} - \sum \frac{1}{x_i} \sum y_i}{n \sum \frac{1}{x_i^2} - \left(\sum \frac{1}{x_i} \right)^2}.$$

После подстановки численных значений

$$b_{yx} = \frac{68 \cdot 279,3679 - 11,0627 \cdot 758,02}{68 \cdot 4,4205 - 11,0627^2} = 59,54.$$

Отсюда

$$y_i = 1,46 + \frac{59,54}{x_i}. \quad (8)$$

Для оценки тесноты корреляционной связи был рассчитан индекс корреляции (парное корреляционное отношение):

$$R_{yx} = \pm \frac{\sqrt{n \sum y_i^2 - \left(\sum y_i \right)^2}}{\sqrt{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2}} =$$

$$= \pm \sqrt{\frac{68 \cdot 17737,36 \cdot 38 - 574594,3204}{68 \cdot 20015,7862 - 574594,3204}} = \pm \sqrt{0,8030} = \pm 0,896,$$

что свидетельствует о высокой тесноте связи. Значит, выбранное нами аппроксимирующее уравнение хорошо соответствует экспериментальным данным выборки.

Уравнение (8) для определенных условий может служить математической моделью прямых затрат на добычу условной единицы продукции очистными работами. При этом оно в скрытой форме учитывает взаимосвязь комплекса определенных технических параметров, находящих отражение в затратах на добычу, с геологическим — продуктивностью обрабатываемой жилой площади.

При невозможности определения характера связи между изучаемыми признаками при качественном анализе их значений в поле корреляции определяют и коэффициент корреляции, и корреляционное отношение. Если они оказываются равными или близкими друг другу, то зависимость линейна, если же корреляционное отношение существенно больше значения коэффициента корреляции, то связь нелинейна. В этих случаях характеристикой тесноты связи служит корреляционное отношение, интерпретация которого не зависит от вида исследуемой корреляционной зависимости.

Корреляционно-регрессионный анализ зависимости урожайности зерновых культур от количества выпавших осадков

Нами по данным 15 крестьянских хозяйств ряда зерносеющих районов Карагандинской области исследована зависимость урожайности зерновых культур Y (ц/га) от количества осадков X (см), выпавших в вегетационный период в период роста, развития растений. Исходные данные для корреляционно-регрессионного анализа приведены в таблице 7.

Т а б л и ц а 7

| № п/п | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|-------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Количество осадков x_i , см | 25 | 27 | 30 | 35 | 36 | 38 | 39 | 41 | 42 | 45 | 46 | 47 | 50 | 52 | 53 |
| Урожайность y_i , ц/га | 23 | 24 | 27 | 27 | 32 | 31 | 33 | 35 | 34 | 32 | 29 | 28 | 25 | 24 | 25 |

Из качественных соображений можно предположить, что увеличение количества выпавших осадков приводит к увеличению урожайности до некоторого предела, после чего урожайность будет снижаться. Кроме того, учитывая расположение точек корреляционного поля (см. рис. 5), можно предположить, что наиболее подходящим уравнением регрессии будет уравнение параболы

$$y_x = b_0 + b_1x + b_2x^2.$$

Его параметры b_0, b_1, b_2 находим, применяя метод наименьших квадратов:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_{x_i} - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1x + b_2x^2 - y_i)^2 \rightarrow \min.$$

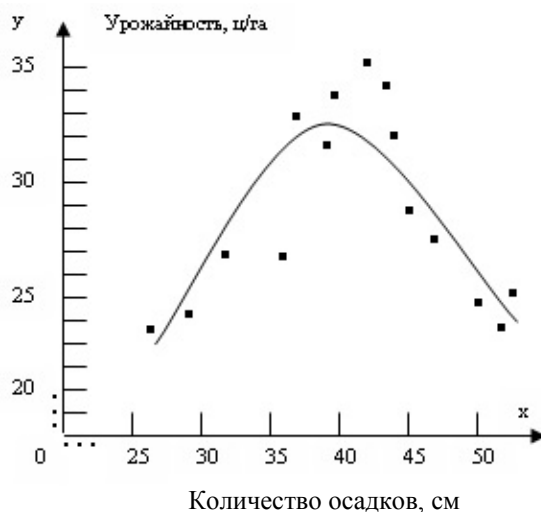


Рисунок 5. Графическая зависимость урожайности от количества выпавших осадков

Система нормальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} b_0n + b_1 \sum_{i=1}^n x_i + b_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i; \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_i + b_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + b_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n y_i x_i; \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + b_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + b_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n y_i x_i^2. \end{cases} \quad (9)$$

Для расчета необходимых сумм составим вспомогательную таблицу (табл. 8).

Теперь система (9) примет вид

$$\begin{cases} 15b_0 + 606b_1 + 25548b_2 = 429; \\ 606b_0 + 25548b_1 + 1115808b_2 = 17371; \\ 25548b_0 + 1115808b_1 + 50158200b_2 = 730123. \end{cases}$$

Решая эту систему, например, методом Гаусса, получим $b_0 = -43,93; b_1 = 3,8342; b_2 = -0,048361$, т.е. уравнение регрессии имеет вид

$$y_x = -43,93 + 3,8342x - 0,048361x^2.$$

| i | x_i | y_i | x_i^2 | x_i^3 | x_i^4 | $y_i x_i$ | $y_i x_i^2$ | y_i^2 | \bar{y}_{x_i} | $(\bar{y}_{x_i} - y_i)^2$ |
|----------|-------|-------|---------|---------|----------|-----------|-------------|---------|-----------------|---------------------------|
| 1 | 25 | 23 | 625 | 15625 | 390625 | 575 | 14375 | 529 | 21,7 | 1,69 |
| 2 | 27 | 24 | 729 | 19683 | 531441 | 648 | 17496 | 576 | 24,3 | 0,11 |
| 3 | 30 | 27 | 900 | 27000 | 810000 | 810 | 24300 | 729 | 27,6 | 0,33 |
| 4 | 35 | 27 | 1225 | 42875 | 1500625 | 945 | 33075 | 729 | 31,0 | 16,20 |
| 5 | 36 | 32 | 1296 | 46656 | 1679616 | 1152 | 41472 | 1024 | 31,4 | 0,33 |
| 6 | 38 | 31 | 1444 | 54872 | 2085136 | 1178 | 44764 | 961 | 31,9 | 0,88 |
| 7 | 39 | 33 | 1521 | 59319 | 2313441 | 1287 | 50193 | 1089 | 32,0 | 0,91 |
| 8 | 41 | 35 | 1681 | 68921 | 2825761 | 1435 | 58835 | 1225 | 32,0 | 9,14 |
| 9 | 42 | 34 | 1764 | 74088 | 3111696 | 1428 | 59976 | 1156 | 31,8 | 4,85 |
| 10 | 45 | 32 | 2025 | 91125 | 4100625 | 1440 | 64800 | 1024 | 30,7 | 1,75 |
| 11 | 46 | 29 | 2116 | 97336 | 4477456 | 1334 | 61364 | 841 | 30,1 | 1,23 |
| 12 | 47 | 28 | 2209 | 103823 | 4879681 | 1316 | 61852 | 784 | 29,4 | 2,10 |
| 13 | 50 | 25 | 2500 | 125000 | 6250000 | 1250 | 62500 | 625 | 26,9 | 3,52 |
| 14 | 52 | 24 | 2704 | 140608 | 7311616 | 1248 | 64896 | 576 | 24,7 | 0,46 |
| 15 | 53 | 25 | 2809 | 148877 | 7890481 | 1325 | 70225 | 625 | 23,4 | 2,44 |
| Σ | 606 | 429 | 25548 | 1115808 | 50158200 | 17371 | 730123 | 12493 | - | 45,94 |

Для оценки тесноты связи вычислим индекс корреляции.

Из таблицы 8 найдем суммы:

$$\delta_{yx}^2 = \sum_{i=1}^n (y_{x_i} - y_i)^2 = 45,94;$$

$$\delta_y^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2}{n} = 12493 - \frac{429^2}{15} = 223,6.$$

Подставляя эти данные, находим

$$R_{yx} = \sqrt{1 - \frac{\delta_{yx}^2}{\delta_y^2}} = \sqrt{1 - \frac{45,94}{223,6}} = \sqrt{0,795} = 0,891,$$

т.е. полученная зависимость весьма тесная. Коэффициент детерминации $R_{yx}^2 = 0,795$ показывает, что вариация урожайности зерновых культур на 79,5 % обусловлена регрессией, или изменчивостью количества выпавших в вегетационный период осадков.

В некоторых случаях нелинейность связей является следствием качественной неоднородности совокупности, к которой применяют регрессионный анализ. Например, объединение в одной совокупности предприятий различной специализации или предприятий, существенно различающихся по природным условиям, и т.д. В этих случаях нелинейность может являться следствием механического объединения разнородных единиц. Регрессионный анализ таких совокупностей не может быть эффективным. Поэтому любая нелинейность связей должна критически анализироваться.

Следует отметить, что по расположению точек корреляционного поля далеко не всегда можно принять окончательное решение о виде уравнения регрессии. Если теоретические соображения или опыт предыдущих исследований не могут подсказать точного решения, то необходимо сделать расчеты по двум или нескольким уравнениям. Предпочтение отдается уравнению, для которого меньше величина остаточной дисперсии. Однако при незначительных расхождениях в остаточных дисперсиях следует всегда останавливаться на более простом уравнении, интерпретация показателей которого не представляется сложной.

Весьма соблазнительным представляется увеличение порядка выравнивающей параболической кривой, ибо известно, что всякую функцию на любом интервале можно как угодно точно приблизить полиномом

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_k x^k.$$

Так можно подобрать такой показатель k , что соответствующий полином пройдет через все вершины эмпирической линии регрессии. Однако повышение порядка гипотетической параболической кривой может привести к неоправданному усложнению вида искомой функции регрессии, когда случайные отклонения осредненных точек неправильно истолковываются как определенные закономерности в поведении кривой регрессии. Кроме того, за счет увеличения числа параметров снижается точность кривой регрессии (особенно в случае малой по объему выборки) и увеличивается объем вычислительных работ. В связи с этим в практике регрессионного анализа для выравнивания крайне редко используются полиномы выше третьей степени.

References

- 1 *Ezekiyel M., Fox K.A.* Methods of the analysis of correlations and regressions linear and curvilinear: The lane with English. — Moscow: Statistics, 1966. — 558 p.
- 2 *Ionesku K., To Iordak V., Moyniyagu K., Postelnika V., Shatteles T.* Statistical methods of research of correlations in economy: The lane with рум. — Moscow: Statistics, 1972. — 160 p.
- 3 *Yeliseyev I.I., Kuryshcheva S.V., Kosteev T.V., Babayeva I.V., Mikhaylov B.A.* Ekonometrika. — Moscow: Finance and statistics, 2001. — 344 p.
- 4 *Politova I.D.* The dispersive and correlation analysis in economy: Manual. — Moscow: Economy, 1972. — 224 p.
- 5 *Siskov V.I.* The correlation analysis in economic researches. — Moscow: Statistics, 1975. — 168 p.
- 6 *Chavkin A.M.* Methods and models of rational management in market economy: development of administrative decisions: Manual. — Moscow: Finance and statistics, 2001. — 320 p.
- 7 *Thomas R.* Quantitative methods of the analysis of economic activity: The lane with English. — Moscow: Business and Service, 1999. — 432 p.
- 8 *Grishin A.F., Kocherova E.V.* Statistical models: construction, mark, analysis: Manual. — Moscow: Finance and statistics, 2005. — 416 p.
- 9 *Shikin E.V., Chkharishvili A.G.* Mathematical methods and models in management: Manual. — Moscow: Business, 2000. — 440 p.
- 10 *Karenov R.S.* Modeling and forecasting of efficiency of mining in market conditions. — Karaganda: IPTs «Profobrazovaniye», 2006. — 280 p.
- 11 *Savitsky G.V.* Analiz of economic activity of the enterprise. — Minsk: SP «Ekoperspektiva», 1997. — P. 115.
- 12 *Lyubushin N.P., Leshcheva V.B., Dyakova V.G.* Analysis of financial and economic activity of the enterprise: Manual. — Moscow: UNITI — it is GIVEN, 1999. — P. 49.
- 13 *Karasev A.I., Kremer N.Sh., Savelyev T.I.* Mathematical methods and models in planning: Manual. — Moscow: Economy, 1987. — 240 p.

Р.С.Каренов

Экономикалық зерттеулерде корреляциялық-регрессиялық талдауды қолданудың негізгі алғышарттары қарастырылған. Жұп корреляция байланыстарын корреляциялық талдаудағы есептеулер алгоритмінің кезеңдері талданған. Астық дақылдары түсімінің жыртпалы жер алқаптарының сапасына байланысты өзгерісін корреляциялық-регрессиялық талдаудың әдістемелік негіздері берілген. Қарағанды облысы аудан орталығының халқы санының динамикасын корреляциялық-математикалық аппаратын қолдану арқылы уран кеніші жұмысының экономикалық көрсеткішін талдаудың әдістемелік принциптері зерттелген. Корреляциялық-регрессиялық талдаудың қолданбалы аппаратын пайдаланып, Қарағанды аймағының астық егуші аудандарының шаруа қожалықтарының қызметін зерттеу бойынша әдістемелік қағидалар ұсынылған.

R.S.Karenov

A technique of application of ways of pair correlation in economic researches

The main preconditions of application of the correlation and regression analysis in economic researches are considered. Stages of algorithm of calculations are analyzed in the correlation analysis of communication of pair correlation. Methodical bases of the correlation and regression analysis of change of productivity of grain crops depending on quality of an arable land are offered. The methodical approach of the correlation and regression analysis of dynamics of population of the regional center Karaganda облатси is developed. Methodical principles of the analysis of an economic indicator of work of uranium mine with use of mathematical apparatus of pair correlation are recommended. Methodical provisions on studying of activity of country farms of zernoseyushchy areas of the Karaganda region with use of the applied device of the correlation and regression analysis are made

Р.С.Каренов

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: karenov@mail.ru)

Отмечено, что широкое применение ЭВМ и создаваемых на их основе систем управления выдвинули ряд задач, для решения которых оказалось недостаточным использование традиционных методов и средств моделирования. Раскрыты идея и преимущества метода имитационного моделирования, позволяющего при необходимости исследовать системы любой сложности и назначения с любой степенью детализации. Рассмотрена сущность метода имитационного моделирования, состоящего в построении имитационной модели исследуемого объекта. Выделены роль и значение метода Монте-Карло как наиболее известного способа, используемого в имитационном моделировании. Предложены методические основы исследования работы добычного комбайна в очистном забое шахты методом имитационного моделирования. Рекомендованы методические принципы имитационного моделирования грузопотока из очистного забоя угольного предприятия.

Ключевые слова: модель, имитационное моделирование, метод Монте-Карло, лава, комбайн, производственный цикл, вероятность.

Идея метода имитационного моделирования

Производственные процессы на промышленных предприятиях чрезвычайно сложны и многообразны. Это приводит к тому, что в рамках известных теорий линейного и нелинейного программирования, статистического моделирования, сетевого планирования их описать с достаточной степенью достоверности не всегда представляется возможным. В таких ситуациях, когда известные математические модели и методы оказываются слишком упрощенными и не могут адекватно отразить экономическую и производственную реальность, на помощь приходит метод имитационного моделирования [1–3].

Идея метода имитационного моделирования состоит в том, что вместо аналитического описания взаимосвязей между входами, состояниями и выходами строят алгоритм, отображающий последовательность развития процессов внутри исследуемого объекта, а затем «проигрывают» поведение объекта на ЭВМ. Следует отметить, что, поскольку для имитационного моделирования зачастую требуются мощные ЭВМ, большие выборки статистических данных, издержки, связанные с имитацией, почти всегда высоки по сравнению с расходами, необходимыми для решения задачи на небольшой аналитической модели. Поэтому во всех случаях следует сопоставлять затраты средств и времени, потребные для имитации, с ценностью информации, которую ожидают получить.

Имитационная модель — вычислительная процедура, формализованно описывающая изучаемый объект и имитирующая его поведение. При ее составлении нет необходимости упрощать описание явления, отбрасывая порой даже существенные детали, чтобы втиснуть его в рамки модели, удобной для применения тех или иных известных математических методов анализа. Для имитационного моделирования характерна имитация элементарных явлений, составляющих исследуемый процесс, с сохранением их логической структуры, последовательности протекания во времени, характера и состава информации о состояниях процесса. Модель по своей форме является логико-математической (алгоритмической).

Имитационные модели как подкласс математических моделей можно классифицировать на статические и динамические; детерминированные и стохастические; дискретные и непрерывные [4].

Важно отметить то, что в последние годы широкое использование информационных технологий позволяет эффективно использовать методы математического моделирования в разнообразных задачах управления. В области же имитационного моделирования использование компьютеров становится особенно важным, так как значимую и обоснованную информацию из имитационной модели можно получить только после проведения расчетов для различных случайных чисел. По сути использование компьютеров представляет собой концептуальную основу имитационного моделирования, именно поэтому зачастую эти методы именуют «машинным имитированием».

*Преимущества метода имитационного моделирования
и основные этапы процесса имитации*

Методы имитационного моделирования применяются для [5]:

- а) выбора из множества возможных вариантов построения производственной и организационных структур системы наилучшего в смысле достижения поставленных перед ней целей на основе вариантов расчетов;
- б) максимально близкого воспроизведения поведения систем и их звеньев на основе фактических данных;
- в) обоснования и выбора на основе воспроизведения существенных черт системы и целей ее развития стратегии ее деятельности;
- г) снижения степени неопределенности в моменты принятия решений.

Они получают наибольшее распространение в современных условиях динамично изменяющейся внешней и внутренней среды менеджмента.

К преимуществам метода имитационного моделирования можно отнести [6]:

- возможность выяснения многочисленных вопросов, связанных с функционированием производственной системы, не прибегая к натурному эксперименту, что избавляет от затрат на дорогостоящие эксперименты;
- возможность использования полученных в ходе имитационных экспериментов данных для статистического прогноза;
- сокращение длительности исследования моделируемого объекта;
- исследование различных вариантов ситуаций, которые могут встретиться на практике, действие системы при изменении входных характеристик или окружающих условий, а также характеристик самой системы за счет использования метода Монте-Карло.

Имитационное моделирование включает следующие этапы реализации (рис. 1): формулировка цели, разработка концепции построения модели, построение модели в виде схемы или алгоритма расчетов, составление методики обработки результатов имитационных экспериментов, разработка программного обеспечения проведения имитационных экспериментов на ЭВМ, проведение расчетов, анализ и обобщение результатов моделирования.

Опыт применения методов имитационного моделирования в менеджменте показал следующее: эффект от их применения существенно возрастает при их использовании в рамках специально организованной имитационной системы поддержки решений и моделирования, обеспечивающей взаимосвязку всего процесса принятия решений — от прогноза и обоснования целей до их достижения.

Под имитационной системой поддержки решений и моделирования следует понимать информационную систему, включающую совокупность логико-лингвистических и математических моделей и методов, необходимые технические средства, программное, информационное и организационное обеспечение (рис. 2).

Используя имитационное моделирование, можно строить модели анализируемых объектов любой сложности, большой размерности.

*Метод Монте-Карло как наиболее известный способ,
используемый в имитационном моделировании*

Среди различных методов, используемых в имитационном моделировании, достаточно широко известен метод Монте-Карло [7].

Этот метод назван по названию города, известного своими игорными домами. Он представляет собой метод имитации для приближенного воспроизводства реальных явлений, объединяет анализ чувствительности и анализ распределений вероятностей входящих переменных и позволяет построить модель при минимуме данных, а также максимизировать значение данных, используемых в модели. Данный метод может быть применен для решения почти всех задач при условии, что альтернативы могут быть выражены количественно. Построение модели начинается с определения функциональных зависимостей в реальной системе. После этого метод Монте-Карло позволяет получить количественное решение, используя теорию вероятности и таблицы случайных чисел [8].

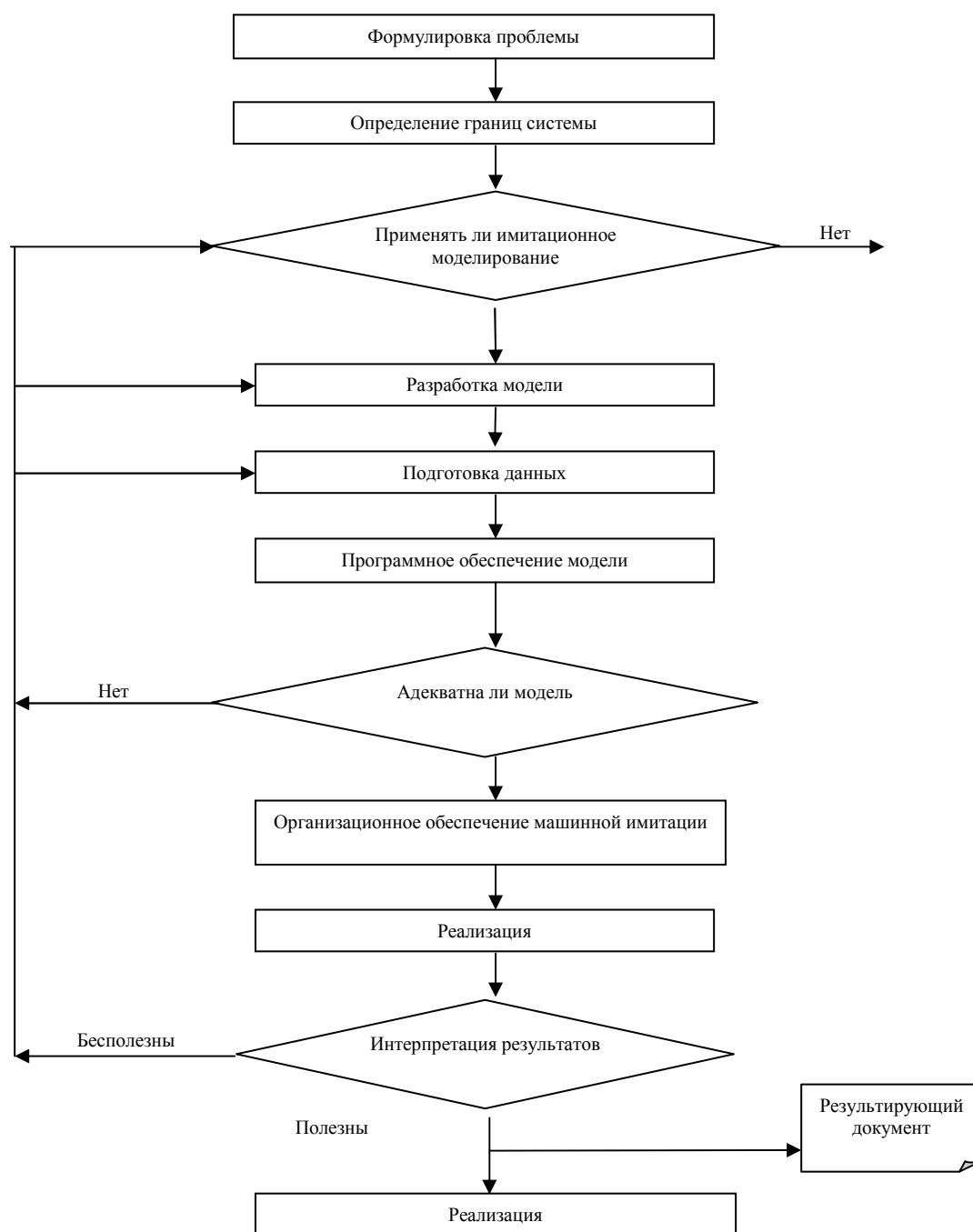


Рисунок 1. Основные этапы процесса имитации*

*Примечание. Данные работы [5; 174].

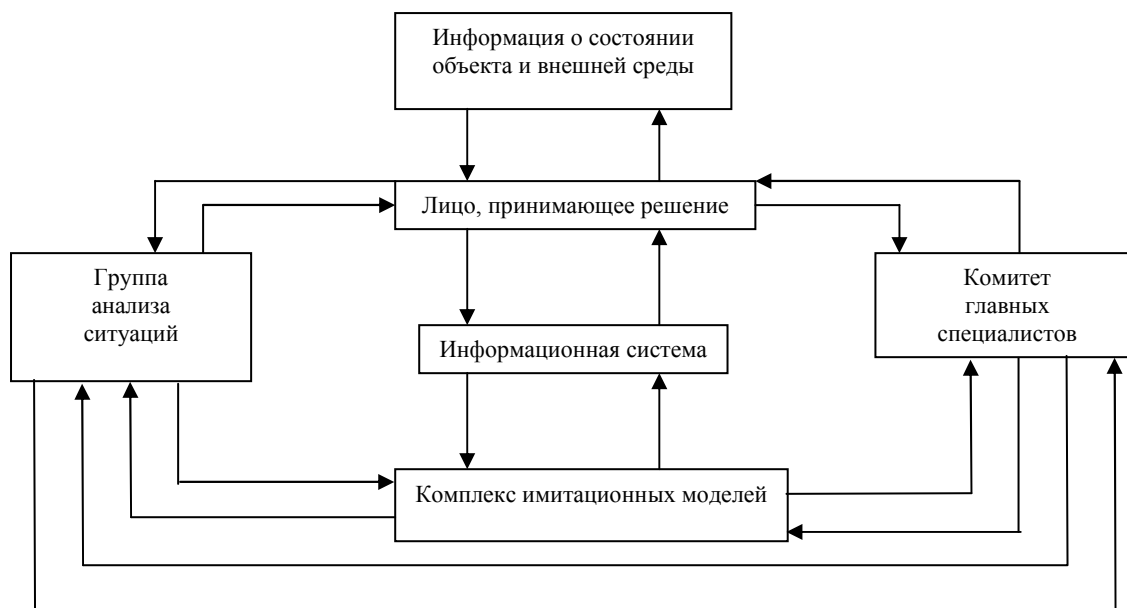


Рисунок 2. Схема имитационной системы поддержки решений и моделирования*

*Примечание. Данные работы [5; 175]).

Метод Монте-Карло характеризуется следующими особенностями [9]:

1) для реализации метода используется достаточно простой структуры вычислительный алгоритм. Фактически разрабатывается процедура для проведения одного случайного испытания, а затем по отработанной программе производится повторение испытаний, при этом каждое из них не зависит от остальных. После проведения всех испытаний полученные результаты осредняются;

2) ошибка вычислений, как правило, пропорциональна величине $\sqrt{D/N}$ (где D — некоторая постоянная, а N — число испытаний). Очень высокой точности результатов данный метод не дает, поскольку, как следует из приведенной выше формулы, для увеличения точности расчетов (получения дополнительно еще одного десятичного знака в результате) число испытаний надо увеличить в 10^2 , т.е. в 100 раз. Но для решения тех задач, где допустима погрешность 5–10 %, этот метод весьма эффективен;

3) метод позволяет моделировать только такой процесс, на протекание которого влияют случайные факторы. Поэтому для тех задач, которые не связаны с какими-либо случайностями, необходимо придумать искусственно вероятностную модель, с помощью которой эта задача может решаться.

Методом Монте-Карло могут решаться как относительно простые, так и более сложные задачи, при этом последние представляются как композиция более простых распределений. В этом плане показательно решение задач массового обслуживания.

Ниже мы рассмотрим методические основы решения таких задач методом имитационного моделирования применительно к условиям горной промышленности.

Исследование работы добычного комбайна в очистном забое шахты методом имитационного моделирования

В настоящее время все основные технологические процессы на угольных предприятиях Казахстана (подготовка полезного ископаемого к выемке, погрузка, транспортировка и др.) механизированы.

На современных механизированных горных предприятиях выемка угля осуществляется узкозахватными комбайнами, которые одновременно производят работы по отделению угля от массива, дроблению его и погрузке на доставочный конвейер. Узкозахватный комбайн продвигается вдоль забоя по раме забойного конвейера и снимает полосу угля шириной до 1 м. Подача комбайна вдоль забоя осуществляется с помощью калиброванной цепи, растянутой вдоль забоя и закрепленной по его

концам, и звездочки на приводном валу подающей части комбайна. Выемка угля может производиться по односторонней или челноковой схеме.

Узкозахватный комбайн может входить в состав комплекса, в комплект которого входят изгибающийся забойный конвейер и комплект гидравлической крепи. При включении в комплекс механизированной (самопередвижной) крепи достигается комплексная механизация основных работ в очистных забоях. Особенность работы угледобывающих комплексов — совмещение во времени основных процессов добычи угля в очистном забое: выемки угля, его транспортирования, крепления и управления кровлей.

При исследовании работы выемочного комплекса методом имитационного моделирования могут быть определены следующие показатели:

- среднечасовая, среднесменная и среднесуточная добыча;
- среднесуточное подвигание очистного забоя;
- себестоимость 1 т угля по очистному забою;
- законы распределения часовой, сменной и суточной добычи угля;
- дисперсия часовой, сменной и суточной добычи угля;
- коэффициент простоя выемочного комплекса;
- зависимость производительности от технологических параметров (например, от длины очистного забоя);
- определение оптимальных технологических графиков производственных процессов.

К исходным данным следует отнести:

- параметры, характеризующие надежность технологической схемы добычи (характеристики отказов оборудования);
- порядок чередования операций в очистном забое;
- величины, характеризующие технологический режим (скорость рабочего и холостого хода комбайна, закон распределения длительности операций по монтажу, демонтажу комбайна и подготовке его к выемке очередной полосы угля, периодичность и закон распределения длительности профилактического ремонта и др.);
- технологические параметры очистного забоя (мощность пласта, длина лавы, ширина захвата комбайна и др.);
- экономические параметры (численность рабочих, тарифные ставки, стоимость материалов и др.).

Работа добычного комбайна в очистном забое (лаве) в основном определяет ритм и производительность процесса добычи полезного ископаемого.

Нагрузка на лаву (производительность) определяется по формуле:

$$Q = \int_{l_n}^{l_m} c(t) dl(t), \quad (1)$$

где $c(t)$ — величина, равная произведению мощности пласта H на захват комбайна r и среднюю плотность угля γ ; $l(t)$ — путь, проходимый комбайном, как функция времени; l_n и l_m — начальная и конечная координаты пути.

Для того чтобы задать график движения комбайна $l(t)$, необходимо знать закон изменения скорости подачи $v(t) = \frac{dl(t)}{dt}$.

Если учитывать только регламентированные перерывы, а движение комбайна считать происходящим с постоянной скоростью, то графиком функции $l(t)$ окажется ступенчатая ломаная линия, горизонтальные участки которой соответствуют перерывам в работе комбайна, а наклонные — интервалам его движения (рис. 3, а).

Регламентированные перерывы обусловлены технологией и организацией работ в очистном забое. Момент их возникновения зависит от текущего времени смены (например, осмотр рабочего места в начале смены, отдых в середине смены и др.), а также от положения комбайна в лаве (например, конечные операции с комбайном). Продолжительность регламентированных перерывов устанавливается нормативами, а их моменты возникновения можно определить заранее.

При более глубоком исследовании вопросов организации работ в лавах, динамики грузопотоков полезного ископаемого с учетом надежности забойного оборудования и других факторов такой идеализированный график недостаточно точно описывает процесс движения комбайна.

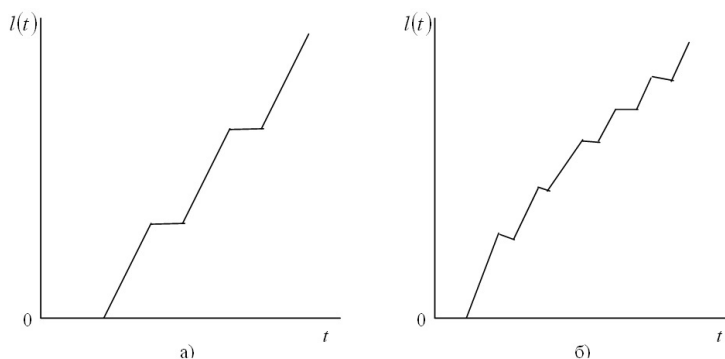


Рисунок 3. Графики движения комбайна в очистном забое шахты

В этих случаях необходимо учитывать случайные перерывы и неравномерность скорости подачи комбайна. При этом график $l(t)$ примет вид, изображенный на рисунке 3, б. На горных предприятиях существует множество различных причин возникновения перерывов, которые, в зависимости от конкретных горнотехнических условий, могут взаимодействовать между собой в различных комбинациях.

Перерывы в работе очистного забоя угольной шахты можно классифицировать в соответствии со схемой, изображенной на рисунке 4.

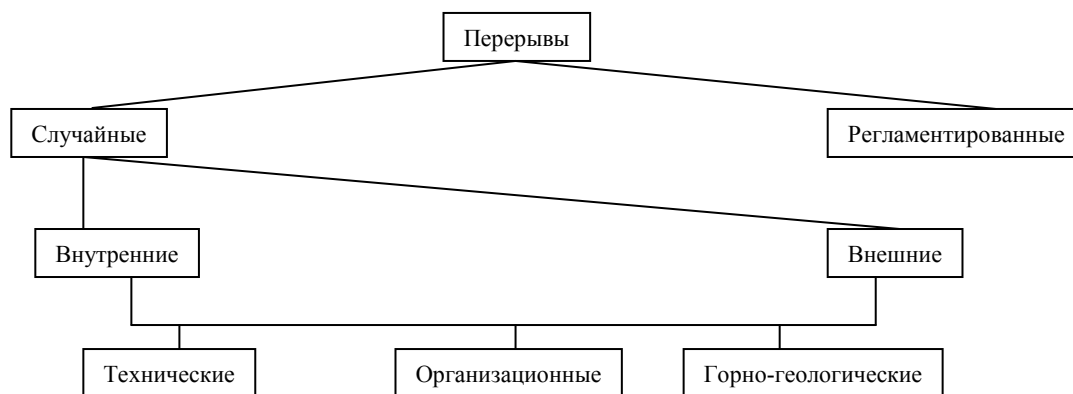


Рисунок 4. Классификация перерывов в работе очистного забоя шахты

Моменты возникновения и продолжительность случайных перерывов случайны, поэтому для их математического описания нужно знать законы распределения длительности перерывов, а также числа их появлений на отрезке пути движения комбайна.

Причины возникновения перерывов могут быть связаны либо непосредственно с ведением производственного процесса в очистном забое (внутренние причины), либо с работой последующих технологических звеньев, обслуживающих очистной забой (внешние причины). В целом работа горных машин и механизмов на шахтах подвержена влиянию случайных факторов трех групп [10]:

- к первой группе относятся природные факторы (изменения горно-геологических условий, физико-механические свойства пород, климатические условия);
- ко второй — технические (аварии и поломки оборудования, частота и продолжительность которых определяются надежностью машин);
- к третьей — организационные (социально-психологические) факторы.

Все элементарные периоды работы и остановок комбайна можно сгруппировать в некоторые множества.

Длительность T_u производственного цикла в очистном забое складывается из множества $T_{раб}$ периодов работы комбайна и множества $T_{пер}$ перерывов:

$$T_u = T_{раб} + T_{пер};$$

причем

$$T_{пер} = T_{пер.регл} \cup T_{пер.внеш} \cup T_{пер.внутр},$$

где $T_{пер.регл}$ — регламентированные перерывы, $T_{пер.внеш}$; $T_{пер.внутр}$ — случайные перерывы соответственно по внешним и внутренним причинам; \cup — знак объединения множеств.

Множества $T_{раб}$ и $T_{пер}$ являются непересекающимися, поэтому $T_{раб} \cap T_{пер} = 0$, где \cap — знак пересечения множеств.

В противоположность этому множества $T_{пер.регл}$, $T_{пер.внеш}$, $T_{пер.внутр}$ являются пересекающимися, т.е. $T_{пер.регл} \cap T_{пер.внеш} \cap T_{пер.внутр} \neq 0$.

При этом возможно полное или частичное наложение одних перерывов на другие. Например, перерывы по внешним причинам могут пересекаться со всеми другими перерывами. Пусть $t_{раб}$, $t_{пер.регл}$ и $t_{пер}$ — соответственно длительность отдельного периода работы, регламентированного и случайного перерывов.

Из указанных выше величин детерминированными можно считать только $t_{пер.регл}$. В связи с тем, что число перерывов, выпадающих на один цикл, случайно, суммы $T_{раб} = \sum t_{раб}$ и $T_{пер} = \sum t_{пер}$ состоят из случайного числа случайных слагаемых.

Существуют два метода моделирования возникновения перерывов в очистном забое:

а) возникновение перерывов привязывается к текущему времени смены и распределение их частот дается из расчета на смену;

б) возникновение перерывов привязывается к пути, проходимому комбайном вдоль лавы за один цикл.

В ряде случаев для упрощения процедуры моделирования более удобным является второй метод. В связи с тем, что длина лав в очистных забоях может быть различной, частоту возникновения перерывов удобно характеризовать средним числом перерывов, приходящимся на 1 м пути движения комбайна.

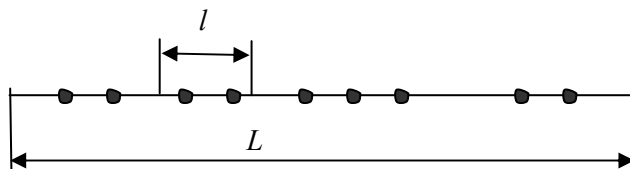


Рисунок 5. Схема, применяемая для математического описания потока перерывов

Для математического описания потока перерывов обратимся к следующей схеме. Будем отмечать возникновения перерывов точками на отрезке L (где L — длина лавы), расположенными в тех местах, где произошла остановка комбайна (рис. 5). При этом точки на отрезке L располагаются случайным образом.

Примем следующие допущения:

- 1) в очистном забое отсутствуют нарушения, сосредоточенные в одном и том же месте;
- 2) число перерывов на отрезке l (рис. 5) зависит от длины отрезка и не зависит от его положения, которое он занимает на линии L . Таким образом, на различных участках пути движения комбайна средняя плотность числа перерывов на единицу длины одна и та же;
- 3) возникновение каждого перерыва не зависит от предыдущих;
- 4) вероятность появления двух (и более) перерывов по одной и той же причине на элементарном отрезке пути является величиной высшего порядка малости по сравнению с вероятностью появления одного перерыва на этом отрезке;

5) длительность перерыва не зависит от положения точки на отрезке L . Таким образом, вероятность возникновения перерывов любой длительности не связана с тем, где в данный момент находится комбайн;

6) длительность перерыва не зависит от длительности предыдущих перерывов.

Указанные выше допущения подтверждаются статистическими исследованиями работы очистных забоев на ряде шахт России [11, 12].

Разделим произвольный участок l на пути комбайна на n равных отрезков. Длину каждого элементарного отрезка примем равной 1 м. Обозначим через p вероятность появления перерыва на отдельном отрезке. Вероятность противоположного события, заключающегося в том, что на нем не произойдет перерывов, равна $1 - p$. Из приведенных условий можно заключить, что попадание или непопадание точек на элементарные отрезки можно рассматривать как результаты n независимых опытов.

В тех случаях, когда вероятность появления события в каждом испытании p достаточно мала, а n велико, вероятность того, что в результате n независимых испытаний это событие произойдет k раз, выражается формулой Пуассона:

$$p(k, \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad (2)$$

где $p(k, \lambda)$ — вероятность появления k перерывов на отрезке длиной l ; $\lambda = np$ — интенсивность потока перерывов.

Как указывалось выше, в одной и той же лаве для любых отрезков l среднюю плотность количества перерывов на единицу длины можно считать постоянной, поэтому величина p на всех участках также является постоянной.

Для лав с одинаковой вероятностью появления перерывов, но имеющих разные длины L_1, L_2, \dots , число возникновений перерывов подчиняется соответственно законам распределения $p_1(k, \lambda_1)$, $p_2(k, \lambda_2)$, ..., где $\lambda_1 = L_1 p$; $\lambda_2 = L_2 p$, ... Параметр λ_i представляет собой среднее число перерывов, приходящихся на один цикл.

Анализ статистических данных на горных предприятиях подтвердил устойчивость характера распределения (2). Однако значения параметра λ для различных лав отличаются друг от друга.

Было также установлено, что:

1) длительность перерывов по внутренним и внешним техническим причинам подчиняется гамма-распределению с функцией плотности

$$f(t) = \frac{\lambda^\eta}{\Gamma(\eta)} t^{\eta-1} e^{-\lambda t} \quad (t > 0),$$

где $\Gamma(\eta)$ — гамма-функция;

2) длительность перерывов по внешним организационным причинам подчиняется гамма-распределению, а по внутренним причинам — показательному распределению с функцией плотности:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t > 0);$$

3) длительность перерывов из-за горно-геологических нарушений подчинена показательному распределению;

4) скорость движения комбайна распределена по нормальному закону:

$$f(\vartheta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(\vartheta-\mu)/(2\sigma^2)},$$

где μ в зависимости от условий изменяется в пределах от 0,78 до 2,14, а σ — в пределах от 0,150 до 0,496;

5) вероятность возникновения перерывов всех видов распределена по закону Пуассона:

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Анализ физических предпосылок также подтверждает справедливость указанных выше законов распределения. Из теории надежности известно, что закону Пуассона подчиняется поток событий,

происходящих независимо друг от друга с постоянной интенсивностью. Такой модели соответствует возникновение перерывов в работе очистных забоев, происходящих из-за многих не зависящих друг от друга причин.

Показательное и гамма-распределение широко используются в теории массового обслуживания, теории надежности, причем показательное распределение используется для описания длительности восстановления простых отказов, а гамма-распределение — более сложных. Перерывы из-за технических неисправностей, вызванные поломками комбайна, конвейера, крепи и другого забойного оборудования, можно считать сложными событиями. К таким событиям можно также отнести перерывы по внешним организационным причинам (из-за отсутствия порожних составов, доставки оборудования и др.). Нормальное распределение скорости движения комбайна обусловлено действием большого числа факторов (крепости угля, нагрева электродвигателя, организационных причин и др.).

Рассмотренные выше распределения следует использовать при решении задач, связанных с устранением причин перерывов или снижением их интенсивности и длительности.

Для решения задач при неизменной технологии и организации работ в очистном забое нет необходимости в подразделении перерывов по причинам. В этом случае достаточно располагать тремя распределениями: длительности перерывов, числа их возникновения на отрезке пути движения комбайна и скорости его движения. Тогда вместо распределения числа возникновений перерывов можно воспользоваться распределением длительности работы комбайна, которое подчиняется показательному закону.

Имитационное моделирование работы очистного забоя угольной шахты

Рассмотрим работу очистного забоя на угольном предприятии, оборудованного механизированным комплексом. Лава имеет следующие параметры и режим работы: длина лавы L , м; мощность пласта H , м; объемный вес угля λ , т/м³; нормативное время работы в течение суток T , мин; лава может работать в несколько добычных смен.

Функционирование лавы представляет собой чередование интервалов времени работы комбайна (уголь из лавы поступает) и простоя (уголь из лавы не поступает).

В течение времени, когда комбайн ведет выемку угля, могут быть пройдены различные участки длины лавы; длина участка определяется средней скоростью подачи комбайна на данном участке и временем его безотказной работы. Средняя скорость подачи комбайна на участке лавы является случайной величиной, зависящей от крепости угля и других причин. Общее время работы лавы в течение суток T можно определить следующим образом:

$$T = \sum_{i=1}^n t_i + \sum_{i=1}^k \tau_i + \sum_{i=1}^m \theta_i, \quad (3)$$

где t_i — длительность i -го интервала времени, в течение которого комбайн ведет выемку угля; τ_i — длительность i -го простоя лавы; θ_i — длительность i -го ремонта комбайна.

Общая длина вынудной полосы угля в течение суток составляет

$$l = \sum_{i=1}^n v_i t_i, \quad (4)$$

где v_i — средняя скорость комбайна на i -м рабочем интервале времени.

Общую добычу угля из лавы в течение суток можно выразить формулой:

$$Q = rH\gamma c \sum_{i=1}^n l_i, \quad (5)$$

где r — ширина захвата комбайна; c — коэффициент извлечения угля ($c < 1$).

Таким образом, суточная добыча лавы Q является функцией случайных величин t , τ , θ , v , т.е. $Q = f(t, \tau, \theta, v)$. Пусть законы распределения указанных выше случайных величин известны. Задача состоит в определении закона распределения случайной величины Q , средней суточной добычи Q_{cp} , оценки дисперсии суточной добычи S_Q^2 и других показателей, что позволит обоснованно установить план добычи.

Перейдем к построению блок-схемы моделирующего алгоритма, для чего введем следующие операторы:

- Φ_1 — формирование реализаций длительности t_i работы комбайна в соответствии с законом распределения $f(t)$;
- A_2 — вычисление времени $t_i^n = t_i^{hp} + t_i$ начала i -го интервала простоя комбайна (здесь t_i^{hp} — время начала i -го интервала работы комбайна);
- P_3 — проверка условия $t_i^n < T$;
- Φ_4 — формирование реализаций средней скорости v_i подачи комбайна в соответствии с законом распределения $\varphi(v)$;
- A_5 — вычисление длины $l_i = v_i t_i$ вынуженного участка лавы за время t_i ;
- A_6 — вычисление суммарной длины $\sum_i l_i$ вынуженного участка лавы;
- P_7 — проверка условия $\sum_i l_i < L$;
- Φ_8 — формирование реализаций τ_i случайной величины длительности простоя в соответствии с законом распределения $\varphi(\tau)$;
- A_9 — вычисление времени $t_{i+1}^{hp} = t_i^n + \tau_i$ начала $(i+1)$ -го интервала работы комбайна;
- P_{10} — проверка условия $t_{i+1}^{hp} < T$;
- Φ_{11} — формирование реализаций длительности θ_i подготовки комбайна к выемке следующего цикла (перемонтажа комбайна) в соответствии с законом распределения $\omega(\theta)$;
- A_{12} — вычисление времени начала работы комбайна после его перемонтажа, т.е. величины
$$\overline{t_i^{hp}} = \sum_i t_i + \sum_i \tau_i + \sum_i \theta_i;$$
- P_{13} — проверка условия $\overline{t_i^{hp}} < T$;
- A_{14} — запоминание полученных за один цикл значений $\sum_i l_i = l_u$ и вычисление $l_u - L$;
- K_{15} — счетчик количества реализаций;
- P_{16} — проверка условия $N < N^*$, где N^* — количество реализаций, необходимое для получения требуемой точности оценок искоемых величин;
- A_{17} — вычисление значения $l_T = \sum_{i=1}^n l_i$ за сутки;
- A_{18} — обработка результатов моделирования;
- \mathcal{Y}_{19} — окончание вычислений и выдача результатов моделирования.

Блок-схема моделирующего алгоритма изображена на рисунке 6. Рассматриваемый алгоритм работает следующим образом.

В начальный момент $t_i = 0$, $l_i = 0$, $\tau_i = 0$, $\theta_i = 0$, $N = 0$, оператор Φ_1 формирует очередное значение t_i путем розыгрыша случайной величины, распределенной по закону $f(t)$. Оператор A_2 вычисляет время начала простоя комбайна t_i^n . Оператор P_3 сравнивает t_i^n с T . Если условие, проверяемое оператором P_3 , не выполняется, то управление от этого оператора по стрелке (0) передается оператору K_{15} , который фиксирует число реализаций производственного процесса. Как только оператор K_{15} получит управление, он увеличивает на единицу количество реализаций, т.е. вычисляет

$$N_{i+1} = N_i + 1.$$

От оператора K_{15} управление поступает к оператору P_{16} , который проверяет условие $N < N^*$. Если это условие оказывается выполненным, т.е. количество реализаций еще недостаточно для обеспечения заданной точности, то управление от оператора P_{16} по стрелке (1) передается оператору A_{17} ,

который подсчитывает значение $\sum_{i=1}^n l_i = l_T$, достигнутое за время T ; тем самым фиксируется численное

значение длины вынужтой полосы угля в лаве за одни сутки. От оператора A_{17} управление передается оператору Φ_1 и начинается моделирование работы очистного забоя в следующие сутки. Если условие, проверяемое оператором P_{16} , не выполнено, т.е. $N = N^*$, то необходимое количество реализации выполнено и можно приступить к обработке результатов моделирования. В этом случае управление от оператора P_{16} по стрелке (0) передается к оператору A_{18} для обработки результатов моделирования, а от последнего — к оператору Y_{19} для выдачи результатов.

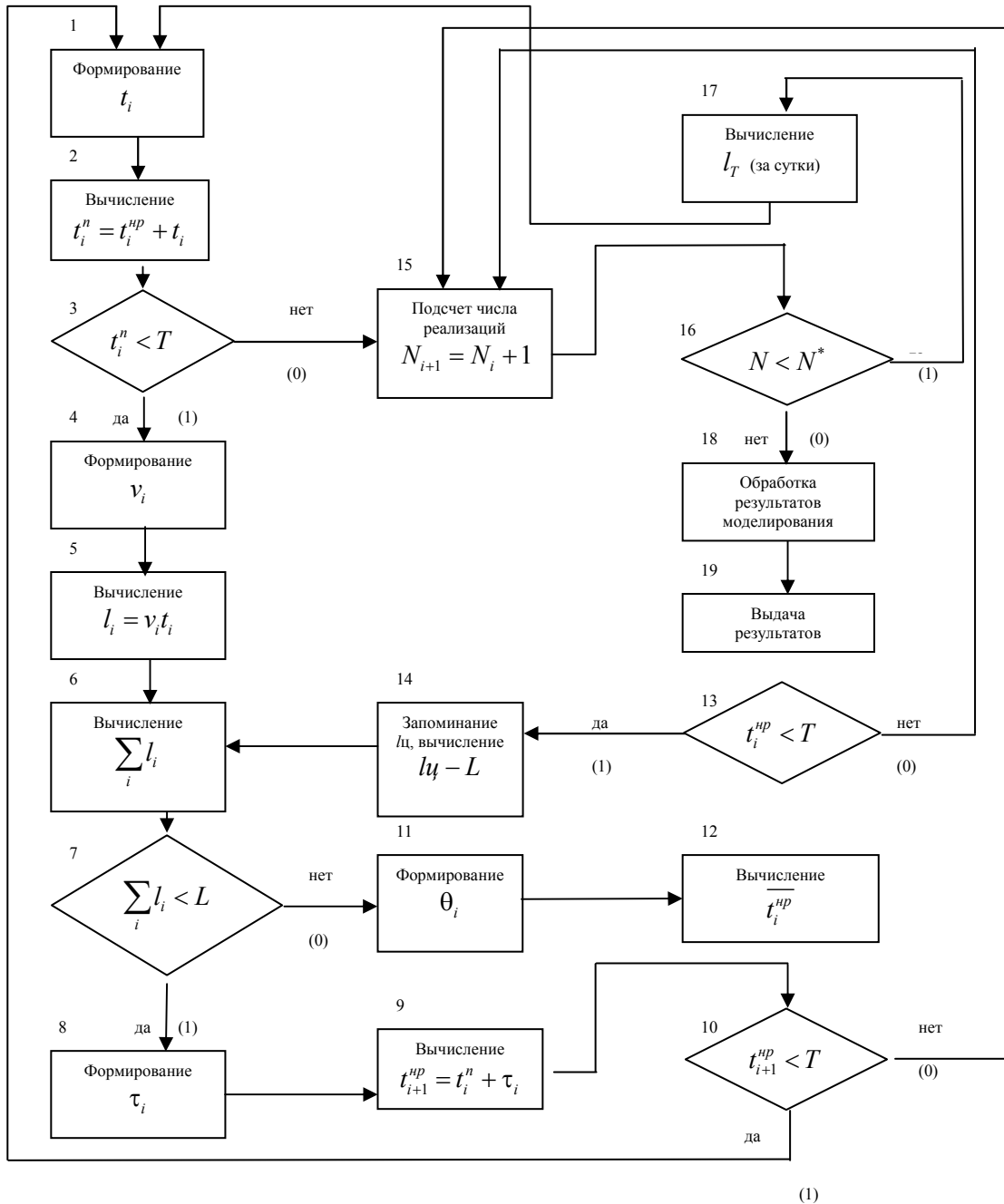


Рисунок 6. Блок-схема моделирующего алгоритма*

*Примечание. Данные работы [13].

Вернемся теперь к оператору P_3 . Если условие, проверяемое этим оператором, окажется выполненным, то управление от P_3 по стрелке (1) передается оператору Φ_4 , который формирует значение

v_i путем розыгрыша случайной величины, распределенной по закону $\varphi(v)$. Оператор A_5 вычисляет l_i , произведя умножение v_i и t_i .

Далее управление передается оператору A_6 , подсчитывающему и запоминаящему $\sum_i l_i$. От оператора A_6 управление передается оператору P_7 , который проверяет условие $\sum_i l_i < L$. Если данное условие выполняется, то комбайн не достиг конца лавы. Передача управления оператору Φ_8 означает, что наступил момент простоя комбайна. Величина τ_i этого простоя формируется оператором Φ_8 путем розыгрыша случайной величины τ . Затем управление передается оператору A_9 , который вычисляет время t_{i+1}^{np} начала работы комбайна после очередного простоя. Оператор P_{10} сравнивает t_{i+1}^{np} с T . Если окажется, что $t_{i+1}^{np} < T$, то управление по стрелке (1) от оператора P_{10} передается оператору Φ_1 и начинается новое формирование длительности рабочего интервала комбайна. Если же окажется, что $t_{i+1}^{np} > T$, то управление от оператора P_{10} по стрелке (0) передается оператору K_{15} , добавляющему единицу к прежнему количеству реализаций. Передача управления оператору K_{15} указывает на окончание добычных суток T .

Вернемся теперь к оператору P_7 . Если окажется, что условие, проверяемое оператором P_7 , не выполнено, то от него управление по стрелке (0) передается оператору Φ_{11} . Это означает, что комбайн достиг конца лавы (окончание цикла).

В этом случае нужно произвести перемонтаж рабочего органа комбайна и подготовить его к выемке следующей полосы угля. Поскольку в лаве существует поточная организация работы, этот момент может наступить в любое время суток. После перемонтажа комбайна выемка угля в лаве продолжается. Оператор Φ_{11} формирует значение θ_i путем розыгрыша случайной величины θ .

Оператор A_{12} подсчитывает время начала работы комбайна после его перемонтажа, а оператор P_{13} сравнивает его с T . Если условие, проверяемое оператором P_{13} , окажется выполненным, то от него по стрелке (1) управление передается оператору A_{14} , который запоминает значение l_q и вычисляет $l_q - L$, т.е. учитывает длину той части лавы, которую пройдет комбайн после перемонтажа до момента наступления первого простоя на новом цикле. Таким образом, при моделировании следующего цикла выемка угля в лаве, т.е. величина $\sum_i l_i$, в общем случае не равна нулю. От оператора A_{14} в связи с этим передается управление оператору A_6 . Если окажется, что условие, проверяемое оператором P_{13} , не выполнено, то управление передается оператору K_{15} . Каждая реализация соответствует работе лавы в течение суток и дает значение $\sum_{i=1}^n l_i$, позволяющее вычислить суточную добычу лавы.

Средняя суточная добыча из лавы определяется на основании статистической обработки множества реализаций:

$$Q_{cp} = (1 / N^*) \sum_{i=1}^{N^*} Q_i.$$

Оценка дисперсии суточной добычи составляет

$$s_Q^2 = \frac{1}{N^* - 1} \sum_{i=1}^{N^*} Q_i^2 - \frac{1}{N^* - 1} \cdot \frac{1}{N^*} \left(\sum_{i=1}^{N^*} Q_i \right)^2.$$

Операторная схема моделирующего алгоритма имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &^{10, 17} \Phi_1 A_2 P_3 \downarrow_{15} \Phi_4 A_5^{14} A_6 P_7 \downarrow_{11} \Phi_8 A_9; \\ &P_{10} \uparrow_{15} \downarrow_{15} \quad ^7 \Phi_{11} A_{12} P_3 \downarrow_{15} A_{14}^{6, 3, 10, 13} K_{15} P_{16} \downarrow_{18} A_{17}^1 \downarrow_{16} A_{18} \mathcal{Y}_{19}. \end{aligned}$$

Имитационное моделирование грузопотока из очистного забоя шахты

Подземный транспорт на горном предприятии часто может являться «узким местом», сдерживающим добычу полезного ископаемого, что приводит к значительным экономическим потерям. Для улучшения работы транспорта и выявления резервов важное значение имеет моделирование его работы, на основе которого можно выбрать наиболее эффективные мероприятия по устранению обнаруженных недостатков. Основная трудность решения этой задачи состоит в неравномерном поступлении полезного ископаемого из очистного забоя, а также в сложном характере взаимодействия работы очистного забоя и транспорта.

Решение этой задачи методом имитационного моделирования не только обеспечивает исследование характеристик фактических грузопотоков, но и дает возможность получить рекомендации по формированию новых грузопотоков в случае изменения организации производства и горнотехнических условий в очистном забое.

Пусть на шахте имеется некоторое постоянное число ЧПП погрузочных пунктов ПП, по одному пункту на каждый забой, расположенных на разных расстояниях от околоствольного двора, и К локомотивов, не закрепленных за ПП. Погрузочные пункты, локомотивы с вагонетками и разгрузочное устройство на околоствольном дворе являются элементами системы массового обслуживания.

К моменту начала моделирования на каждом $ПП_i$ ($i = \overline{1, ЧПП}$ — номер погрузочного пункта) находится M_i пустых вагонеток. В качестве потока заявок на обслуживание здесь выступает поток угля, поступающий из забоя на ПП для погрузки в вагонетки. В модели поток угля принят простейшим пуассоновским с интенсивностью $ПУ_i$ вагонеток/ч. На $ПП_i$ происходит загрузка вагонеток с постоянной для данного $ПП_i$ интенсивностью $ЗУ_i$ вагонеток/ч.

Погрузка при поступлении угля может прерываться по разным причинам (нет свободных вагонеток, отказ погрузочного устройства) с постоянной интенсивностью $ПО_i$ остановок/ч и возобновляться с постоянной интенсивностью восстановлений погрузки $ДО_i$ восстановлений/ч.

Таким образом, каждый $ПП_i$ может находиться в одном из трех состояний:

- $ПП_i$ свободен, но не производит погрузку из-за отсутствия угля;
- $ПП_i$ производит погрузку с интенсивностью $ЗУ_i$;
- $ПП_i$ простаивает при наличии угля.

После того как на данном $ПП_i$ будет загружено некоторое критическое число вагонеток $ЧВ_i$, на диспетчерский пункт шахты поступает заявка на подачу локомотива. Значение $ЧВ_i$ выбирается исходя из того, что при нормальной работе $ПП_i$ к моменту прихода локомотива на нем будут загружены $L > ЧВ_i$ вагонеток, где L — максимальная длина состава.

Если на околоствольном дворе имеется свободный локомотив, он с L пустыми вагонетками отправляется на вызвавший его $ПП_i$; если же свободного локомотива нет — данный $ПП_i$ ставится на очередь.

Через случайное время T_{i1} после отправления пустой состав приходит на $ПП_i$, где застаёт $ЧЗВ_i$ фактически загруженных вагонеток. В зависимости от времени, прошедшего от момента подачи с $ПП_i$ заявки на локомотив до момента его прихода с L пустыми вагонетками на $ПП_i$, величина $ЧЗВ_i$ может быть и меньше L , и больше L .

Локомотив забирает на погрузочном пункте $p = \min(ЧЗВ_i, L)$ загруженные вагонетки, оставляя пустые, и отправляется на околоствольный двор, куда и прибывает через случайное время T_{i2} .

На околоствольном дворе состав либо сразу начинают разгружать, если разгрузочное устройство свободно, либо ставят в очередь на разгрузку. Разгрузка составов происходит непрерывно, если есть загруженные вагонетки, с интенсивностью S вагонеток/ч, прерываний работы разгрузочного устройства из-за его неисправности в модели не происходит. После разгрузки состава локомотив свободен и может отправиться на погрузочный пункт.

Составленная программа позволяет провести моделирование при различном порядке обслуживания заявок, т.е. подачи локомотива на вызвавшие его погрузочные пункты. Были опробованы два варианта обслуживания: «первый подал заявку — первый получил локомотив» и вариант с приоритетами, при котором локомотив направлялся в первую очередь на погрузочный пункт, имеющий перед

началом работы наибольшее число порожних вагонеток. Моделирование показало, что введение приоритета полезно, так как позволяет обеспечить вывозку из забоев всего добытого угля при использовании лишь части локомотивов из имеющихся на шахте.

В модели были приняты постоянные число ЧПП погрузочных пунктов, число имеющихся на шахте локомотивов K , длина состава L , а также интенсивность потока разгрузки S . Постоянными для каждого данного погрузочного пункта принимались интенсивности потоков поступления угля $ПУ_i$, количество отказов погрузочного устройства $ПО_i$, восстановлений погрузки $ДО_i$, причем все потоки принимались простейшими пуассоновскими. Время движения пустого состава до i -го погрузочного пункта и время возвращения груженого состава на околоствольный двор принимались случайными величинами, разными для каждого $ПП_i$.

Модель позволяет достаточно полно отобразить функционирование внутришахтной системы вывозки угля с учетом многих случайных факторов и тем самым провести анализ этой системы при различных условиях, т.е. при различных значениях параметров, ее характеризующих, и выбрать оптимальные по разным критериям значения параметров, обеспечивающие наибольшую технико-экономическую эффективность.

References

- 1 *Bolshakov A.S.* Modeling in management: Manual. — Moscow: Filin information publishing house, Rilant, 2000. — 464 p.
- 2 *Bagrinsky K.A., Egorov N.E., Radchenko V.V.* Imitating models in economic planning. — Moscow: Economy, 1980. — 200 p.
- 3 *Avdulov P.V., Goyzman E.I., Kutuzov V.A., Fedorenko N.P.* Economic-mathematical methods and models for the head. — Moscow: Economy, 1984. — 232 p.
- 4 *Iozaytis V.S., Lviv Yu.A.* Economic-mathematical modeling of production systems: Manual. — Moscow: The higher school, 1991. — P. 93.
- 5 *Kazantsev A.K., Nikolenko A.A., Kabakov V.S., Puzhayev A.V. Serova L.S.* General management. Digest of a training course. — Moscow: INFRA — M., 1999. — 252 p.
- 6 *Larionov A.I., Yurchenko T.I.* New settlers A.L. Economic-mathematical methods in planning: Textbook. — Moscow: The higher school, 1991. — P. 169.
- 7 *Bazhin I.I.* Information systems of management. — M.: GU-VShE, 2000. — P. 271.
- 8 *Ermasov S.V., Ermasova N.B.* Innovative management: Textbook. — Moscow: The higher education, 2007. — P. 109.
- 9 *Larionov A.I., Yurchenko T.I.* Economic-mathematical methods in planning: Textbook. — Moscow: Subsoil, 1984. — P. 112, 113.
- 10 *Reznichenko S.S., Podolsk L.S., Ashikhmin A.A.* Economic-mathematical methods and modeling in planning and management of mining: Textbook. — Moscow: Subsoil, 1991. — P. 341.
- 11 *Goyzman E.I.* Modeling of productions on mines. — Moscow: Subsoil, 1977. — 192 p.
- 12 *Astakhov A.S., Goyzman E.I.* Economic-mathematical models of the organization of works in lavas. — Moscow: Nauka, 1967. — 140 p.
- 13 *Potapov V.D., Yarizov A.D.* Imitating modeling of productions in mining industry: Manual. — Moscow: The higher school, 1981. — P. 167.

Р.С.Каренов

Электронды есептеу машиналарын және олардың негізінде жасалатын басқару жүйелерін кеңінен қолдану модельдеудің дәстүрлі тәсілдері мен құралдары арқылы шешу жеткіліксіз болатын бірқатар міндеттердің алға қойғаны айтылған. Қажет болған жағдайда күрделілігі және қолдану аясы қандай болатынына қарамастан, кез келген дәрежеде егжей-тегжейлі бөлшектеп қарастыруға мүмкіндік беретін имитациялық модельдеу тәсілі идеясы және оның артықшылықтары ашылып көрсетілген. Зерттелетін нысанның имитациялық моделін құруға келіп саятын имитациялық модельдеу тәсілінің мәні қарастырылған. Имитациялық модельдеуде қолданылатын барынша танымал әдіс ретіндегі Монте-Карло тәсілінің рөлі мен маңызы бөлекше көрсетілген. Имитациялық модельдеу тәсілімен шахтаның жұмыс забойындағы көмір өндіруші комбайнның жұмысын зерттеудің әдістемелік негіздері ұсынылған. Көмір өндіру кәсіпорнының жұмыс забойындағы жүк ағынын имитациялық модельдеудің әдістемелік принциптері келтірілген.

R.S.Karenov

Theoretical and methodical bases of application of imitating modeling in problems of management

It is noted that wide use of the computer and control systems created on their basis have put forward a number of tasks for which decision there was insufficient use of traditional methods and simulators. Reveal idea and advantages of a method of the imitating modeling allowing if necessary to investigate systems of any complexity and appointment with any extent of specification. The essence of a method of the imitating modeling consisting in creation of imitating model of studied object is considered. The role and value of the Monte-Carlo method as the most known way used in imitating modeling are allocated. Methodical bases of research of operation of the dobychny combine in a clearing face of mine are offered by a method of imitating modeling. Are recommended methodical principles imitating modeling. Methodical principles of imitating modeling of freight traffic from a clearing face of the coal enterprise are recommended.

ӨОЖ 517 .518

Қ.Е.Кервенев

Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті (E-mail: kervenev@bk.ru)

Мақалада математика сабақтарында дидактикалық ойындарды қолдану мен ұйымдастырудың негізгі принциптері мен оның оқушылардың танымдық қызметін белсендірудегі рөлі айтылған. Сонымен қоса «Суретшілер жарысы», «Математикалық лото», «Сиқырлы шаршылар», «Дөңгелене жүгір», «Ең жақсы есепші», «Гүл», «Өз жауабыңды тап» тәрізді негізгі ойын түрлері қарастырылған. Дидактикалық ойындарды жүргізудің негізгі шарттары мен оларды дайындауға қойылатын талаптар анықталған. Дидактикалық ойынның құрылымы, функциялары, түрлері мен кезеңдері, таным процесінің қандай да бір бағытына әсер ететін ойын қызметінің әдістері мен формалары айқындалған.

Кілтті сөздер: дидактикалық ойындар, дидактикалық ойын материалдары, технология, халық педагогикасы, суретшілер жарысы.

Қазіргі кезеңдегі ғылыми-техникалық үрдістің қарқыны білім беруде жаңа міндеттер қойып отыр. Ол — техникалық тізбекте технологияның үздіксіз өзгерістеріне бейімделе алатын тұлға қалыптастыру. Ол үшін білім беру саласында қазіргі дидактикалық мүмкіндіктерді, жаңа идеяларды және білім беру технологияларын сарқа пайдалану. Әр түрлі оқыту технологияларын оқу мазмұны мен оқушылардың жас және психикалық ерекшеліктеріне орай таңдап, тәжірибеде сынап қарауда мұғалім іс-әрекетінің маңызы зор. Қазақстан Республикасының «Білім туралы» Заңында білім беру жүйесінің алдында тұрған міндеттер ретінде ұлттық және жалпы адамзаттық құндылықтар, ғылым мен практика жетістіктері негізінде жеке адамды жан-жақты дамытуға, іскерлік дағдыларын қалыптастыруға және кәсіби бағытта шындалуға бағытталған білім алу үшін қажетті жағдайлар жасау мақсаты көзделген.

Оқушылардың іс-әрекетінің ерекше түрлерінің бірі ойын болып табылады. Ойын оқу қызметіне тән бірқатар қасиеттерге ие екендігі баршаға мәлім. Мұны мектеп оқушыларының білімі мен дағдыларын қалыптастыруға бағыттауына мақсатталуы айқын көрсетеді. Сондай-ақ ойын оқушыларға қозғау салуға, оларға түрткі болуға да бағытталған. Ол жайында келесі бірқатар қайталанбас қасиеттерді айтуға болады: балалар мен жасөспірім жеткіншектер үшін оның оңайлығы мен игерімділігі, игерілуі тиіс шынайы ақиқаттың барынша әр алуан қырларын модельдеуге мүмкіндік беретін ойындық құралдардың бейімділігі, демократиялылығы (ойын барлық жағдайды да қабылдайды) және де балалар үшін ойынның тартымды жақтары. Ұлы ақын Абай Құнанбаев «Ойын ойнап ән салмай, өсер бала бола ма?» деп айтқандай, бала өмірінде ерекше орынды ойын алады. Баланың қоршаған ортаны танып білу, еңбекке араласуы, психологиялық ерекшеліктері ойын үстінде

калыптасатыны айқын. Ойын ойнау барысында балалар өздерін еркін сезінеді. Ерік арқылы байқалатын іздемпаздық, тапқырлық әрекеті: зейін қою, сезіну, ойлау, қабылдау.

Оқу үрдісінде ұлттық және дидактикалық мазмұнды ойын есептерін барынша біржақты түсіну, сондай-ақ мұғалімдер мен оқушылар тарапынан оған деген әр алуан қарым-қатынасты байқауға болады. Мұғалімдер мен әдіскерлердің көпшілігі, мұндай ойынмен «қызықты» сипатта берілген жаттығулар мен тапсырмаларды ғана байланыстырады. Олардың ойынша, рольдік және басқа да ойындарды сабақтарда қолдану орынсыз және мақсатқа сай келмейді. Сонымен қоса қазіргі кезде көбінесе ойынды екінші қатарға шығару байқалады. Негізінен ойын игерілген білімдер мен дағдыларды бекітуге арналған құрал ретінде ғана танылды. Кейбір зерттеулер мен әдістемелік құралдарда оқыту үрдісіндегі дидактикалық ойындарды пайдалану ерекшеліктерін айқындайтын ойын мен оқу іс-әрекеттерінің өзара байланысы жеткілікті дәрежеде айқындалмағандығы көрінеді.

Ойынды жас ерекшелік психологиясы саласында зерттеген бірқатар ғалымдарды атап өтуге болады, олар: Б.Г.Ананьев, А.В.Запорожец, С.Л.Рубинштейн, А.А.Люблинская, Д.Б.Эльконин.

Тәрбие беру теориясы мен оқыту тәжірибесінде ойындарды мақсатты пайдалану мәселесі жайында зерттеу жүргізген ғалымдар: В.В.Давыдов, А.В.Запорожец, Н.Н.Подьяков, Е.А.Покровский, Р.И.Жуковская, А.П.Усова және тағы да басқа ғалымдар өздерінің елеулі үлестерін қосты.

Сексенінші жылдардан бастап ұлттық және дидактикалық мазмұнды ойын есептерінің мазмұны мен қызметін айқындау бағытында бірқатар іс-шаралар жүргізіле бастады. Жекелеген әдістемелік ұсыныстарда оқытуда ойынды пайдалануға байланысты жұмыстар Л.И.Смагина, М.И.Моро, В.Н.Рудницкая, А.М.Пышкало еңбектерінде жасалды.

Мектепте оқыту барысында дидактикалық ойындарды қолдануға арналған қазақстандық ғалымдардың біраз еңбектері бар. Р.Қ.Керімбеков және Р.Жиеналиевтің ғылыми жұмыстары ұлттық дидактикалық ойындарды оқу үрдісінде қолдануға арналған. Бастауыш буын оқушыларының сабаққа қызығушылығын арттыруда дидактикалық ойындардың алатын орны жайында А.Ж.Алдажанова және З.Н.Күдебаеваның ғылыми еңбектерінде орын алған. Оқу үрдісінде пайдаланылатын дамытушы компьютерлік ойындар жүйесін теориялық тұрғыдан негіздеуге бағытталған Ж.С.Сардарованың, ойындарды оқу үрдісінде пайдаланудың әдістемесін жасауға арналған Б.А.Наркұлованың ғылыми жұмысында дидактикалық ойындарды қолданудың тиімді әдістемесі, дидактикалық ойындардың түрлері, өзіндік белгілері, мәселелері қарастырылған.

Математика сабағында ойын элементтерін тиімді пайдалану арқылы оқушылардың логикалық ойларын жетілдіру мәселелері С.М.Иманбекованың ғылыми еңбектерінде жаңа технология үдерісінде баяндалған.

Дидактикалық ойындарды математика сабақтарында пайдалану арқылы оқушылардың танымдық қызығушылығын арттыру мәселелері Т.Қ.Жаспанованың ғылыми зерттеулерінде қарастырылған.

Ойын, кейбір әдіскерлердің пікір-көзқарастары бойынша, оқыту әдісі ретінде қарастырыла бастады. Мазмұнды ойын есептердің математиканы оқыту үрдісінде қолдану жеке оқушылардың ой-өрісін, іскерлік дағдыларын қалыптастырудың құралы ретінде ғалым-әдіскер А.Е.Әбілқасымованың және т.б. еңбектерінде қарастырылған.

Сыныптан тыс жұмыстарда математикалық ойын есептерін пайдалану мәселелерінің әдістемесі Р.И.Кенжебекованың еңбегінде баяндалған. Ойын технологиясын білім беру барысында қолдануда, дидактикалық ойындардың түрлері, ойын арқылы оқыту мәселелері С.Кемазанова, Р.Керімбаева мен Т.Керімбаеваның еңбектерінде зерттелген. Оқушылар білімінің берік меңгеруінің құралы ойын болып табылатынын А.Рысқұлбекованың еңбектерінен көруге болады. Математиканы оқытуда компьютерді пайдаланып, кейбір математикалық ойындарды оқу үрдісінде қолдану А.Ө.Байдыбекованың жұмыстарында қарастырылған. Жұмысы пәнаралық дидактикалық ойындарды мектеп оқушылардың танымдық қызығушылығын қалыптастыру құралы ретінде пайдалануға арналған Б.М.Тажигұлованың, қазақтың ұлттық ойындары мектеп оқушыларын тәрбиелеу құралы ретінде А.К.Айтпаеваның зерттеу жұмысында қарастырылған [1].

Дидактикалық ойын арқылы оқушының меңгеретіндері:

1. Дидактикалық ойын материалдары дәстүрлі оқу материалдарымен салыстырғанда күрделірек.
2. Оқушылардан аса жауапкершілік ойын барысында шешім қабылдауда талап етіледі.
3. Нақты әрекеттерде оқу үрдісінде алған білімдерін қолдана білуге мүмкіндіктері артады.
4. Өз қызметтеріне негізделген оқу көлемін басқарады.
5. Психологиялық тұрғыда оқушылар үшін жағымды болып табылады.

6. Өз уақыттарын үнемдеуге үйретеді.
7. Өздері қатыса отырып, қиын мәселелерді өз бетінше шеше білуді үйренеді.
8. Оқушылар өз жетістіктері, әсерлері, алған білімі, дағдысы жөнінде оқушылар ата-аналарымен, өзге балалармен, мұғалімдермен пікір таластырады, кітапханада, Интернет желісінде өз бетімен іздене білуге, қажетті материалдарға іріктеулер жүргізуге үйренеді.
9. Ойын кезінде қарапайым оқу қызметімен салыстырғанда көп уақыт мөлшері үнемделеді.
10. Олар нақты қызмет тәжірибесін меңгереді.
11. Ойынға қатысушылардың саны кейде шектеулі.
12. Ойын оқушылар үшін қауіпсіз болып табылады.

Балалардың бағалы өмірінің алғашқы күндерінен бастап-ақ ойын әрекеті маңызы зор. Ойын түрлерінен халық жасаған мұралар сан алуан. Сондай ойындардың бірі — ұлт ойындары. Ұлттық ойындарды отбасы тәрбиесінен бастап, мектептегі жеке пәндерді оқыту барысында, қосымша материалдарды меңгертуде, оқушының пәнге деген қызығушылығын арттыру үшін пайдалануға болады. Мұндай ойындарға тек ойын ретінде қарамай, халықтың ғасырлар бойы жасаған асыл қазынасы, бір жүйеге келтірілген тәрбие құралы деп қарауымыз қажет.

Сабақ барысында сан алуан ойын түрлерін пайдалану — сабақ түрлері мен әдістерін жетілдіру жолындағы ізденістердің шешуші бір буыны. Кез келген ойын түрлерін оқу үрдісін пысықтау, жаңа сабақты қорытындылау кезеңдерінде, қайталау сабақтарында, сынақ сабақтарында пайдалануға болады. Дидактикалық ойын материалдары сабақтың тақырыбы мен мазмұнына неғұрлым сәйкес алынса, оның танымдылық маңызы да арта түсетіні айдан анық.

Дидактикалық ойындарды іріктеп алуда нақтылы сабақтың мақсаты, мүмкіндіктері мен жағдайларын ескеруге ерекше назар аударған жөн. Оқушының ойын жетілдіріп, сабаққа қызығушылығын, белсенділігін арттыру үшін мектеп мұғалімінің басты қолданатын тәсілінің бірі ойын екені тәжірибелі мұғалімдерге айқын жағдай.

Сабақта дидактикалық ойындарды тиімді пайдалану сабақтың әсерлігін, тартымдылығын күшейтеді, оқушылардың сабаққа ынтасы мен қызығушылығын арттырады.

Математика сабақтарындағы дидактикалық ойынмен ұйымдастырылған сабақ балаларға көңілді, жеңіл, түсінікті болып келеді.

Дидактикалық ойынның маңызы зор. Біріншіден, ол білу және үйрену, екіншіден, ойнай отырып, өзіндік білім алуы оқушының өмір тәжірибесін жинақтауға жағдай туғызады. Тағы да айта кетерлік жайт, ойынның әуестену, кәсіптік, оқу-жаттығу ойындары сияқты түрлері бар. Ондай серігу, көңіл көтеру бола тұра оқуға, шығармашылыққа, емделуге, қарым-қатынасқа, еңбектенуге мүмкіндік береді.

Ойын халық педагогикасында, мектепке дейінгі және мектептен тыс мекемелерде кеңінен қолданылады. Ойынды ерте заманнан үлкендердің іс-тәжірибесін жеткіншек ұрпаққа жеткізу үшін пайдаланған. Ойын әрекеті қазіргі жағдайда сабақ немесе оның бір бөлігі ретінде, сыныптан тыс жұмыстың технологиясы ретінде, ойын пәнінің тарауын және тақырыбын түсіну үшін өздік технология ретінде, жалпы технологияның элементі ретінде қолданылады.

Математика сабағында дидактикалық ойындарды қолдану арқылы оқушылардың пәнге қызығушылығын арттыру мәселелерін жеке қарастырайық. Қарыштап дамып келе жатқан технологиялық прогресс кезеңінде өскелең ұрпақтың білім деңгейі қазіргі заман талабына сай болуы баршаның мақсаты болып отыр. Сондықтан қазіргі таңда сапалы білім беру мәселесі қоғамды толғандырып отыр.

Елбасы биылғы Жолдауында: «Сапалы білім беру Қазақстанның индустрияландырылуының және инновациялық дамуының негізіне айналуы тиіс», — деп атап көрсетті.

Ал оқушылардың жаратылыстану-математикалық бағытта пәндерді игеруі математикадан басталады. Математика пәнін дұрыс игермеген оқушы осы бағыттағы қай салаға да маман болып барса да, шеберлік шыңына жетуі қиынға соғады. Сондықтан ғылымның негізі болып табылатын математика пәнін оқушы сапалы түрде игеруі тиіс.

А.Постниковтың «Мен адамның математикаға қабілеті жоқ дегенге сенбеймін» тұжырымдамасын негіз ретінде алсақ, онда әрбір балада математикаға қабілеті бар деген ойға келеміз. Яғни сол қабілетін оятып, әрі қарай дамытып осы салада жетістіктерге жеткізу мұғалімге байланысты екені белгілі болады.

Қазір оқушыны жан-жақтан, қоршаған ортадан алаңдататын көптеген қызықты, қолжетімді «объектілер» көп: теледидар, компьютер, Интернет желісі т.б.

Осындай ортадан оқушының назарын оқуға, білімге тарту онайға түспейтіні белгілі. Бірақ қай заманда болсын, ұстаздың шеберлігі сонымен сомдалады, түрлі кедергілерді жеңе біліп, оқушылардың танымдық қызығушылығын дамыта отырып, білімді шәкірт тәрбиелеу.

Мұғалімнің шеберлігінің кілті оның сабақ технологиясын меңгеруі, әдістемелік тәсілдерді тиімді қолдана білуі болып табылады.

Осындай тиімді де, нәтижелі әдістердің бірі — дидактикалық ойындар. Ойын — адамның өмір танымының алғашқы қадамы. Ал оқыту үрдісінде жаңа технологияның маңызды бөлігі т.б.

Орыс ғалымы, дәрігер, педагог К.А.Покровский: «Ойын — күнделікті бала еңбегі, болашақ өмірінің бастамасы. Ойын үстінде баланың ертеңгі өмірге деген қабілеті байқалады», деген. Ойын баланы қимылға, әрекетке, дене шынықтыруға төселдіреді. Сол арқылы өмір күресіне, еңбекке баулиды. Ойынсыз ақыл-ойдың қалыпты дамуы да жоқ. Ойын арқылы баланың рухани сезімі жасампаз өмірмен ұштасып, өзіне қоршаған дүние туралы түсінік алады [2].

Сабақта қолданылатын дидактикалық ойындар оқушылардың оқуға деген ынтасын арттыратын құрал. Сондықтан оқушылар сабақ үстінде ойынды көп қажет етеді. Дидактикалық ойындар оқушылардың жас ерекшеліктеріне қарай күрделеніп отырылуы тиіс. Мысалы, дайындық сыныбында қарапайым ғана ойын түрлерін ойнатсақ, жоғары сыныпқа барған сайын баланың жас ерекшелігіне сай болып күрделенгені дұрыс. Олай болса, ойын элементтерін пайдаланудың маңызы зор. Дидактикалық ойынның көптеген түрлері бар. Сондықтан ойын балалардың жас ерекшеліктеріне және өтілетін сабақтың тақырыптарының мазмұнына сай етіліп таңдалып алынғаны дұрыс. Оқушы ойын әрекеті үстінде білімді қалай игеріп жатқанын, ал оқу үрдісінің қалай ойынға ұласып кеткенін аңғармай қалуы тиіс. Сонда ғана ойын және іс-әрекеттері табиғи бірлікте болып, пәндік білім, білік және дағдыны игеруге толық ықпал жасайды.

Балалардың білімдерін арттырудың бірден-бір құралы дидактикалық ойындар болып табылады. Сабақ барысында ойын элементтерін қолданудың түрлі жолдары бар екені баршаға мәлім. Таңдалып алынған дидактикалық ойындар арнайы мақсатты көздейді және нақты міндетті шешеді. Мұндай түрдегі ойындар сабақтың басында қолданғанда — өткен сабақты еске түсіреді. Ал сабақтың ортасында — көңіл-күйін сергітеді, ерік-жігерін дамытады, сабаққа ынтасын арттырады. Сабақтың соңында тақырыпты бекіту, сабақта алған білімді жинақтау мақсатын көздейді.

Дидактикалық ойындар да халық педагогикасының құрамдас бір бөлігі болып келеді. Ұлттық ойындар халықтың әлеуметтік-экономикалық даму жағдайларына байланысты туып, дамығандығын халқымыздың ұлттық ойындарымен таныса отырып, көз жеткізуімізге болады. Ұлттық ойындарды оқу үрдісінде пайдалану оқушылардың білімдерін күнделікті өмірмен ұштастыруға қолайлы жағдайлар туғызады.

Бала үшін ойын — өмір сүрудің белсенді формасы. Ойын — бала әрекетінің негізгі бір түрі. Олар ойын арқылы ересектерге еліктейді. Ересектердің адамгершілік нормаларын игереді, іс-әрекеттерін, қарым-қатынастарын үйренеді, еңбектің мәнін түсіне біледі, әлеуметтік рөлдер атқарады.

Оқу үрдісінде тақырыпқа сай алынған тәрбиелік мәні бар ойын элементтері, жүргізілетін жұмыс түрлері оқушылардың ой белсенділігін қажет етеді. Сол себепті әр мұғалім өз сабағында дидактикалық ойын түрлерін орынымен қолданып, оны тиімді қолдану арқылы оқушылардың білімге ынта-ықыласын, пәнге деген сүйіспеншілігін қалыптастыруды мақсат етеді. Демек, мұғалім өткізетін сабағын оқушының қабілет деңгейіне, психологиялық ерекшелігіне сай байланыста жоспарлауы тиіс. Сондай жағдайда ғана сабақ ұтымды, жеңіл игерілімді және білім алушыларды жалықтырмайды.

Дидактикалық ойындарды қолдану кезіндегі оқушылардың белсенділігі көп жағдайда жарыс нәтижелерін әділ бағалау мен дұрыс қорытындылауға байланысты. Ойынға қатысушы оқушылар ойын барысындағы өздерінің кемшіліктері мен жетістіктері жөнінде біліп отыруы тиіс.

Ойын нәтижелерін есепке алу түрліше: әрбір дұрыс орындалған ойын үшін ұпай есептеу, әрбір ұтылыс үшін кем ұпай беріледі, жаттығуға жіберілген уақытты есепке алу.

Балалар ойынына қатысты мәселелерді қарастырмаған ағартушы, педагог болмағандығын педагогикалық ғылымдар тарихынан аңғаруға болады. Ұлы педагогтар Я.А.Коменский, Ж.-Ж. Руссо, И.Г.Песталоцци кезіндегі халықтық ойындарға аса назар аударып, оларды қолданып, халықтық ойындардың теориялық негізін жасауға тырысқан. Ойын элементтерінің балалардың ойлау қабілетін белсенді ететін, денсаулықтарын жақсартатын және барлық ағзаларын икемді қозғалуға баулитындығын Я.А.Коменский жоғары бағалаған. Білім алу ойындарының балалар өмірінде

кезектесіп, алмасып отыруы бір-бірімен сабақтаса байланысуы бала дамуындағы қажетті шарты болып табылады [3].

Әлемдік білім беру тәжірибелерін пайдалана отырып, баланың жеке-дара күшінің дамуын қамтамасыз ететін жаңа технологияларды іздестіру және оларды қолдануға бағытталған шаралар қазіргі білім беру салаларында ауқымды қарқын алуда.

Математикалық ойын дегеніміз — тынысы кең, алысқа мегзейтін, ойдан ойға жетелейтін, адамға қиял мен қанат бітіретін ғажайып нәрсе, ақыл-ой жетекшісі.

Ойын — екі немесе одан да көп адамдардан құрылатын топтардың өз мүдделерін іске асыру үшін күрес жүргізу процесі. Әрбір топтың өз мақсаты, стратегиясы болады.

Педагогика саласында пайдаланатын ойындарды дидактикалық ойындар деп атайды. Дидактикалық ойындар баланың ынтасын сабаққа аударуға, көңіл қойғызуға, қабылдауын жеңілдетуге, білімді толық игеруге көмектеседі, сабаққа эмоциялық реңк береді.

Математиканы оқытуда қолдануға болатын дидактикалық ойындардың мысалдарын келтірейік.

1. «Суретшілер жарысы» ойыны.

Тақтаға нүктенің координаталары жазылған: $(0;0)$, $(-1;1)$, $(-3;1)$, $(-2;3)$, $(-3;3)$, $(-4;6)$, $(0;8)$, $(2;5)$, $(2;11)$, $(6;10)$, $(3;9)$, $(4;5)$, $(3;0)$, $(2;0)$, $(1;-7)$, $(3;-8)$, $(0;-8)$, $(0;0)$.

Координат жазықтығында әр нүктені белгілеп, оларды алдыңғысына кесіндімен қосу керек. Нәтижесінде нақты бір сурет шығады.

Бұл ойынды кері тапсырмамен де өткізуге болады: сынық сызық конфигурациялы сурет салып, төбелерінің координаталарын табу керектігін айту.

2. «Теңіз соғысы» ойыны.

Бұл ойындар байқампаздыққа, ой шапшаңдығын жетілдіруге, назарлы болуға тәрбиелейді және жазықтықтағы нүктенің орны координаталары арқылы анықталатынына көз тақырыпты жеткізіп жылдам игереді.

3. «Математикалық лото» ойыны

Әр оқушыға тапсырмалары бар конверт беріледі. Олардың 1 үлкен карта және қалғаны кіші карталар, олардың саны тапсырмалардан көп. Кішілерінде — есептеу нәтижелері. Оқушы үлкен картадағы тапсырмаларды орындап, оны жауаптармен жабу керек (есептеу нәтижелерімен). Барлық тапсырманы орындап болған соң оқушы кіші карталарды аударды (егер барлық есептеулер дұрыс болса) және тапсырма алады. Мысалы: бүтін сандардың анықтамасы, салыстыру ережелері, қосу ережелері, есептеулер, бөлулер, бүтін сандарды көбейту және т.б. оқушылар берілген тапсырмаларды орындайды.

4. «Сиқырлы шаршылар» ойыны:

А) Шаршы торларына вертикаль және горизонталь бойынша қосындысы 0 болатын сандарды жаз.

Б) Шаршы торларына -1 ; 2 ; -3 ; -4 ; 5 ; -6 ; -7 ; 8 ; -9 сандарын вертикаль және горизонталь бойынша көбейткенде оң сан шығатындай етіп толтыр.

5. «Дөңгелене жүгір» ойыны.

Қатаң бағдар бойымен орындалуы тиіс тапсырмалар тақтаға жазылған. Тапсырманы дұрыс орындаса, бірінші айналым алынады.

Бұл ойын арқылы нақты сандармен барлық амалдарды орындауды игеруге дағдыларын, зейінділігін дамытады.

6. «Гүл» ойыны.

Гүл жапырақшаларына амалдарды орындауға берілген тапсырмалар жазылған.

1) $1,5 \cdot 0,2$

2) $3,75 \cdot 0,2$

3) $3,4 : 0,2$

4) $0,08 + 0,2$

5) $4,02 + 0,2$

6) $5,3 - 0,2$

Тапсырмаларды орындап болған соң тақтаға сондай гүл салады. Оны ең алғаш болып есептеген оқушы ғана нәтижелерін жапырақшаларға жазады.

7. «Ең жақсы есепші» ойыны.

Сынып үш топқа бөлінеді. Әр топ өз командасын қорғайтын «есепші» таңдайды. Басқа команда мүшелері «есепшіге» жаңылғанша тапсымалар береді. Әр дұрыс жауап — 1 ұпай. Көп ұпай жинаған команда жеңеді. Ойын шарты — сұраққа тез жауап беру.

8. «Математикалық лото» ойыны.

Бұл қайталау сабақтарында қолданылады.

Ойнау реті: Оқулықтың қайталанатын пункт номерлері бар шарлар (түтікше етіп бұратылған қағаздар, картон карточкалары) қорапқа немесе дорбаға салынады.

Сынып топтарға бөлінеді (қатар бойынша немесе ұл-қыздар).

Командалар әр пункттен 4–5 сұрақтан дайындайды. Мұғалім немесе оның көмекшісі қораптап шар алып, оның номерін көрсетуді өтінеді. Қарсыластар бір-бііне кезектесе сұрақ қоя бастайды. Сұрақтар 1–3 баллмен бағаланады. Соңында әр топтың жинаған балдары есептеліп, жеңіс тағайындалады.

9. «Өз жауабыңды тап» ойыны.

«Оң және теріс сандарды қосу және азайту» тақырыбына арналған, бақылау түріндегі ойын. Қажетті құралдар: үлестірім материалдары, флажоктар.

Ойын шарты: Сынып 3 командаға бөлінеді. Әр командаға тапсырмалар саны әр оқушыға жетерліктей көлемде карточка-тапсырмалар беріледі. Команданың әр мүшесі бір тапсырмадан орындап, өз жауаптарын кодталған жауаптар арасынан іздейді. Егер онда жауабы табылмаса, онда қате жіберілген болады. Егер жауап бар болса, онда жауаптың номерін жазады. Әр келесі ойыншы өз жауаптарын жазады. Мұғалім соңғы қатысушыдан алынған жауапты тексереді.

Карточка-тапсырмалар.

| 1-команда | 2-команда | 3-команда |
|------------------------------------|------------------------------------|----------------------------------|
| 1) $7,3 - (-2,6) = \dots = a$ | 1) $-5,6 - 3,7 = \dots = a$ | 1) $-2,4 + 6,8 = \dots = a$ |
| 2) $-3,3 - a + (-3,4) = \dots = b$ | 2) $31,2 - a + (-2,5) = \dots = b$ | 2) $-5,6 - a + 3,6 = \dots = b$ |
| 3) $-13 - b - (-11,2) = \dots = c$ | 3) $-12 - b - (-6,1) = \dots = c$ | 3) $14 - (+2,3) - b = \dots = c$ |
| 4) $(a + b) - c = \dots = d$ | 4) $(c + b) - a = \dots = d$ | 4) $(a + c) - b = \dots = d$ |

КОД:

| | | |
|----------|----------|---------|
| 1. 34,8 | 1. -43,9 | 1. 4,4 |
| 2. -36,6 | 2. -9,3 | 2. 18,1 |
| 3. -41,5 | 3. 3,4 | 3. 28,9 |
| 4. 29,9 | 4. 38 | 4. -6,4 |
| Д= -41,5 | Д= 3,4 | Д= 28,9 |

Осы сияқты дидактикалық ойын элементтерін қолдану арқылы оқушылардың тақырыпты меңгерудегі белсенділігін артырып, есептер шығаруда тиімді нәтижелерге жетуге болатынын көреміз.

Сонымен, математика сабағындағы дидактикалық ойынның ерекше маңызына көз жеткізе отырып, мынандай тұжырымдар жасауға болады:

1. Математика сабағындағы ойын технологиясының пайдасы қазіргі кездегі математиканы терең меңгеруге, жаңа тәсілдерді қолдануға мүмкіндік береді.

2. Қызықты тапсырмалар мен жаттығулар түрлері білімді меңгерумен қатар, оқушылардың танымдық, интеллектуалдық, шығармашылық қабілеттерін арттырады.

3. Оқушылардың ойлау қабілетін күшейтеді, күрделендіреді. Соның әсерінен ойлау жүйесін дамытады.

4. Оқушылардың алған білімдерін тереңдетеді, сабақтың сапасын жақсартады.

5. Оқушылардың пәнге деген қызығушылығы, сүйіспеншілігі артады.

References

1. *Elubayev E.* As it is necessary to solve a problem. — Almaty: Mektep, 1984. — 260 p.
2. *Semyashkina N.I.* Value of didactic games at mathematics lessons // Elementary school. — 1997. — №2. — P. 28.
3. *Krol V.M.* Psychology and pedagogics: Manual. — Moscow: The higher school, 2004. — P. 362.

К.Е.Кервенеv

В статье представлены общие принципы организации и проведения дидактических игр на уроках математики и раскрыта их роль в процессе активизации познавательной деятельности школьников. Также рассмотрены основные виды игр, как «Соревнование художников», «Математическое лото», «Магические квадраты», «Забег по кругу», «Лучший счетчик», «Цветок», «Найди свой ответ». Определены основные условия проведения дидактической игры и требования к их подготовке. Выявлены структура, функции, виды, этапы дидактических игр, формы и способы игровой деятельности, влияющие на тот или иной аспект процесса познания.

К.Е.Kervenev

About questions of using didactic games when studying mathematics

In work the general principles of the organization and carrying out didactic games at lessons of mathematics and their role in the course of activization of informative activity of school students are presented. Also main types of games are considered: "Competition of artists", "A mathematical lotto", "Magic squares", "Running around", "The best counter", "the Flower", "Find the answer" the main conditions of carrying out didactic game and the requirement to their preparation are defined. The structure, functions, types, stages of didactic games, forms and ways of the game activity, influencing this or that aspect of process of knowledge are revealed.

УДК 521.1

М.Дж.Минглибаев^{1,2}, Г.М.Маемерова¹¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби;²Астрофизический институт им. В.Г.Фесенкова, Алматы (E-mail: minglibayev@mail.ru)

«Mathematica»

Уравнения движения исследуемой задачи получены в оскулирующих элементах аperiодического движения по квазиконическому сечению. Вековые части возмущающих функций вычислены в оскулирующих канонических элементах, с помощью системы «Mathematica». Вековые возмущения первого порядка получены методом Пикара.

Ключевые слова: оскулирующие элементы, метод Пикара, вековые возмущения, квазиконическое сечение, метод Гамильтона-Якоби.

Введение. Реальные космические тела нестационарные. Со временем изменяются их массы, размеры, формы и структура распределения масс внутри тел [1–6]. Эти процессы особенно интенсивно происходят в двойных и кратных системах [4]. В связи с этим исследуется задача трех тел с массами, изменяющимися в различных темпах изотропно. Тела предполагаются как материальные точки. На основе теории возмущений, на базе аperiодического движения по квазиконическому сечению [5] исследуются вековые возмущения задачи трех тел-точек с переменными массами.

Постановка задачи. Рассмотрим систему взаимогравитирующих трех тел T_0, T_1 и T_2 с переменными массами, изменяющимися изотропно в различных темпах [1,5,6]:

$$m_0 = m_0(t), \quad m_1 = m_1(t), \quad m_2 = m_2(t), \quad \frac{\dot{m}_s}{m_s} \neq \frac{\dot{m}_\sigma}{m_\sigma}, \quad s, \sigma = 0, 1, 2, \quad s \neq \sigma. \quad (1)$$

Уравнения движения в абсолютной системе координат имеют вид:

$$m_i \ddot{\vec{R}}_i^* = \text{grad}_{\vec{R}_i^*} U, \quad i = 0, 1, 2, \quad (2)$$

где

$$U = f \left(\frac{m_0 m_1}{R_{01}^*} + \frac{m_0 m_2}{R_{02}^*} + \frac{m_1 m_2}{R_{12}^*} \right), \quad R_{ij}^* = \sqrt{(X_j^* - X_i^*)^2 + (Y_j^* - Y_i^*)^2 + (Z_j^* - Z_i^*)^2},$$

$\vec{R}_i^* = \vec{R}_i^*(X_i^*, Y_i^*, Z_i^*)$ — радиус-векторы тел; f — гравитационная постоянная. Рассматриваемая система уравнений (2) при условии (1), в отличие от других схем задачи трех тел с переменными массами, не имеет ни одного известного интеграла. Учитывая, что силовая функция зависит только от взаимных расстояний тел, следуя работе [1], переходим к относительной системе координат с началом в точке T_0 с массой $m_0 = m_0(t)$. Обозначим

$$\vec{R}_i = \vec{R}_i(X_i, Y_i, Z_i) = \vec{R}_i^* - \vec{R}_0^*, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Уравнения относительного движения имеют классический вид:

$$\ddot{\vec{R}}_i + f(m_0 + m_i) \frac{\vec{R}_i}{R_i^3} = \text{grad}_{\vec{R}_i} W_i; \quad (4)$$

$$W_i = f \sum_{j=1}^2 m_j \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{X_i X_j + Y_i Y_j + Z_i Z_j}{R_j^3} \right);$$

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2} = R_{ij}^*, \quad \Delta_{i0} = R_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}.$$

Если мы знаем решения системы дифференциальных уравнений (4), то $\ddot{\vec{R}}_0^*$ определяется интегрированием уравнения

$$\ddot{\vec{R}}_0^* = \text{grad}_{\vec{R}_0^*} \left[f \left(\frac{m_1}{R_{01}^*} + \frac{m_2}{R_{02}^*} \right) \right],$$

после этого \vec{R}_1^*, \vec{R}_2^* легко определяются из соотношений (3).

Исходя из уравнений относительного движения (4), получим уравнения движения в координатах Якоби [5, 7]

$$\mu_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \text{grad}_{\vec{r}_1} U, \quad \mu_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \text{grad}_{\vec{r}_2} U - \mu_2 (2\dot{\nu}_1 \dot{\vec{r}}_1 + \ddot{\nu}_1 \vec{r}_1), \quad (5)$$

где

$$\mu_1 = \mu_1(t) = \frac{m_1 m_0}{m_0 + m_1} \neq \text{const}, \quad \mu_2 = \mu_2(t) = \frac{m_2 (m_1 + m_0)}{m_0 + m_1 + m_2} \neq \text{const},$$

приведенные массы

$$U = f \left(\frac{m_0 m_1}{r_{01}} + \frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} \right);$$

$$r_{01}^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r_1^2, \quad r_{02}^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2;$$

$$r_{12}^2 = (x_2 - \nu_1 x_1)^2 + (y_2 - \nu_1 y_1)^2 + (z_2 - \nu_1 z_1)^2;$$

$$r_{12}^2 = (x_2 - \nu_0 x_1)^2 + (y_2 - \nu_0 y_1)^2 + (z_2 - \nu_0 z_1)^2;$$

$$\nu_1 = \nu_1(t) = \frac{m_1}{m_0 + m_1} \neq \text{const}, \quad \nu_0 = \nu_0(t) = \frac{m_0}{m_0 + m_1} \neq \text{const}.$$

Исследуем задачу, которая описывается уравнениями движения (5), используя теорию возмущения на базе аperiодического движения по квазиконическому сечению [5, 8].

Уравнения движения в оскулирующих элементах. Уравнения (5) запишем в виде

$$\mu_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \text{grad}_{\vec{r}_1} \left(f \frac{m_1 m_0}{r_1} \right) + b_1 \vec{r}_1 + \text{grad}_{\vec{r}_1} R_1;$$

$$\mu_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \text{grad}_{\vec{r}_2} \left(f \frac{m_2(m_1 + m_0)}{r_2} \right) + b_2 \vec{r}_2 + \text{grad}_{\vec{r}_2} R_2,$$

где

$$b_1 = b_1(t) = \mu_1 \frac{\dot{\gamma}_1}{\gamma_1}, \quad \gamma_1 = \gamma_1(t) = \frac{m_0(t_0)}{m_0(t)};$$

$$b_2 = b_2(t) = \mu_2 \frac{\dot{\gamma}_2}{\gamma_2}, \quad \gamma_2 = \gamma_2(t) = \frac{m_0(t_0) + m_1(t_0)}{m_0(t) + m_1(t)};$$

$$R_1 = -\frac{1}{2} b_1 r_1^2 + W, \quad R_2 = -\frac{1}{2} b_2 r_2^2 + W - V;$$

$$W = f \left(\frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - \frac{m_2(m_0 + m_1)}{r_2} \right);$$

$$V = \mu_2 [(2\dot{v}_1 \dot{x}_1 + \ddot{v}_1 x_1) x_2 + (2\dot{v}_1 \dot{y}_1 + \ddot{v}_1 y_1) y_2 + (2\dot{v}_1 \dot{z}_1 + \ddot{v}_1 z_1) z_2].$$

Обозначим

$$K_1 = \frac{1}{2} \mu_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2), \quad K_2 = \frac{1}{2} \mu_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2);$$

$$U_1 = f \frac{m_1 m_0}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} + \frac{1}{2} b_1 (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + R_1;$$

$$U_2 = f \frac{m_2(m_0 + m_1)}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} + \frac{1}{2} b_2 (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) + R_2$$

и перейдем к новым переменным

$$x_i = \gamma_i \rho_i \cos \varphi_i \cos \theta_i, \quad y_i = \gamma_i \rho_i \cos \varphi_i \sin \theta_i, \quad z_i = \gamma_i \rho_i \sin \varphi_i, \quad i = 1, 2.$$

Уравнения движения в переменных

$$\rho_i, \quad P_{\rho_i} = \frac{\partial K_i}{\partial \dot{\rho}_i} = \mu_i \gamma_i^2 \dot{\rho}_i + \mu_i \gamma_i \dot{\gamma}_i \rho_i;$$

$$\varphi_i, \quad P_{\varphi_i} = \frac{\partial K_i}{\partial \dot{\varphi}_i} = \mu_i \gamma_i^2 \rho_i^2 \dot{\varphi}_i, \quad \theta_i, \quad P_{\theta_i} = \frac{\partial K_i}{\partial \dot{\theta}_i} = \mu_i \gamma_i^2 \rho_i^2 \cos^2 \varphi_i \dot{\theta}_i, \quad i = 1, 2,$$

можно написать в следующей форме:

$$\dot{\rho}_i = \frac{\partial H_i}{\partial P_{\rho_i}}, \quad \dot{P}_{\rho_i} = -\frac{\partial H_i}{\partial \rho_i} + \frac{\dot{\mu}_i}{\mu_i} P_{\rho_i};$$

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial H_i}{\partial P_{\varphi_i}}, \quad \dot{P}_{\varphi_i} = -\frac{\partial H_i}{\partial \varphi_i} + \frac{\dot{\mu}_i}{\mu_i} P_{\varphi_i};$$

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial H_i}{\partial P_{\theta_i}}, \quad \dot{P}_{\theta_i} = -\frac{\partial H_i}{\partial \theta_i} + \frac{\dot{\mu}_i}{\mu_i} P_{\theta_i};$$

соответственно

$$H_i = \frac{1}{2\mu_i \gamma_i^2} \left[(P_{\rho_i} - \mu_i \gamma_i \dot{\gamma}_i \rho_i)^2 + \frac{P_{\varphi_i}^2}{\rho_i^2} + \frac{P_{\theta_i}^2}{\rho_i^2 \cos^2 \varphi_i} \right] - U_i^*;$$

$$U_1^* = f \frac{m_1 m_0}{\gamma_1 \rho_1} + \frac{1}{2} (b_1 \gamma_1^2 + \mu_1 \dot{\gamma}_1^2) \rho_1^2 + R_1;$$

$$U_2^* = f \frac{m_2(m_0 + m_1)}{\gamma_2 \rho_2} + \frac{1}{2} (b_2 \gamma_2^2 + \mu_2 \dot{\gamma}_2^2) \rho_2^2 + R_2.$$

Вводя новые импульсы

$$P_{\rho_i} = \psi_i \tilde{P}_{\rho_i}, \quad P_{\varphi_i} = \psi_i \tilde{P}_{\varphi_i}, \quad P_{\theta_i} = \psi_i \tilde{P}_{\theta_i}, \quad \psi_i = \psi_i(t) = \frac{\mu_i}{\mu_{i0}} = \frac{\mu_i(t)}{\mu_i(t_0)},$$

напишем уравнения движения в канонической форме

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_i &= \frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \tilde{P}_{\rho_i}}, & \dot{\varphi}_i &= \frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \tilde{P}_{\varphi_i}}, & \dot{\theta}_i &= \frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \tilde{P}_{\theta_i}}, \\ \dot{\tilde{P}}_{\rho_i} &= -\frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \rho_i}, & \dot{\tilde{P}}_{\varphi_i} &= -\frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \varphi_i}, & \dot{\tilde{P}}_{\theta_i} &= -\frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \theta_i}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\tilde{H}_i = \tilde{H}_{i0} + \tilde{H}_{i1}; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{i0} &= \frac{\Psi_1}{2\mu_1\gamma_1^2} \left[\left(\tilde{P}_{\rho_1} - \frac{\mu_1\gamma_1\dot{\gamma}_1}{\Psi_1} \rho_1 \right)^2 + \frac{\tilde{P}_{\varphi_1}^2}{\rho_1^2} + \frac{\tilde{P}_{\theta_1}^2}{\rho_1^2 \cos^2 \varphi_1} \right] - \\ &\quad - f \frac{m_1 m_0}{\Psi_1 \gamma_1 \rho_1} - \frac{1}{\Psi_1} (b_1 \gamma_1^2 + \mu_1 \dot{\gamma}_1^2) \rho_1^2; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{20} &= \frac{\Psi_2}{2\mu_2\gamma_2^2} \left[\left(\tilde{P}_{\rho_2} - \frac{\mu_2\gamma_2\dot{\gamma}_2}{\Psi_2} \rho_2 \right)^2 + \frac{\tilde{P}_{\varphi_2}^2}{\rho_2^2} + \frac{\tilde{P}_{\theta_2}^2}{\rho_2^2 \cos^2 \varphi_2} \right] - \\ &\quad - f \frac{m_2(m_0 + m_1)}{\Psi_2 \gamma_2 \rho_2} - \frac{1}{\Psi_2} (b_2 \gamma_2^2 + \mu_2 \dot{\gamma}_2^2) \rho_2^2; \\ \tilde{H}_{11} &= -\frac{1}{\Psi_1} R_1, & \tilde{H}_{21} &= -\frac{1}{\Psi_2} R_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Если $R_1 = R_2 = 0$, то уравнения (6)–(9) определяют невозмущенное движение и интегрируются методом Гамильтона-Якоби [5, 8]. Причем постоянные интегрирования

$$\alpha_{1i}, \quad \alpha_{2i}, \quad \alpha_{3i}, \quad \beta_{1i}, \quad \beta_{2i}, \quad \beta_{3i}, \quad i=1,2, \quad (10)$$

есть аналоги соответствующих элементов Якоби в классической задаче двух тел постоянной массы. При $H_{i1} = 0$, ($R_i = 0$) каждая система уравнений (6)–(7) определяет аperiодическое движение по квазиконическому сечению [5]

$$\begin{aligned} r_i &= \gamma_i(t)\rho_i, & \rho_i &= \frac{P_i}{1 + e_i \cos \nu_i}, & \nu_i &= u_i - \omega_i, & i=1,2; \\ p_i &= a_i(1 - e_i^2), & \dot{\rho}_i &= \dot{\rho}_i(t) = \frac{1}{\mu_{i0}\gamma_i^2(t)} \cdot \frac{\tilde{\beta}_i}{\sqrt{p_i}} e_i \sin \nu_i, & \dot{u}_i &= \frac{1}{\mu_{i0}\gamma_i^2(t)} \cdot \frac{\tilde{\beta}_i \sqrt{p_i}}{\rho_i^2}; \\ \tilde{\beta}_1^2 &= f \cdot \mu_1(t_0) m_1(t_0) m_0(t_0), & \tilde{\beta}_2^2 &= f \cdot \mu_2(t_0) m_2(t_0) [m_0(t_0) + m_1(t_0)]; \\ \operatorname{tg} \frac{\nu_i}{2} &= \frac{\sqrt{1+e_i}}{\sqrt{1-e_i}} \operatorname{tg} \frac{E_i}{2}, & e_i &< 1, & E_i - e_i \sin E_i &= M_i; \\ M_i &= n_i [\varphi_i(t) - \varphi_i(\tau_i)], & n_i &= \frac{\tilde{\beta}_i}{\mu_{i0} a_i^{3/2}}, \end{aligned}$$

где $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ — первообразные функции $\gamma_1^{-2}(t)$ и $\gamma_2^{-2}(t)$ соответственно. Величины

$$a_i, \quad e_i, \quad \omega_i, \quad \Omega_i, \quad i_i, \quad \varphi_i(\tau_i) \quad (11)$$

элементы орбиты — аналоги соответствующих кеплеровских элементов и они связаны с выражением (10) по формулам:

$$\begin{aligned} -2\alpha_{1i} &= \frac{\tilde{\beta}_i^2}{\mu_{i0} a_i}, & \alpha_{2i} &= \tilde{\beta}_i \sqrt{p_i}, & \alpha_{3i} &= \tilde{\beta}_i \sqrt{p_i} \cos i_i; \\ \beta_{1i} &= -\varphi_i(\tau_i), & \beta_{2i} &= \omega_i, & \beta_{3i} &= \Omega_i. \end{aligned} \quad (12)$$

Координаты и скорости двух тел с приведенными массами $\mu_1(t), \mu_2(t)$ в системе координат Якоби могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned}x_i &= \gamma_i \rho_i [\cos u_i \cdot \cos \Omega_i - \sin u_i \cdot \sin \Omega_i \cdot \cos i_i]; \\y_i &= \gamma_i \rho_i [\cos u_i \cdot \sin \Omega_i + \sin u_i \cdot \cos \Omega_i \cdot \cos i_i]; \\z_i &= \gamma_i \rho_i [\sin u_i \cdot \sin i_i], \quad r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2;\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \left(\frac{\dot{\gamma}_i}{\gamma_i} + \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} \right) x_i + \gamma_i \rho_i \dot{u}_i \cdot [-\sin u_i \cdot \cos \Omega_i - \cos u_i \cdot \sin \Omega_i \cdot \cos i_i]; \\ \dot{y}_i &= \left(\frac{\dot{\gamma}_i}{\gamma_i} + \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} \right) y_i + \gamma_i \rho_i \dot{u}_i \cdot [-\sin u_i \cdot \sin \Omega_i + \cos u_i \cdot \cos \Omega_i \cdot \cos i_i]; \\ \dot{z}_i &= \left(\frac{\dot{\gamma}_i}{\gamma_i} + \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} \right) z_i + \gamma_i \rho_i \dot{u}_i \cdot [\cos u_i \cdot \sin i_i].\end{aligned}\tag{14}$$

При $R_1 \neq 0$ ($H_{11} \neq 0$), $R_2 \neq 0$ ($H_{12} \neq 0$) уравнения (6)–(9) в системе переменных (10) как уравнения возмущенного имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_{1k} &= \frac{\partial \tilde{R}_1}{\partial \beta_{1k}}, \quad \dot{\beta}_{1k} = -\frac{\partial \tilde{R}_1}{\partial \alpha_{1k}}; \\ \dot{\alpha}_{2k} &= \frac{\partial \tilde{R}_2}{\partial \beta_{2k}}, \quad \dot{\beta}_{2k} = -\frac{\partial \tilde{R}_2}{\partial \alpha_{2k}}, \quad k = 1, 2, 3,\end{aligned}$$

где

$$\tilde{R}_i = \frac{1}{\Psi_i} R_i(t, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \beta_{21}, \beta_{22}, \beta_{23}), \quad i = 1, 2.$$

Тогда можно ввести различные канонические переменные, такие как аналоги канонических элементов Делоне

$$L_i, \quad G_i, \quad H_i, \quad l_i, \quad g_i, \quad h_i, \quad i = 1, 2,$$

посредством формул

$$\begin{aligned}-2\alpha_{1i} &= \frac{\tilde{\beta}_i^4}{\mu_{i0} L_i^2}, \quad \alpha_{2i} = G_i, \quad \alpha_{3i} = H_i; \\ \beta_{1i} &= \frac{l_i}{n_i} - \varphi_i(t), \quad \beta_{2i} = g_i, \quad \beta_{3i} = h_i.\end{aligned}\tag{15}$$

Для наших исследований предпочтительны аналоги второй системы элементов Пуанкаре.

Уравнения возмущенного движения в аналогах второй системы элементов Пуанкаре. Аналоги второй системы элементов Пуанкаре [5, 7]:

$$\Lambda_i, \quad \lambda_i, \quad \xi_i, \quad \eta_i, \quad p_i, \quad q_i, \quad i = 1, 2,\tag{16}$$

определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}\Lambda_i &= L_i, \quad \lambda_i = l_i + g_i + h_i; \\ \xi_i &= \sqrt{2(L_i - G_i)} \cos(g_i + h_i), \quad \eta_i = -\sqrt{2(L_i - G_i)} \sin(g_i + h_i); \\ p_i &= \sqrt{2(G_i - H_i)} \cos h_i, \quad q_i = -\sqrt{2(G_i - H_i)} \sin h_i.\end{aligned}\tag{17}$$

Согласно формулам (12), (15) элементы Пуанкаре связаны с апериодическим движением по квазиконическому сечению (13)–(14). Уравнения возмущенного движения имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{\Lambda}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial \lambda_i}, \quad \dot{\xi}_i = \frac{\partial R_i^*}{\partial \eta_i}, \quad \dot{p}_i = \frac{\partial R_i^*}{\partial q_i}; \\ \dot{\lambda}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial \Lambda_i}, \quad \dot{\eta}_i = -\frac{\partial R_i^*}{\partial \xi_i}, \quad \dot{q}_i = -\frac{\partial R_i^*}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2.\end{aligned}$$

Рассмотрим нерезонансный случай и, осредняя возмущающие функции по λ_i , получим уравнения вековых возмущений

$$\dot{\Lambda}_1 = 0, \quad \dot{\Lambda}_2 = 0;$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i &= \frac{\partial R_{i\text{век}}}{\partial \eta_i}, & \dot{p}_i &= \frac{\partial R_{i\text{век}}}{\partial q_i}; \\ \dot{\eta}_i &= -\frac{\partial R_{i\text{век}}}{\partial \xi_i}, & \dot{q}_i &= -\frac{\partial R_{i\text{век}}}{\partial p_i}, \quad i=1,2, \end{aligned} \quad (18)$$

где $R_{1\text{век}}, R_{2\text{век}}$ — соответствующие вековые части следующих выражений:

$$\begin{aligned} R_1^* &= \frac{1}{\gamma_1^2(t)} \cdot \frac{\tilde{\beta}_1^4}{2\mu_{10}L_1^2} + \frac{1}{\Psi_1} \left[-\frac{b_1}{2} \gamma_1^2 \rho_1^2 + f \left(\frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - \frac{m_2(m_0 + m_1)}{\gamma_2 \rho_2} \right) \right]; \\ R_2^* &= \frac{1}{\gamma_2^2(t)} \cdot \frac{\tilde{\beta}_2^4}{2\mu_{20}L_2^2} + \frac{1}{\Psi_2} \left[-\frac{b_2}{2} \gamma_2^2 \rho_2^2 + f \left(\frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - \frac{m_2(m_0 + m_1)}{\gamma_2 \rho_2} \right) \right] - \\ &\quad - \frac{\mu_2}{\Psi_2} \left[(2\dot{v}_1 \dot{x}_1 + \ddot{v}_1 x_1) x_2 + (2\dot{v}_1 \dot{y}_1 + \ddot{v}_1 y_1) y_2 + (2\dot{v}_1 \dot{z}_1 + \ddot{v}_1 z_1) z_2 \right]. \end{aligned}$$

Разложение возмущающей функции. Для вычисления вековых частей возмущенных функций необходимо вычислить вековую часть следующих величин:

$$\begin{aligned} F_{\text{век}} &= \left[\frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - \frac{m_2(m_0 + m_1)}{\gamma_2 \rho_2} \right]_{\text{век}} = \left[\frac{m_1 m_2}{r_{12}} \right]_{\text{век}}; \\ F_{\rho\text{век}} &= \left[\frac{b_1 \gamma_1^2}{2\Psi_1} \rho_1^2 + \frac{b_2 \gamma_2^2}{2\Psi_2} \rho_2^2 \right]_{\text{век}}; \end{aligned}$$

$$V_{\text{век}} = \frac{\mu_2}{\Psi_2} \left[(2\dot{v}_1 \dot{x}_1 + \ddot{v}_1 x_1) x_2 + (2\dot{v}_1 \dot{y}_1 + \ddot{v}_1 y_1) y_2 + (2\dot{v}_1 \dot{z}_1 + \ddot{v}_1 z_1) z_2 \right]_{\text{век}}.$$

Предположим, что элементы e_i, i_i достаточно малы. Таким образом, можно разложить возмущающую функцию в ряд по малым параметрам e_i, i_i и учитывать только члены второго порядка включительно. В отличие от двух планетных задачи трех тел массы $m_1(t), m_2(t)$ не предполагаются малыми.

В аналогах второй системы элементов Пуанкаре вековые выражения для $R_{1\text{век}}, R_{2\text{век}}$ имеют вид:

$$R_{1\text{век}} = \frac{1}{\gamma_1^2(t)} \cdot \frac{\tilde{\beta}_1^4}{2\mu_{10}\Lambda_1^2} + \frac{1}{\Psi_1} \left[-\frac{b_1}{2} \frac{\gamma_1^2 \mu_0^2}{\Lambda_1^4} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{\Lambda_1} \right) + F_{\text{век}} \right]; \quad (19)$$

$$R_{2\text{век}} = \frac{1}{\gamma_2^2(t)} \cdot \frac{\tilde{\beta}_2^4}{2\mu_{20}\Lambda_2^2} + \frac{1}{\Psi_2} \left[-\frac{b_2}{2} \frac{\gamma_2^2 \mu_0^2}{\Lambda_2^4} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\xi_2^2 + \eta_2^2}{\Lambda_2} \right) + F_{\text{век}} \right] - V_{\text{век}}, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} V_{\text{век}} &= \frac{9\Lambda_1 \Lambda_2 \mu_2 \gamma_2 (p_1 p_2 + q_1 q_2) (2\dot{v}_1 \dot{v}_1 + \gamma_1 \ddot{v}_1)}{16\mu_{10} \mu_{20} \Psi_2 \sqrt{p_1^2 + q_1^2} \sqrt{p_2^2 + q_2^2}} \sqrt{(\eta_1^2 + \xi_1^2)(\eta_2^2 + \xi_2^2)} \sqrt{(4\Lambda_1 - \eta_1^2 - \xi_1^2)(4\Lambda_2 - \eta_2^2 - \xi_2^2)}; \\ F_{\text{век}} &= \left[\frac{m_1 m_2}{r_{12}} \right]_{\text{век}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Вычисление $F_{\text{век}}$ требует много времени и большой работы. Значение формулы (21) получено с помощью системы аналитических вычислений «Mathematica» [9]. Эти выражения очень громоздкие и труднообозримые, следовательно, запишем конечное выражение в виде:

$$F_{\text{век}} = \sum_{i=1}^{534} \Pi_i^*(t) P_i(\varepsilon_k) + \sum_{j=1}^3 \tilde{\Pi}_j(\Lambda_1, \Lambda_2, t),$$

где $\varepsilon_k = \varepsilon_k(\xi_1, \eta_1, p_1, q_1, \xi_2, \eta_2, p_2, q_2)$. Подставляя уравнения (19)–(20) в (18), получим

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \Pi_1(t)\eta_1 + \Pi_2(t)\eta_2; & \dot{\eta}_1 &= \Pi_1(t)\xi_1 + \Pi_2(t)\xi_2; \\ \dot{\xi}_2 &= \Pi_3(t)\eta_1 + [\Pi_4(t) + \Phi_1(t, \varepsilon_k)]\eta_2; & \dot{\eta}_2 &= \Pi_3(t)\xi_1 + [\Pi_4(t) + \Phi_1(t, \varepsilon_k)]\xi_2; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= \Pi_5(t)q_1 + \Pi_6(t)q_2; & \dot{q}_1 &= \Pi_5(t)p_1 + \Pi_6(t)p_2; \\ \dot{p}_2 &= \Pi_8(t)q_1 + [\Pi_7(t) + \Phi_2(t, \varepsilon_k)]q_2; & \dot{q}_2 &= \Pi_8(t)p_1 + [\Pi_7(t) + \Phi_2(t, \varepsilon_k)]p_2; \end{aligned} \quad 23$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_1(t) &= \frac{-24\Lambda_2^4\mu_{10}^4\mu_1\gamma_1\ddot{\gamma}_1 + f\Lambda_1^4m_1m_2\{12k_1\Lambda_1^2[k_1\Lambda_1^2C_0\mu_{20}^2 - \Lambda_2^2\mu_{10}\mu_{20}(B_0 + k_2C_1)] + k_2\Lambda_2^4\mu_{10}^2[3k_2(10C_0 - 3C_2) - 4B_1]\}}{16\Lambda_1^5\Lambda_2^4\mu_{10}^2\Psi_1}, \\ \Pi_2(t) &= -\frac{fk_2m_1m_2\{6(k_1^3\Lambda_1^4\mu_{20}^2 + k_2^2\Lambda_2^4\mu_{10}^2)(6C_0 - C_2) - k_1\Lambda_1^2\Lambda_2^2\mu_{10}\mu_{20}[2k_1(B_2 + 18B_0) + 3k_2C_1(4 + 3k_1)]\}}{32k_1^2\Lambda_1^{\frac{5}{2}}\Lambda_2^{\frac{5}{2}}\mu_{10}\mu_{20}\Psi_1}, \\ \Pi_3(t) &= -\frac{fk_2m_1m_2\{6(k_1^3\Lambda_1^4\mu_{20}^2 + k_2^2\Lambda_2^4\mu_{10}^2)(6C_0 - C_2) - k_1\Lambda_1^2\Lambda_2^2\mu_{10}\mu_{20}[2k_1(B_2 + 18B_0) + 3k_2C_1(4 + 3k_1)]\}}{32k_1^2\Lambda_1^{\frac{5}{2}}\Lambda_2^{\frac{5}{2}}\mu_{10}\mu_{20}\Psi_2}, \\ \Pi_4(t) &= \frac{-24k_1^4\Lambda_1^4\mu_{20}^4\mu_2\gamma_2\ddot{\gamma}_2 + fk_2\Lambda_2^4m_1m_2\{12k_2\Lambda_2^2[k_2\Lambda_2^2C_0\mu_{10}^2 - k_1\Lambda_1^2\mu_{10}\mu_{20}(B_0 + k_2C_1)] - k_1^4\Lambda_1^4\mu_{20}^2[4B_1 + 3k_2(3C_2 - 10C_0)]\}}{16\Lambda_1^5\Lambda_2^4k_1^4\mu_{20}^2\Psi_2}, \\ \Pi_5(t) &= -\frac{fk_2B_1m_1m_2}{8\Lambda_1\Psi_1}, & \Pi_6(t) &= \frac{fk_2B_1m_1m_2}{8\sqrt{\Lambda_1}\sqrt{\Lambda_2}\Psi_1}, & \Pi_7(t) &= -\frac{fk_2B_1m_1m_2}{8\Lambda_2\Psi_2}, & \Pi_8(t) &= \frac{fk_2B_1m_1m_2}{8\sqrt{\Lambda_1}\sqrt{\Lambda_2}\Psi_2}, \\ \Phi_1(t, \varepsilon_k) &= \frac{2(\eta_2^2 - 2\Lambda_2 + \xi_2^2)V_{\text{sec}}}{(\eta_2^2 + \xi_2^2)(4\Lambda_2 - \eta_2^2 - \xi_2^2)}, & \Phi_2(t, \varepsilon_k) &= \frac{(p_1q_2 - q_1p_2)V_{\text{sec}}}{(p_2^2 + q_2^2)(p_1p_2 + q_1q_2)}. \end{aligned}$$

Выражения

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{4\mu_0}{\Lambda_2^2\pi}F(\alpha), & A_1 &= \frac{4\mu_0}{\Lambda_2^2\alpha\pi}[F(\alpha) - E(\alpha)], & A_2 &= \frac{2}{3}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)A_1 - \frac{1}{3}A_0; \\ B_0 &= \frac{(1 + \alpha^2)\alpha}{(1 - \alpha^2)^2}A_0 - \frac{2\alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2}A_1, & B_1 &= \frac{2\alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2}A_0 - \frac{(1 + \alpha^2)\alpha}{(1 - \alpha^2)^2}A_1, & B_2 &= \frac{(1 + \alpha^2)\alpha}{(1 - \alpha^2)^2}A_0 - \frac{2(1 + \alpha^2)^2 - 6\alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2}A_1; \\ C_0 &= \frac{(3 + 10\alpha^2 + 3\alpha^4)\alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2}A_0 - \frac{2\alpha^2(1 + \alpha + \alpha^3)}{(1 - \alpha^2)^2}A_1, & C_1 &= \frac{8\alpha^3(1 + \alpha^2)}{3(1 - \alpha^2)^4}A_0 - \frac{\alpha^2(1 + 14\alpha^2 + \alpha^4)}{3(1 - \alpha^2)^4}A_1; \\ C_2 &= \frac{(1 + 22\alpha^2 + \alpha^4)\alpha^2}{3(1 - \alpha^2)^4}A_0 - \frac{2\alpha^2(1 + 5\alpha^2 + 5\alpha^4 + \alpha^6)}{3(1 - \alpha^2)^4}A_1 - \end{aligned}$$

коэффициенты Лапласа [7]; $F(\alpha)$ — эллиптический интеграл первого рода; $E(\alpha)$ — эллиптический интеграл второго рода, a

$$\alpha = \alpha(t) = \alpha_0 m_{00} \cdot \frac{m_1}{m_0(m_0 + m_1)}; \quad \alpha_0 = \frac{a_{10}}{a_{20}} = \text{const}; \quad m_{00} = m_0(t_0); \quad m_{10} = m_1(t_0);$$

$$k_1 = k_1(t) = m_{00} \cdot \frac{m_1}{m_0(m_0 + m_1)}; \quad k_2 = k_2(t) = \frac{m_1}{m_0} \cdot \frac{m_{00}}{m_{00} + m_{10}}.$$

Используя метод Пикара, получим решения уравнений (22)–(23) в виде:

$$\varepsilon_k(t) = \varepsilon_k(t_0) + \int_{t_0}^t \Pi_i^{**}(t, \varepsilon_k(t_0)) dt, \quad (24)$$

где $\Pi_i^{**}(t, \varepsilon_k)$ — правые части этих уравнений; ε_k — элементы ξ_i, η_i, p_i, q_i и ε_{k0} — их значения в начальный момент времени.

Заключение. Решения (24) позволяют анализировать эволюцию аналогов эксцентриситетов e_1, e_2 , наклонностей i_1, i_2 , аргумента перицентров ω_1, ω_2 и движения долготы восходящих узлов Ω_1, Ω_2 , долготы перицентров π_1, π_2 . Аналитические выражения этих элементов имеют вид:

$$\begin{aligned} e_i^2 &= \frac{\xi_i^2 + \eta_i^2}{\Lambda_i}, & \sin^2 i_i &= \frac{p_i^2 + q_i^2}{\Lambda_i}, & i &= 1, 2; \\ \Omega_i &= -\text{arctg} \frac{q_i}{p_i}, & \pi_i &= -\text{arctg} \frac{\eta_i}{\xi_i}, & \omega_i &= \pi_i - \Omega_i. \end{aligned}$$

Полученные приближенные общие аналитические решения дают возможность сделать аналитический и численный анализ проблемы в абсолютной системе координат. В частности, можно исследовать движение центра масс, который будет реализован в следующей статье.

Работа частично финансирована МОН РК. Грант № 0688/ГФ научно-технических программ и проектов Комитета науки (2012–2014 гг.).

References

- 1 *Omarov T.B.* The dynamics of gravitating systems of Metagalaxy. — Almaty: Nauka, 1975.
- 2 *Omarov T.B.* (Editor). Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy. — New-York: Nova Science Publ. Inc., 2002.
- 3 *Bekov A.A., Omarov T.B.* The theory of Orbits in Non-Stationary Stellar Systems // *Astron. and Astrophys. Transactions.* — 2003. — Vol. 22. — P. 145.
- 4 *Lukyanov L.G.* Dynamical evolution of the orbits of stars in close binary systems with conservative mass exchange // *Astron. Journal.* — 2008. — № 8 (85). — P. 755–768.
- 5 *Minglibayev M.Zh.* Dynamics of nonstationary gravitating systems. — Almaty: Publ. Kazakh National University, 2009. — 209 p.
- 6 *Lukyanov L.G.* The equations of the motion of many-body problem with variable masses // *Astron. Journal.* — Is. 1. — 1983. — № 60. — P. 181–194.
- 7 *Charlier C.L.* Celestial mechanics. — Moscow: Nauka, 1966. — 628 p.
- 8 *Minglibayev M.Zh.* To the canonical perturbation theory in celestial mechanics of the bodies with variable masses // *Proceedings of the Astroph. Inst. AN KazSSR.* — Vol. 50. — Almaty: Gylym, 1992. — P. 71–78.
- 9 *Prokopenya A.N.* Solution of physical problems with the use of MATHEMATICA. — Brest: BSTU Publishing, 2005. — 260 p.

М.Дж.Минглибаев, Г.М.Маемерова

«Mathematica»

Қарастырылып жатқан мәселенің қозғалыс теңдеулері квазиконустық кима бойымен аперидтық қозғалыстың оскулярлы элементтері арқылы алынды. Ұйытқушы функциялардың ғасырлық бөліктері канондық оскулярлы элементтерде «Mathematica» жүйесінің көмегімен есептелді. Бірінші ретті ғасырлық ұйытқулар Пикар тәсілімен алынды.

M.DZh. Minglibayev, G.M.Mayemerova

The solution of non-autonomous differential equations of the three body problem using system «Mathematica»

The motion equations of the investigated problem are obtained in the osculating elements of an aperiodic motion at the quasiconic section. Secular parts of the perturbing functions are calculated in terms of the osculating canonical elements with the use of the system «Mathematica». Full first-order secular perturbations are obtained by the method of Picard.

Б.М.Нурланова¹, Г.Б.Абилдаева²¹Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова;²Карагандинский государственный технический университет (E-mail: b.nurlanova@mail.ru)

В статье рассмотрены принципы построения электронных магазинов, которые позволяют организовать продажу товара в Интернете с использованием web-витрин в сети. Приведено описание наиболее известных типов систем Интернет-торговли, а также принципиальная схема функционирования электронного магазина. Описаны и проанализированы алгоритм реализации информационной системы интернет-торговли, структурные элементы электронного магазина, определены требования для создания данных элементов, а также наиболее перспективные технологии, с помощью которых можно реализовать эти элементы и рассмотреть основные вопросы дизайна.

Ключевые слова: Интернет-магазин, электронная торговля, web-витрина, онлайн, оффлайн, web-сайт, Интернет.

Появление в 90-х гг. XX века электронной коммерции стало возможным благодаря в первую очередь развитию сети Internet. Это, в свою очередь, было причиной возникновения и развития целых отраслей, связанных с обработкой информации. К примеру, деньги в наше время стали в представлении многих людей ассоциироваться не только как бумажки с портретами и памятниками архитектору, а с виртуальными счетами в Интернет- и обычных банках, со всевозможными платежными системами, кредитными картами, картами оплаты, балансами и т.д. Именно благодаря развитию информационного пространства, вовлечению в него миллионов пользователей, организаций и структур стало возможным появление вначале в США и Европе, а затем и в Казахстане и остальном мире Интернет-магазинов [1].

Особенно они востребованы оказались у так называемого среднего класса: людей, имеющих стабильную хорошо оплачиваемую работу и ценящих при этом своё время, удобство и комфорт. Все меньше в наши дни остается людей, готовых тратить время на хождение по реальным магазинам, простаивание в очередях и прочие неудобства. И все больше число тех, кто просто хочет кликнуть мышкой и потом лишь открыть входную дверь, чтобы получить то, что ему необходимо.

Казахстанский Интернет подтягивается за мировым. Проходит повальное увлечение создавать контентные сайты и представительские странички о себе. Утверждается понимание, что Интернет — это еще одна среда для ведения бизнеса, имеющая свою специфику, и весьма многоплановая, но подчиняющаяся общим бизнес-законам. В Интернете ищут партнеров или клиентов, создают решения поддержки собственного бизнеса, автоматизируют операции с партнерами и дилерами, создают и развивают розничные Интернет-магазины.

Интернет развивается довольно стремительно. Быстро растет количество изданий, посвященных сети, что предвещает широкое ее распространение даже в далеких от техники областях. Интернет превращается из большой игрушки для интеллектуалов в полноценный источник всевозможной информации для всех.

Ожидается существенный рост увеличения объемов Интернет-коммерции, особенно в таких областях, как путешествия, розничная торговля, финансы, тематическая реклама, а также в компьютерном секторе.

Термин «электронная торговля» сегодня у всех на устах. Внимание к теме Интернет-торговли обусловлено не только ростом числа онлайн-магазинов (в настоящее время в Казахстане зарегистрировано около 600 Интернет-магазинов), но и интересом пользователей и участников рынка традиционной торговли к новому виду бизнеса, который стал возможен с развитием Интернет-технологий.

Преимущества электронной торговли для покупателя очевидны: отсутствие географической привязанности к торговой точке, магазин доступен 24 часа в сутки, 7 дней в неделю, 365 дней в году, позволяя, будучи в Казахстане, торговать, например, в Париже без открытия магазина на Елисейских Полях.

Когда в нашей стране на смену традиционным «предприятиям торговли» пришли магазины, построенные на принципе свободного доступа к товарам, это вызвало резкий всплеск покупательской активности. Теперь покупателю не надо вставать на цыпочки, чтобы разглядеть нужную вещь, расположенную по ту сторону баррикады-прилавка, — можно спокойно ходить меж полок, разглядывать, сравнивать, выбирать.

Взяв на вооружение правило: «Пусть клиент почувствует себя хозяином положения» и стараясь сделать процесс покупки максимально комфортным, владельцы таких магазинов добились значительного увеличения продаж и, как результат, одержали победу в конкурентной борьбе.

Интернет-магазины, по сути, явились следующим шагом по пути к осуществлению этих принципов. Однако трудности компенсируются возможностью Интернет-магазинов постепенно, шаг за шагом, автоматизировать цепочку от заказа до доставки товара.

Результат не заставит себя долго ждать — покупатель по достоинству оценивает невысокие цены и удобство совершения покупки. Вместе с тем полная автоматизация торговли закладывает надежную основу для дальнейшего успешного развития вашего бизнеса, позволяя опередить старомодных неповоротливых конкурентов.

Факторы, которые могут заставить потенциального покупателя отказаться от услуг традиционного магазина и сделать выбор в пользу онлайн-магазина [2]:

1) более низкие по сравнению с традиционными магазинами цены. Продавцу в сети не приходится платить за аренду торговых площадей и нанимать большое количество обслуживающего персонала. Это позволяет немного снизить цены;

2) экономия времени. Покупателю никуда не надо ехать, он может совершить покупку в любое время суток. Это, несомненно, выгодно и продавцу, ибо это увеличивает возможное количество заказов — доставка товаров в указанное клиентом место и в удобное для него время;

3) удобный, быстрый и результативный поиск нужной вещи.

Как показывают исследования, клиенты Интернет-магазинов обычно ищут что-то достаточно конкретное. При регулярной проверке наличия товара на складе, обновлении цены и наличии на сайте функции поиска шансы привлечь покупателя возрастают в несколько раз;

4) возможность обмена мнениями с другими клиентами данного магазина.

Покупателю интересно пообщаться с людьми, которые ищут примерно то же, что и он. Даже если он не купит вещь здесь и сейчас, полезный совет, полученный на форуме, заставит его возвращаться снова и снова. И тут все зависит от магазина и его работников.

Как было сказано выше, автоматизация позволяет увеличить количество обрабатываемых заказов и уменьшить вероятность ошибок, опять же сокращает количество задействованных работников и позволяет более эффективно управлять предприятием за счет объединения всей информации в единую систему. В итоге — серьезное преимущество перед конкурентами оффлайн.

Для отдельных категорий магазинов это — серьезное преимущество. Там, где в оффлайне все ниши уже заняты и на качественную кампанию требуются сотни тысяч или миллионы долларов, в онлайн, с относительно скромным рекламным бюджетом, можно добиться впечатляющих результатов.

Подводя итоги всему сказанному, следует подчеркнуть еще раз: Интернет-коммерция — это не отдельная и самостоятельная область торговли, это лишь одна из ее форм. Покупатель делает свой выбор в пользу того продавца, который обеспечивает ему более выгодные условия.

Для разработки электронного магазина необходимо проанализировать структурные элементы электронного магазина, определить требования для создания данных элементов, а также выявить наиболее перспективные технологии, с помощью которых можно реализовать эти элементы и рассмотреть основные вопросы дизайна.

Известны три типа систем Интернет-торговли [3].

1. Web-витрина — оформленный web-дизайнерскими средствами прайс-лист торговой компании с возможностью приема заказов. Данный тип системы наилучшим образом подходит для предприятий малого и среднего бизнеса. Web-витрины не имеют интерактивных интерфейсов управления и не связаны напрямую с бизнес-приложениями компании. Обмен данными с web-витриной проводится менеджерами вручную, посредством передачи файлов.

2. Интернет-магазин — полнофункциональная система ведения Интернет-торговли с индивидуальными бизнес-схемами взаимодействия с потребителями. Интернет-магазин содержит, кроме web-витрины, всю необходимую бизнес-логику для управления процессом Интернет-торговли (бэк-офис). Гибкость настроек бэк-офисов Интернет-магазинов и возможность быстрой разработки индивиду-

ального web-дизайна позволяют использовать Интернет-магазин для организации торговли широким спектром товаров и услуг компаниям среднего и крупного бизнеса.

3. Торговая Интернет-система — сложная и мощная система ведения торговых операций через Интернет, в которой полностью интегрированы торговые процессы *offline* и системы *online* бизнеса компании. Достигается это путем интеграции внешнего Интернет-магазина в бизнес-приложения, имеющиеся в компании, с системами складского учета, торгово-учетными и бухгалтерскими системами, а для крупных корпораций — с ERP-системами, т.е. ТИС представляет собой Интернет-магазин, бэк-офис которого полностью (в режиме реального времени) интегрирован в торговый бизнес-процесс компании.

Из перечисленных трех типов систем Интернет-торговли в Казахстане практически нет торговых Интернет-систем, очень мало Интернет-магазинов, зато огромное количество web-витрин.

С точки зрения покупателя, все три типа систем Интернет-торговли выглядят одинаково. Связано это с тем, что покупатель имеет дело с внешним оформлением любой системы, а это всегда web-каталог, система навигации и система оформления заказов. Практически предпочтения покупателя зависят только от удобства использования web-каталога и системы навигации. Но как только покупатель начинает оформлять заказ, он убеждается в преимуществах Интернет-магазинов и ТИС.

Преимущества эти проявляются в том, что виртуальный магазин компенсирует нехватку времени пользователя для посещения обычных магазинов, дает возможность купить сразу несколько товаров в одном месте, а также позволяет покупателю увидеть реальное состояние склада и получить информацию о прохождении своего заказа.

Другими ключевыми факторами, влияющими на решение о приобретении товара в Интернет-магазине, являются:

- доставка товара;
- возможность сразу получить счет с учетом доставки и страховки;
- удобство и комфортность процесса покупки;
- экономическая оправданность;
- безопасность сделки;
- интерес к новому способу приобретения товаров;
- скидки и распродажи, проводящиеся в магазинах.

Следует также отметить, что для мужчин основным фактором является скорость заполнения заказа, а женщины чаще обращают внимание на наличие сопутствующей информации и онлайн-консультаций, помогающих принять правильное решение.

По результатам исследования компании «Interactive Research Group» (IRG) в апреле 2010 г. выяснилось, что пользователи посещают те виртуальные магазины, названия которых им знакомы по рекламе (онлайн- и оффлайн-ой) или по советам знакомых.

Выбрав определенные Интернет-магазины, покупатели не ищут новые, предпочитая возвращаться в уже проверенные места, где им предоставят лучшие цены и хороший сервис. Именно на этих конкурентных преимуществах строят свои планы по привлечению постоянной клиентуры Интернет-торговцы.

С точки зрения продавца, три типа систем Интернет-торговли различаются весьма значительно.

Web-витрина обходится торговым компаниям недорого, но:

- она позволяет организовать торговлю на заказ, наладить же торговлю с реального склада практически невозможно;
- ее использование не уменьшает затраты продавцов на содержание штата и операционные расходы;
- это очень неповоротливое решение с точки зрения управления и недостаточно гибкое с точки зрения организации маркетинговых акций;
- имидж компании, открывшей и поддерживающей простую web-витрину, всегда хуже, чем компании, организовавшей Интернет-торговлю с помощью полнофункционального Интернет-магазина или ТИС. Но самое главное — организация Интернет-торговли с помощью web-витрины оказывается для торговой компании малоэффективным и даже часто нерентабельным делом.

Интернет-магазин существенно более выгоден торговой компании (особенно среднего бизнеса), которая хочет реально управлять всем процессом Интернет-торговли и различными маркетинговыми акциями, торговать и на заказ, и со склада, уменьшить число менеджеров по продажам и т.д.

На создание Интернет-магазина требуется больше разовых затрат по сравнению с витриной, но они будут намного более эффективными, поскольку использование интернет-магазинов существенно рентабельнее по обороту, чем использование web-витрин.

Рассмотрим более подробно схему и преимущества Интернет-магазина [4].

Через сеть Интернет покупатель при помощи браузера заходит на web-сайт Интернет-магазина. Web-сайт содержит электронную витрину, на которой представлены каталог товаров (с возможностью поиска) и необходимые интерфейсные элементы для ввода регистрационной информации, формирования заказа, проведения платежей через Интернет, оформления доставки, получения информации о компании-продавце и *on-line* помощи.

Регистрация покупателя производится либо при оформлении заказа, либо при входе в магазин. После выбора товара от покупателя требуется заполнить форму, в которой указывается, каким образом будет осуществлена оплата и доставка. Для защиты персональной информации взаимодействие должно осуществляться по защищенному каналу. По окончании формирования заказа и регистрации вся собранная информация о покупателе поступает из электронной витрины в торговую систему Интернет-магазина.

В торговой системе осуществляется проверка наличия затребованного товара на складе, инициируется запрос к платежной системе. При отсутствии товара на складе направляется запрос поставщику, а покупателю сообщается о времени задержки.

В том случае, если оплата осуществляется при передаче товара покупателю (курьером или наложенным платежом), необходимо подтверждение факта заказа. Чаще всего это происходит посредством электронной почты или по телефону.

При возможности оплаты через Интернет, подключается платежная система. После сообщения о проведении *on-line* платежа торговой системой формируется заказ для службы доставки.

Торговые системы электронных магазинов на практике редко бывают полностью автоматизированными. Легкость совершения покупки имеет и обратную сторону: увеличение количества ошибок пользователя (особенно при невразумительном дизайне электронной витрины и отсутствии *on-line* помощи) — а это существенные потери для магазина. Поэтому зачастую требуется проверка менеджером каждого отдельного факта заказа. Исключение составляет лишь продажа информационного продукта, которой можно доставить с минимальными издержками непосредственно через Интернет.

Можно утверждать, что основные проблемы электронной коммерции лежат на стыках Интернет-а и реальной деятельности. В обычной торговле покупатель привык к тому, что есть возможность оценить товар визуально, определить его качество и характеристики. В электронной торговле он такой возможности лишен. Максимум, на что он может рассчитывать, это фотография товара и перечисление его характеристик. Зачастую этой информации достаточно, но здесь вступают в действие эмоциональные и психологические факторы. Большинство электронных магазинов имеют проблемы с доставкой товаров, особенно если цена товара невелика. Проблемы также возникают при необходимости оплатить товар в электронном магазине. Тому есть множество причин: недоверие граждан по отношению к банковской системе, в целом, и безналичным платежам, в частности, — как результат нестабильности экономической ситуации в стране; неурегулированность организационных и правовых вопросов электронных платежей; неуверенность в безопасности проведения транзакций через Интернет.

Торговая Интернет-система. В общем случае техническую сторону любого Интернет-магазина можно рассматривать как совокупность электронной витрины и торговой системы.

Электронная витрина предназначена для выполнения следующих задач:

- предоставление интерфейса к базе данных продаваемых товаров (в виде каталога, прайс-листа);
- работа с электронной «корзиной» или «тележкой» покупателя;
- регистрация покупателей;
- оформление заказов с выбором метода оплаты и доставки;
- предоставление *on-line* помощи покупателю;
- сбор маркетинговой информации;

- обеспечение безопасности личной информации покупателей;
- автоматическая передача информации в торговую систему.

Витрина электронного магазина располагается на Интернет-сервере и представляет собой web-сайт с активным содержанием.

Основа витрины электронного магазина — каталог товаров с указанием цен, который может быть структурирован различными способами (по категориям товаров, по производителям), содержать полную информацию о характеристиках каждого товара и даже его изображение.

Выбрав понравившийся товар, пользователь помещает его в «корзину» или «тележку». «Корзина» представляет собой некоторое приближение корзины в реальном универсаме, т.е. список продуктов, которые оплачиваются и доставляются вместе, одним пакетом (что позволяет снизить затраты на доставку). В любой момент до окончательного оформления заказа покупатель может отредактировать содержимое корзины и количество товаров каждого вида.

Процесс регистрации может инициироваться системой до или после выбора товаров из каталога. Оба способа имеют свои преимущества. Ввод регистрационных данных после выбора товаров позволяет покупателю сэкономить время в том случае, если он не принял решения что-либо купить в этом электронном магазине.

Зачастую электронная витрина и является собственно Интернет-магазином, а вторая важная часть, электронная торговая система, просто отсутствует. Все запросы покупателей поступают не в автоматизированную систему обработки заказов, а к менеджерам по продажам.

Далее бизнес-процессы электронного магазина полностью повторяют бизнес-процессы предприятия розничной торговли. Таким образом, Интернет-витрина является инструментом привлечения покупателя, интерфейсом для взаимодействия с ним и проведения маркетинговых мероприятий.

References

- 1 CMS List. cms review. A site about control systems of a site. <http://www.cmslist.ru>
- 2 Source Internet: <http://www.weld.ru/>
- 3 *Schafran E.* Creation of Web pages: the self-instruction manual. — SPb: St. Petersburg, 1999. — 320 p.; il.
- 4 *Nilsen Ya.* Web-design: Jacob Nilsen's book Transfer with English. — SPb: Simvol-Plus, 2001 — 512 c.; col.il.

Б.М.Нұрланова, Г.Б.Әбілдаева

-

Мақалада желіде web-көрнекіліктерді қолдана отырып, Интернетте тауарды сатуды ұйымдастыратын электрондық дүкендерді құру принциптері қарастырылған. Интернет-сауда жүйелерінің аса белгілі типтеріне сипаттама, сонымен қатар электрондық дүкен жұмысының нақты сұлбасы келтірілді. Интернет-сауданың ақпараттық жүйесін жүзеге асыру алгоритмі зерттелген. Электрондық дүкеннің құрылымдық элементтері талданып сипатталған, берілген элементтерді құру үшін талаптар, сонымен қатар осы элементтерді жүзеге асыруға болатындай және дизайнның негізгі сұрақтарын қарастыра алатын болашақта аса қажет технологиялар жайлы айтылған.

B.M.Nurlanova, G.B.Abildaeva

Principles of creation of information systems of internet trade

In article it is considered principles of creation of electronic shops which allow to organize goods sale on the Internet with use of web show-windows in a network. The description of the most known types of systems of Internet trade, and also the schematic diagram of functioning of electronic shop is provided. The algorithm of realization of information system of Internet trade is considered. Structural elements of electronic shop are described and analysed, requirements for creation of these elements are defined, and also the most perspective technologies by means of which it is possible to realize these elements and to consider the main questions of design.

Б.Х.Турметов, М.А.Муратбекова

Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан
(E-mail: turmetovbh@mail.ru)

В статье в классе гармонических и достаточно гладких функций изучены свойства некоторых интегро-дифференциальных операторов, обобщающих операторы Неймана. В качестве применения полученных свойств рассмотрены некоторые краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в шаре. Порядок рассматриваемых граничных операторов превосходит порядок уравнения. Исследуемые задачи обобщают задачу Неймана для уравнения Лапласа и Пуассона на граничные операторы высокого порядка. Доказаны теоремы о существовании и единственности решения исследуемых задач.

Ключевые слова: интегро-дифференциальный оператор, операторы Неймана, гармоническая функция, Пуассон, задача Дирихле, функция Грина.

Введение

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ — n -мерный единичный шар; $\partial\Omega = \{x \in R^n : |x| = 1\}$ — единичная сфера. Пусть далее $u(x)$ — гладкая функция в области Ω ; μ — неотрицательное число и $a = (a_1, \dots, a_n)$ — фиксированное по произволу точка из Ω .

Введем обозначения [1]:

$$\Gamma_{\mu, a} [u](x) = \mu \cdot u(x) + \sum_{k=1}^n (x_k - a_k) \frac{\partial u}{\partial x_k};$$

$$\Gamma_{\mu, a}^{-1} [u](x) = \int_0^1 t^{\mu-1} u(tx + (1-t)a) dt,$$

где $tx + (1-t)a = (tx_1 + (1-t)a_1, \dots, (1-t)a_n)$.

Далее для любого натурального числа ℓ обозначим

$$\Gamma_{\mu, a}^{(\ell)} [u] = \Gamma_{\mu, a_\ell} \left[\Gamma_{\mu, a_{\ell-1}} \dots \left[\Gamma_{\mu, a_1} [u] \right] \dots \right];$$

$$\Gamma_{\mu, a}^{(-\ell)} [u] = \Gamma_{\mu, a_\ell}^{(-1)} \left[\Gamma_{\mu, a_{\ell-1}}^{(-1)} \dots \left[\Gamma_{\mu, a_1}^{(-1)} [u] \right] \dots \right].$$

В специальном случае, когда $a = (0, 0, \dots, 0)$ будем использовать обозначения

$$\Gamma_{\mu, 0} [u] = \Gamma_{\mu} [u], \Gamma_{\mu, 0}^{(\ell)} [u] = \Gamma_{\mu}^{(\ell)} [u],$$

$$\Gamma_{\mu, 0}^{(-1)} [u] = \Gamma_{\mu}^{(-1)} [u], \Gamma_{\mu, 0}^{(-\ell)} [u] = \Gamma_{\mu}^{(-\ell)} [u]$$

и положим $\Gamma_{\mu, a}^0 [u] = u(x)$.

2. Свойства операторов $\Gamma_{\mu, a}^{(\ell)} [u]$ и $\Gamma_{\mu, a}^{(-\ell)} [u]$.

Отметим, что свойства и применения операторов $\Gamma_{\mu, a}^{(\ell)} [u]$ и $\Gamma_{\mu, a}^{(-\ell)} [u]$ в классе гармонических функций в области Ω в случае $\mu > 0$ изучены в работах [1, 2].

В настоящей работе мы будем исследовать свойства и применения этих операторов в случае $\mu = 0$.

Следующее утверждение доказано в работе [1].

Лемма 1. Пусть $\mu > 0$. Если $u(x)$ — гармоническая функция в области Ω , то для любого $x \in \Omega$ справедливы равенства

$$\Gamma_{\mu, \alpha}^{(-\ell)} \left[\Gamma_{\mu, \alpha}^{(\ell)} [u] \right] = \Gamma_{\mu, \alpha}^{(\ell)} \left[\Gamma_{\mu, \alpha}^{(-\ell)} [u] \right] = u(x). \quad (1)$$

Эти равенства показывают, что операторы $\Gamma_{\mu,\alpha}^{(\ell)}$ и $\Gamma_{\mu,\alpha}^{(-\ell)}$ являются взаимно обратными в классе гармонических функций в области Ω .

Легко показать, что эти равенства остаются верными и в случае, когда функция $u(x)$ является достаточно гладкой (необязательно гармонической) в области Ω .

Действительно, докажем, например, первое равенство из (1) в случае $\ell = 1$. Если функция $u(x)$ имеет непрерывные в Ω частные производные первого порядка, то

$$\frac{d}{dt} \left[t^\mu \cdot u(tx + (1-t)a) \right] = \mu t^{\mu-1} u(tx + (1-t)a) + t^\mu \frac{du}{dt}(tx + (1-t)a) = t^{\mu-1} \Gamma_{\mu,a} [u],$$

т.е. верно равенство

$$\frac{d}{dt} \left[t^\mu \cdot u(tx + (1-t)a) \right] = t^{\mu-1} \Gamma_{\mu,a} [u], \mu > 0.$$

В дальнейшем всюду будем считать, что функция $u(x)$ является достаточно гладкой в Ω .

Лемма 2. Для любого $x \in \Omega$ справедливо равенство

$$u(x) = u(a) + \int_0^1 \Gamma_{0,a} [u](tx + (1-t)a) \frac{dt}{t}. \quad (2)$$

Доказательство. Так как

$$t \frac{du}{dt}(tx + (1-t)a) = \Gamma_{0,a} [u](tx + (1-t)a),$$

то

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Gamma_{0,a} [u](tx + (1-t)a) \frac{dt}{t} &= \int_0^1 \frac{du}{dt}(tx + (1-t)a) dt = \\ &= u(tx + (1-t)a) \Big|_{t=0}^{t=1} = u(x) - u(a). \end{aligned}$$

Отсюда получаем равенство (2). Лемма доказана.

Лемма 3. Для любого $x \in \Omega$ справедливо равенство

$$u(x) = u(a) + \frac{(-1)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \int_0^1 \frac{(\ln t)^{\ell-1}}{t} \Gamma_{0,a}^{(\ell)} [u](tx + (1-t)a) dt. \quad (3)$$

Доказательство. Равенство (3) докажем методом математической индукции. При $\ell = 1$ равенство (3) совпадает с (2). Пусть для некоторого $\ell = k$ справедливо равенство (3). Докажем его для $\ell = k + 1$. Для $\ell = k + 1$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(\ln t)^k}{t} \Gamma_{0,a}^{(k+1)} [u](tx + (1-t)a) dt &= \int_0^1 \frac{(\ln t)^k}{t} t \frac{d}{dt} \Gamma_{0,a}^{(k)} [u](tx + (1-t)a) dt = \\ &= \int_0^1 (\ln t)^k \frac{d}{dt} \Gamma_{0,a}^{(k)} [u](tx + (1-t)a) dt = (\ln t)^k \Gamma_{0,a}^{(k)} [u](tx + (1-t)a) \Big|_{t=0}^{t=1} - \\ &\quad - k \int_0^1 \frac{(\ln t)^{k-1}}{t} \Gamma_{0,a}^{(k)} [u](tx + (1-t)a) dt. \end{aligned}$$

Так как $\Gamma_{0,a} [u] = t \frac{du}{dt}$, то первое слагаемое последней суммы обращается в нуль, а для второго слагаемого по предположению индукции получаем

$$-k \int_0^1 \frac{(\ln t)^{k-1}}{t} \Gamma_{0,a}^{(k)} [u](tx + (1-t)a) dt = -k \frac{(k-1)!}{(-1)^{k-1}} [u(x) - u(a)].$$

Значит, при $\ell = k + 1$ имеет место равенство

$$u(x) = u(a) + \frac{(-1)^k}{k!} \Gamma_{0,a}^{(k+1)} [u](tx + (1-t)a) dt.$$

Лемма доказана.

Легко показать, что в случае $\mu = 0$ для оператора $\Gamma_{0,a}^{(-\ell)}$ имеет место представление

$$\Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[u](x) = \frac{(-1)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \int_0^1 \frac{(\ln t)^{\ell-1}}{t} u(tx + (1-t)a) dt.$$

Тогда из леммы 3 вытекает следствие.

Следствие 1. Для любого $x \in \Omega$ справедливо равенство

$$\Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[\Gamma_{0,a}^{(\ell)}[u]](x) = u(x) - u(a). \tag{4}$$

Обратный порядок действия операторов $\Gamma_{0,a}^{(-\ell)}$ и $\Gamma_{0,a}^{(\ell)}$ не всегда возможен, поскольку если $u(a) \neq 0$, то оператор $\Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[u]$ не определен.

Лемма 4. Пусть $u(a) = 0$. Тогда для любого $x \in \Omega$ справедливо равенство

$$\Gamma_{0,a}^{(\ell)}[\Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[u]](x) = u(x). \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $u(a) = 0$. Тогда оператор $\Gamma_{0,a}^{(-\ell)}$ для таких функций определен и

$$\begin{aligned} \Gamma_{0,a}^{(\ell)}[\Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[u]](x) &= \Gamma_{0,a}^{(\ell)}\left[\frac{(-1)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \int_0^1 \frac{(\ln t)^{\ell-1}}{t} u(tx + (1-t)a) dt\right] = \\ &= \frac{(-1)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \int_0^1 \frac{(\ln t)^{\ell-1}}{t} \Gamma_{0,a}^{(\ell)}[u](tx + (1-t)a) dt. \end{aligned}$$

Последнее выражение в силу равенства (3) равно $u(x) - u(a)$. Так как $u(a) = 0$, то отсюда получаем (5). Лемма доказана.

Лемма 5. Для любого $x \in \Omega$ справедливы равенства

$$1) \Delta \Gamma_{0,a}^{(\ell)}[u](x) = \Gamma_{2,a}^{(\ell)}[\Delta u](x); \tag{6}$$

2) если $u(a) = 0$, то

$$\Delta \Gamma_{0,a}^{(-1)}[u](x) = \Gamma_{2,a}^{(-1)}[\Delta u](x). \tag{7}$$

Равенства (6) и (7) доказываются непосредственным подсчетом.

Следствие 2. Для любого $x \in \Omega$ справедливы равенства

$$1) \Delta \Gamma_{0,a}^{(\ell)}[u](x) = \Gamma_{2,a}^{(\ell)}[\Delta u](x);$$

2) если $u(a) = 0$, то

$$\Delta \Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[u] = \Gamma_{2,a}^{(-\ell)}[\Delta u].$$

3. Постановка и решения краевых задач

Переходим к изучению краевых задач с граничным оператором $\Gamma_{0,a}^{(\ell)}$.

Рассмотрим в области Ω следующие задачи:

Задача 1. Найти гармоническую функцию $u(x) \in C^\ell(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, для которой функция $\Gamma_{0,a}^{(\ell)}[u]$ непрерывна в области $\bar{\Omega}$ и на сфере $\partial\Omega$ удовлетворяет условию

$$\Gamma_{0,a}^{(\ell)}[u](x) = f(x), x \in \partial\Omega. \tag{8}$$

Задача 2. Пусть $a = (0, 0, \dots, 0)$. Найти функцию $u(x) \in C^\ell(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую в области Ω уравнению Пуассона

$$-\Delta u(x) = g(x), x \in \Omega,$$

для которой функция $\Gamma_0^{(\ell)}[u](x)$ непрерывна в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяет на сфере $\partial\Omega$ равенству:

$$\Gamma_0^{(\ell)}[u](x) = f(x), x \in \partial\Omega. \tag{9}$$

Заметим, что если $r = |x|$, то при $a = (0, \dots, 0)$ получаем

$$\Gamma_{0,a}[u] \equiv \Gamma_0[u] = \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = r \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Так как $r \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{\partial\Omega}$, то задачи 1 и 2 при $\ell = 1$ представляют собой задачу Неймана.

Пусть $v(x)$ — решение следующей задачи Дирихле:

$$\begin{cases} -\Delta v(x) = g_1(x), x \in \Omega; \\ v(x) = f(x), x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (10)$$

Известно, что для достаточно гладких функций $g_1(x)$ и $f(x)$ решение задачи (10) существует, единственно и представляется в виде:

$$v(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} G(x, y) g_1(y) dy - \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} P(x, y) f(y) dS_y, \quad (11)$$

где $G(x, y)$ — функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа, а $P(x, y)$ — ядро Пуассона.

Причем

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{n-2} \left[|x-y|^{2-n} - \left| x|y| - \frac{y}{|y|} \right|^{2-n} \right], n \geq 3; \\ \ln|x-y| - \ln \left| x|y| - \frac{y}{|y|} \right|, n = 2; \end{cases}$$

$$P(x, y) = \frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}.$$

Основными результатами настоящей работы являются следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $f(x) \in C(\partial\Omega)$. Тогда для разрешимости задачи 1 необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_{\partial\Omega} \frac{1-|a|^2}{|a-y|^n} f(y) dS_y = 0. \quad (12)$$

Если решение задачи 1 существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде

$$u(x) = C + \Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[v](x), \quad (13)$$

где $v(x)$ — решение задачи (10) при $g_1(x) = 0$, удовлетворяющее условию $v(a) = 0$.

Теорема 2. Пусть $\lambda > \ell, \ell = 1, 2, \dots$, λ — нецелое, $g(x) \in C^{\lambda+\ell}(\bar{\Omega})$ и $f(x) \in C^\lambda(\partial\Omega)$. Тогда для разрешимости задачи 2 необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_{\partial\Omega} f(x) dS_x = \int_{\Omega} \Gamma^{(\ell-1)}[g] dx. \quad (14)$$

Если решение задачи 2 существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде

$$u(x) = C + \Gamma_0^{(-\ell)}[v](x), \quad (15)$$

где $v(x)$ — решение задачи (10) с функцией $g_1(x) = \Gamma_2^{(\ell)}[g](x)$, удовлетворяющей условию $v(0) = 0$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $u(x)$ — решение задачи 1 существует. Применим к функции $u(x)$ оператор $\Gamma_{0,a}^{(\ell)}$ и обозначим $v(x) = \Gamma_{0,a}^{(\ell)}[u](x)$. Так как

$$v(x) = \sum_{k=1}^n (x_k - a_k) \frac{\partial}{\partial x_k} \Gamma_{0,a}^{(\ell-1)}[u](x),$$

то очевидно, что $v(a) = 0$. Применяя к функции $v(x) = \Gamma_{0,a}^{(\ell)}[u]$ оператор Δ с учетом равенства (6) и гармоничности функции $u(x)$, получаем $\Delta v(x) = 0, x \in \Omega$.

Далее из граничного условия (8) вытекает

$$v(x)|_{\partial\Omega} = \Gamma_{0,a}^{(\ell)}[u](x)|_{\partial\Omega} = f(x).$$

Таким образом, если $u(x)$ — решение задачи 1, то функция $v(x) = \Gamma_{0,a}^{(\ell)}[u]$ является решением задачи Дирихле (10) при $g_1(x) = 0$, удовлетворяющим дополнительное условие $v(a) = 0$.

Представляя функцию $v(x)$ в виде интеграла Пуассона, получаем

$$0 = v(a) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} \frac{1 - |a|^2}{|a - y|^n} f(y) dS_y.$$

Следовательно, необходимость выполнения условия (12) доказана.

Далее, если $v(a) = 0$, то для функции $v(x)$ можно применить оператор $\Gamma_{0,a}^{(-\ell)}$ и тогда, используя равенство (4), получаем

$$\Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[v] = \Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[\Gamma_{0,a}^{(\ell)}[u]] = u(x) - u(a).$$

Обозначив $u(a) = C$, имеем

$$u(x) = C + \Gamma_0^{(-\ell)}[v](x),$$

т.е. для решения задачи 1 имеет место представление (13). Так как решение задачи Дирихле (10) единственно, то решение задачи 1 единственно с точностью до постоянного слагаемого.

Покажем, что условие (12) является и достаточным для существования решения задачи 1. Пусть $v(x)$ — решение задачи (10) при $g_1(x) = 0$.

Так как при выполнении условия (12) для решения задачи Дирихле (10) выполняется условие $v(a) = 0$, то в классе таких функций оператор $\Gamma_{0,a}^{(-\ell)}$ определен и, следовательно, можно рассмотреть функцию $u(x) = C + \Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[v](x)$.

Покажем, что данная функция удовлетворяет всем условиям задачи 1.

Применяя к функции $u(x) = C + \Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[v](x)$ оператор Δ , получаем

$$\Delta u(x) = \Delta(C) + \Delta\Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[v] = \Gamma_{2,a}^{(-\ell)}[\Delta v] = 0.$$

Далее из равенства (5) следует

$$\Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[u](x) = \Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[C + \Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[v]](x) = v(x)$$

и поэтому

$$\Gamma_{0,a}^{(-\ell)}[u](x)|_{\partial\Omega} = v(x)|_{\partial\Omega} = f(x).$$

Теорема доказана.

Замечание 1. В случае $a = (0, \dots, 0)$ из условия (12) следует

$$\int_{\partial\Omega} f(x) dS_x = 0,$$

т.е. мы получаем условие разрешимости задачи Неймана.

Для доказательства теоремы 2 необходимо изучить некоторые свойства решения задачи Дирихле (10).

Лемма 6. Пусть $v(x)$ — решение задачи (10). Тогда

1) если $v(0) = 0$, то

$$\int_{\partial\Omega} f(y) dS_y = \int_{\Omega} G(0, y) g_1(y) dy; \tag{16}$$

2) если выполняется условие (16), то $v(0) = 0$.

Доказательство. Пусть $v(x)$ — решение задачи (10) и $v(0) = 0$. Тогда, представляя функцию $v(x)$ в виде (11), имеем

$$0 = v(0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} G(x, y) g_1(y) dy - \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} P(0, y) f(y) dS_y.$$

Так как $P(0, y) = 1, y \in \partial\Omega$, то отсюда получаем (16).

Второе утверждение доказывается в обратном порядке. Лемма доказана.

Лемма 7. Если в задаче (10) функция $g_1(x)$ имеет вид $g_1(x) = \Gamma_2[g](x)$, то условие (16) можно переписать в виде:

$$\int_{\partial\Omega} f(y) dS_y = \int_{\Omega} g(y) dy. \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $g_1(x)$ имеет вид:

$$g_1(x) = \Gamma_2[g](x) \equiv \left(r \frac{\partial}{\partial r} + 2 \right) g(x).$$

Используя представление функции $G(x, y)$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} G(0, y) g_1(y) dy &= \frac{1}{n-2} \int_0^1 \rho^{n-1} \int_{|\xi|=1} (\rho^{\alpha-n} - 1) g_1(\rho\xi) d\xi d\rho = \\ &= \frac{1}{n-2} \int_0^1 \int_{|\xi|=1} (\rho - \rho^{n-1}) \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 2 \right) g(\rho\xi) d\rho d\xi = \\ &= \frac{1}{n-2} \left[\int_0^1 \int_{|\xi|=1} (\rho^2 - \rho^n) \frac{\partial}{\partial \rho} g(\rho\xi) d\rho d\xi + 2 \int_0^1 \int_{|\xi|=1} (\rho - \rho^{n-1}) g(\rho\xi) d\rho d\xi \right] = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Изучим I_1 . Для этого интегрируем по частям внутренний интеграл

$$\int_0^1 (\rho^2 - \rho^n) \frac{\partial}{\partial \rho} g(\rho\xi) d\rho = (\rho^2 - \rho^n) g(\rho\xi) \Big|_{\rho=0}^{\rho=1} - \int_0^1 (2\rho - n\rho^{n-1}) g(\rho\xi) d\rho.$$

Значит,

$$I_1 + I_2 = \frac{n-2}{n-2} \left[\int_0^1 \int_{|\xi|=1} \rho^{n-2} g(\rho\xi) d\rho d\xi \right] = \int_{\Omega} g(y) dy.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} G(0, y) g_1(y) dy = \frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} g(y) dy.$$

Отсюда получаем равенство (17). Лемма доказана.

Следствие 3. Если в задаче (10) функция $g_1(x)$ имеет вид $g_1(x) = \Gamma_2^{(\ell)}[g](x)$, то условие (16) можно переписать в виде (14), т.е.

$$\int_{\partial\Omega} f(y) dS_y = \int_{\Omega} \Gamma_2^{(\ell-1)}[g](y) dy.$$

Лемма 8. Если в задаче (10) $g_1(x)$ имеет вид $g_1(x) = \Gamma_2^{(\ell)}[g](x)$ и $g(x) \in C_0^{(\ell-1)}(\Omega)$, то условие (16) можно переписать в виде

$$\int_{\partial\Omega} f(y) dS_y = (2-n)^{\ell-1} \int_{\Omega} g(y) dy. \tag{18}$$

Доказательство. Пусть $g_1(x)$ представляется в виде $g_1(x) = \Gamma_2^{(\ell)}[g](x)$. Используя представление оператора $\Gamma_2^{(\ell)}$, имеем

$$\int_{\Omega} \Gamma_2^{(\ell-1)}[g_2] dy = \int_0^1 \int_{|\xi|=1} \rho^{n-1} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 2 \right) \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 2 \right)^{\ell-2} g d\rho d\xi =$$

$$= \int_{|\xi|=1}^1 \int_0^1 \rho^n \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 2 \right)^{\ell-2} g(\rho, \xi) d\rho d\xi + 2 \int_{|\xi|=1}^1 \int_0^1 \rho^{n-1} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 2 \right)^{\ell-2} g(\rho, \xi) d\rho d\xi \equiv J_1 + J_2.$$

Рассмотрим интеграл

$$J = \int_0^1 \rho^n \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 2 \right)^{\ell-2} g(\rho, \xi) d\rho.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} J &= \rho^n \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 2 \right)^{\ell-2} g(\rho, \xi) \Big|_{\rho=0}^{\rho=1} - n \int_0^1 \rho^{n-1} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 2 \right)^{\ell-2} g(\rho, \xi) d\rho = \\ &= \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 2 \right)^{\ell-2} g(\xi) \Big|_{\rho=0}^{\rho=1} - n \int_0^1 \rho^{n-1} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 2 \right)^{\ell-2} g(\rho) d\rho. \end{aligned}$$

Так как $g(y) \in C_0^{\ell-1}(\Omega)$, то

$$J = -n \int_0^1 \rho^{n-1} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 2 \right)^{\ell-2} g(\rho \xi) d\rho.$$

Тогда

$$J_1 + J_2 = (2-n) \int_0^1 \rho^{n-1} \int_{|\xi|=1} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 2 \right)^{\ell-2} g(\rho, \xi) d\xi d\rho.$$

Повторяя эту процедуру еще $\ell - 2$ - раз, получаем

$$\int_{\Omega} \Gamma_2^{(\ell-2)} [g](y) dy = (2-n)^{\ell-1} \int_{\Omega} g_2(y) dy.$$

Тогда из следствия 3 вытекает равенство (18). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $u(x)$ является решением задачи 2. Применим к этой функции оператор $\Gamma_0^{(\ell)}$ и обозначим $v(x) = \Gamma_0^{(\ell)} [u](x)$. Применяя к этой функции оператор Δ в силу утверждения 1) из следствия 2, получаем $\Delta v(x) = \Gamma_2^{(\ell)} [\Delta u]$.

Далее так как $-\Delta u(x) = g(x)$, то

$$-\Delta v(x) = \Gamma_2^{(\ell)} [g](x) \equiv g_1(x).$$

А силу граничного условия (9) обозначаем как

$$v(x)|_{\partial\Omega} = \Gamma_0^{(\ell)} [u](x)|_{\partial\Omega} = f(x).$$

Кроме того, $\Gamma_0^{(\ell)} [u](0) = 0$ и поэтому $v(0) = 0$. Таким образом, если $u(x)$ — решение задачи 2, то функция $v(x) = \Gamma_0^{(\ell)} [u](x)$ будет удовлетворять условиям задачи (10) с $g_1(x) = \Gamma_2^{(\ell)} [g](x)$ и $v(0) = 0$.

Из леммы 6 и следствия 3 вытекает, что для выполнения условия $v(0) = 0$ необходимо выполнение условия (14).

Покажем, что выполнение этого условия является и достаточным для существования решения задачи 2.

Действительно, если $g(x) \in C^{\lambda+\ell}(\bar{\Omega})$ и $f(x) \in C^{\lambda}(\partial\Omega)$, то $g_1(x) \in C^{\lambda}(\bar{\Omega})$ и решение задачи (10) существует и принадлежит классу $C^{\lambda}(\bar{\Omega})$ [3].

Далее так как выполняется условие (14), то решение задачи (10) удовлетворяет условию $v(0) = 0$. Тогда оператор $\Gamma_0^{(-\ell)}$ в таких функциях определен и поэтому можно рассмотреть функцию $u(x) = C + \Gamma_0^{(-\ell)} [v](x)$. Покажем, что данная функция удовлетворяет всем условиям задачи 2. Действительно, если применим к этой функции оператор Лапласа, то

$$\Delta u(x) = \Delta(C) + \Delta \Gamma_0^{(-\ell)} [v](x) = \Gamma_2^{(-\ell)} [\Delta v](x) = \Gamma_2^{(-\ell)} [\Gamma_2^{(\ell)} [g]] = g(x)$$

и

$$\Gamma_0^{(\ell)}[u](x) = \Gamma_0^{(\ell)}[\Gamma_2^{(-\ell)}[v]](x) = v(x).$$

Отсюда

$$\Gamma_0^{(\ell)}[u](x)|_{\partial\Omega} = v(x)|_{\partial\Omega} = f(x).$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Если в задаче 2 $\ell = 1$, то условие разрешимости задачи имеет вид

$$\int_{\partial\Omega} f(y) dS_y = \int_{\Omega} g(y) dy,$$

т.е. в этом случае мы получаем условие разрешимости классической задачи Неймана.

Замечание 3. Если в задаче 2 функция $g(x)$ принадлежит классу $C_0^{\ell-1}(\Omega)$, то в силу равенства (18) условие разрешимости задачи имеет вид:

$$\int_{\partial\Omega} f(y) dS_y = (2-n)^{\ell-1} \int_{\Omega} g(y) dy.$$

Ранее этот результат был получен в работе [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РК. Грант № 1562 (20.09.2012 г.).

References

- 1 *Bavrin I.I.* Integro-differential operators for harmonic functions in convex domains and applications // *Differential Equations*. — 1988. — Vol. 24. — № 9. — P. 1629–1631.
- 2 *Bavrin I.I.* Operators for the harmonic functions and their applications // *Differential Equations*. — 1985. — Vol. 21. — №1. — P. 9–15.
- 3 *Gilbarg D., Trudinger N.* Elliptic partial differential equations of second order. — Moscow: Nauka, 1989. — 464 p.
- 4 *Karachik V.V.* A problem with higher-order normal derivatives on the boundary for the Poisson equation // *Differential Equation*. — 1996. — Vol. 32. — № 3. — P. 421–424.

Б.Х.Турметов, М.А.Муратбекова

Мақалада гармониялық және жеткілікті тегіс функциялар класында Нейман операторының жалпыламасы болатын кейбір интегродифференциалдық операторлардың қасиеттері зерттелді. Алынған қасиеттердің қолданылуы ретінде шарда Лаплас және Пуассон теңдеулері үшін кейбір шеттік есептер қарастырылды. Бұл шекаралық операторлардың реті теңдеудің ретінен жоғары болады. Зерттелінетін есептер Лаплас және Пуассон теңдеулері үшін Нейман есебінің шекаралық операторлары жоғарғы ретті болған жағдайға жалпыламасы болады. Зерттелінетін есептердің шешімі бар және жалғыз болуы туралы теоремалар дәлелденген.

B.H.Turmetov, M.A.Muratbekova

About operator method of solution of some boundary value problems in a ball

This article deals with the class of harmonic and smooth functions, studying the properties of the integro-differential operators generalizing the Neumann operators. By way of application of the so-obtained properties, we consider some boundary value problems for the Laplace and Poisson equations in the ball. The order of the considered boundary operators exceeds the equation order. The problems summarize the Neumann problem for the Laplace and Poisson equations in boundary operators of the high order. The theorem of existence and uniqueness of solutions of the problem are proved.

АВТОРЛАР ТУРАЛЫ МӘЛІМЕТТЕР СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

- Abildaeva G.B.** — senior teacher of the Chair Information systems, Karaganda State Technical University.
- Akhmanova D.M.** — candidate of physical and mathematical science, docent of the Department «Methods of teaching mathematics and informatics», Karaganda State University named after Y.A.Buketov.
- Asanov A.** — doctor of physical and mathematical science, professor, Head of the Chair «Mathematical Analysis», University «Mamas», Bishkek, Kyrgyz Republic.
- Aymenova K.A.** — magistrant of the first course in the specialty 6M060100—«Mathematics», Kazakh National University named after al-Farabi, Almaty.
- Beysebayev A.K.** — candidate of technical science, docent of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Karaganda State University named after Y.A.Buketov.
- Bogatova E.K.** — magistrant of the second course in the specialty 6M060300—«Mechanics», Karaganda State University named after Y.A.Buketov.
- Esbaev A.N.** — magistrant of the second course in the specialty 6M060100—«Mathematics», Karaganda State University named after Y.A.Buketov.
- Imanberdiev K.B.** — candidate of physical and mathematical science, assistant professor of differential equations and control theory, Kazakh National University named after al-Farabi, Almaty.
- Jenaliyev M.T.** — doctor of physical and mathematical science, Professor, Institute of mathematics MES RK, Almaty.
- Kalimbetov B.** — doctor of physical and mathematical science, associate professor of the Chair of Mathematics, International Kazakh-Turkish University named after Kh.A.Yasawi, Turkestan.
- Karenov R.S.** — Doctor of Economics, the professor, Head of the Chair «Management», Karaganda State University named after Y.A.Buketov.
- Kervenev K.E.** — senior teacher of the Chair «Methods of teaching mathematics and informatics», Karaganda State University named after Y.A.Buketov.
- Kosmakova M.T.** — magistrant of the second course in the specialty 6M010900—«Mathematics», Karaganda State University named after Y.A.Buketov.
- Mamatkulova M.** — senior teacher of the Chair «Mathematical Analysis», Osh State University, Kyrgyz Republic.
- Maymerova G.M.** — PhD student of the third course, Kazakh National University named after al-Farabi, Almaty.
- Minglibayev M.Zh.** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Kazakh National University named after al-Farabi, Astrophysical Institute named after V.G.Fessenkov, Almaty.
- Muratbekova M.A.** — PhD student of the Chair of Mathematics, International Kazakh-Turkish University named after Kh.A.Yasawi, Turkestan.
- Nurlanova B.M.** — senior teacher of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Karaganda State University named after Y.A.Buketov.
- Ospanov R.M.** — magistrant in the specialty 6M070500—«Mathematical and computer modeling», Eurasian National University named after L.N.Gumilev.
- Peters S.N.** — senior teacher of the Chair of Mathematical Analysis and Differential Equations, Karaganda State University named after Y.A.Buketov.

Sadanova B.M. — senior teacher of the Chair of Computer facilities and Software, Karaganda State Technical University.

Toygonbaeva A. — senior teacher of the Chair «Mathematical Analysis», Osh State University, Kyrgyz Republic.

Turmetov B.Kh. — doctor of physical and mathematical science, professor of the Chair of Mathematics, International Kazakh-Turkish University named after Kh.A.Yasawi, Turkestan.

Ulbrikht O.I. — teacher of the Chair of algebra, mathematical logic and geometry named after prof. T.G.Mustafin, Karaganda State University named after Y.A.Buketov.

Yeshkeyev A.R. — professor of the Chair of algebra, mathematical logic and geometry named after prof. T.G. Mustafin doctor of physical and mathematical science, Karaganda state university name of Y.A.Buketov.

Zaikina T.V. — senior teacher of the Chair «Methods of teaching mathematics and informatics», Karaganda State University named after Y.A.Buketov.

Zhanbolova A.K. — magistrant of the first course in the specialty 6M060100—«Mathematics», Karaganda State University named after Y.A.Buketov.

Zhumagulova S.K. — senior teacher of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Karaganda State University named after Y.A.Buketov.

| | | |
|--|---|----|
| <i>Ақыш А.Ш.</i> Навье-Стокс теңдеулері үшін максимум принципі..... | 2 | 4 |
| <i>Арендаренко Л.С.</i> Интегралдау шектері айнаымалы болатын бір кластағы интегралдық операторлардың шенелетінділігі туралы..... | 2 | 21 |
| <i>Асанов А., Калимбетов Б., Тойгонбаева А.</i> Бірінші ретті Фредгольм-Стилтьес сызықтық интегралдық теңдеуінің бір класы туралы..... | 4 | 3 |
| <i>Ахажанов С.Б.</i> Серпімділі негіздегі штампты есептеу..... | 3 | 3 |
| <i>Ахманова Д.М., Космакова М.Т.</i> Бір айнаымалы және басқа шексіз интегралдау шегі бар бір интегралды теңдеудің шешіміне..... | 4 | 7 |
| <i>Ахманова Д.М., Космакова М.Т., Рамазанов М.Ы.</i> Екінші текті Вольтерра сингулярлы интегралдық теңдеуінің шешімі..... | 2 | 28 |
| <i>Әбілдин С.К., Әбдірахманов Н.Ф., Москаленко Н.А.</i> Ортақ және локалды ақаулары бар конструкциялардың құрыш элементтерін автоматтандырылған есептеудегі алгоритмді құру..... | 1 | 3 |
| <i>Әлимағамбетова А.З., Бесжанова А.Т.</i> Математикалық пәндерді оқытуда мультимедиалық технологияларды қолдану мәселелері..... | 1 | 7 |
| <i>Әлібиев Д.Б., Қушекова Г.Ж., Қажикенова А.Ш.</i> Сұйықтың ағынының жоғарғы толқындары есебінің кейбір ерекшеліктері..... | 2 | 16 |
| <i>Әшірбаев Н.К.</i> Шекаралық шарттағы үзілістің тік төртбұрыштағы толқындық өріске әсерін сандық зерттеу..... | 3 | 7 |
| <i>Базикова К.М., Попова Н.В.</i> Кәсіби даярлау үрдісінде 5В060200 – «Информатика» мамандығы бойынша оқитын студенттердің зерттеушілік қызметі..... | 2 | 34 |
| <i>Бейсебаев А.Қ., Богатова Е.К., Заикина Т.В.</i> Шектік жағдайы бойынша рамалық конструкцияны беріктілікке есептеу..... | 4 | 11 |
| <i>Бейсебаев А.Қ., Телгузинова Р.Ш., Заикина Т.В.</i> Ванттық-арқалықтың біріктірілген конструкциясының синтезі..... | 3 | 11 |
| Бобровский В.П. , <i>Бухарицына Л.В.</i> Фибоначчидің k ретті жалпыланған сандары..... | 2 | 41 |
| <i>Григорьева Т.С., Заикина Т.В.</i> Математиканы оқытуда алмаспайтын есептер әдісін қолдану..... | 1 | 11 |
| <i>Григорьева Т.С., Заикина Т.В.</i> Планиметриядағы оңтайландыру есептерін шешуде кейбір геометриялық түрлендірулерді қолдану..... | 3 | 17 |
| <i>Есбаев А.Н., Жанболова А.К., Петерс С.Н.</i> Әлсіз жүктелген параболалық теңдеу үшін берілген бірінші шеттік есеп туралы..... | 4 | 31 |
| <i>Ешкеев А.Р.</i> Δ -йонсондық теориялар..... | 4 | 37 |
| <i>Ешкеев А.Р., Оспанов Р.М., Ульбрихт О.И.</i> Δ -йонсондық теориялардың экзистенциалды формулалардың торы..... | 4 | 41 |
| <i>Ешкеев А.Р., Пальчунов Д.Е.</i> Заттық аймақтардағы аналитикалық йонсондық теориялардың кейбір синтаксистік және семантикалық қасиеттерінің формализациясы..... | 1 | 19 |
| <i>Жиенәлиев М.Т., Иманбердиев Қ.Б., Айменова Қ.Ә.</i> Бигармоникалық теңдеу үшін корректі емес есепті шешудің тиімділік әдісі..... | 4 | 21 |
| <i>Жұмабаева А.А.</i> Өзгертілген үйірткі операторының бір қасиеті туралы..... | 2 | 51 |
| <i>Жұмағұлова С.К., Әбілдаева Г.Б.</i> Кәсіпорындарда еңбекті қорғау жүйесін ақпараттық қамтамасыздандыру бағдарламасы және алгоритмі..... | 1 | 32 |
| <i>Жұмағұлова С.К., Саданова Б.М.</i> Құжаттарды локалды коллекцияларда іздеу құралдарды зерттеу және құру..... | 4 | 50 |
| <i>Кан О.А., Жұмағұлова С.К.</i> Автоматтандырылған оқыту жүйелерін құрудың әдістемелік аспектілері..... | 3 | 21 |
| <i>Каренов Р.С.</i> Басқару есептерінде имитациялық модельдеуді қолданудың ілімдік және әдістемелік негіздері..... | 4 | 60 |
| <i>Каренов Р.С.</i> Есептердің экономикалық-математикалық модельдердің және оларды шешу тәсілдерінің ғылыми жіктелуі..... | 2 | 55 |

| | | |
|--|---|-----|
| <i>Каренов Р.С.</i> Кен-экономикалық зерттеулерде сызықтық бағдарламалау тәсілін қолданудың ілімдік және әдістемелік негіздері | 3 | 42 |
| <i>Каренов Р.С.</i> Көп кадамды экономикалық есептерді зерттеу және оларды шешу тәсілдерін жасау динамикалық бағдарламалау аясы ретінде..... | 1 | 51 |
| <i>Каренов Р.С.</i> Сызықтық бағдарламалау оңтайлылықты іздестіру бойынша техникалық-экономикалық міндеттерді шешу үшін операцияларды зерттеудің ерекше тәсілі ретінде | 3 | 27 |
| <i>Каренов Р.С.</i> Экономикалық зерттеулерде жұп корреляция тәсілдерін қолдану әдістемесі..... | 4 | 75 |
| <i>Каренов Р.С.</i> Экономикалық зерттеулерде рангтік корреляцияны және баламалы белгілер корреляциясын қолдану мәселелері | 1 | 37 |
| <i>Каренов Р.С.</i> Экономикалық-математикалық модельдеу және операциялық зерттеу кезеңдерінің тізбесі және мазмұны | 2 | 69 |
| <i>Кервенов Қ.Е.</i> Математиканы оқытуда дидактикалық ойындарды қолдану мәселесі жайында..... | 4 | 89 |
| <i>Космакова М.Т., Мизамбаева М.Т.</i> Туылатын облыстағы жылуөткізгіштік теңдеу үшін біртекті шеттік есеп | 1 | 61 |
| <i>Құсайынова Л.Қ., Оспанова А.Б.</i> Сингуляр Коши есебінің айырымдық схемасының жинақталуы жайында..... | 2 | 79 |
| <i>Калимбетов Б., Маматқұлова М.</i> Тұрақтылық ауысқан жағдайдағы сингулярлы-ауытқулы дифференциалдық теңдеулердің шешімдерінің асимптотикалық тәртіптері..... | 4 | 55 |
| <i>Минглибаев М.Дж., Мамерова Г.М.</i> Үш дене мәселесінің автономды емес дифференциалдық теңдеулерін «Mathematica» жүйесімен шешу..... | 4 | 95 |
| <i>Мұратбеков М.Б., Шырақбаев А.Б., Баулыбаева Б.А.</i> Классикалық емес типті сызықтық емес теңдеулердің шешімдерімен байланысқан шешімдердің бар болуы және жиындардың көлденеңін бағалау..... | 2 | 84 |
| <i>Нұрланова Б.М., Әбілдаева Г.Б.</i> Интернет-сауда ақпараттық жүйелерін құру принциптері..... | 4 | 103 |
| <i>Омаров А.М., Есендаулетова Ж.Т.</i> Мектеп курсындағы математиканың логикалық есептерін графтар теориясымен есептеу | 3 | 56 |
| <i>Орумбаева Н.Т., Сабитбекова Г.</i> Аралас туындылы квазисызықты гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін периодты шеттік есептің шешімділігі туралы | 1 | 67 |
| <i>Оспанова А.Б.</i> Сингуляр Коши есебінің айырымдық схемасының орнықтылығы жайында..... | 2 | 90 |
| <i>Самойлова И.А.</i> «Механика» мамандығының студенттерін оқыту барысында «ЛИРА» бағдарламалық кешенін қолдану..... | 3 | 62 |
| <i>Сланбекова А.Е., Фазылова Л.С.</i> Көп айнымалы функциялар үшін минимумдау әдістерді программалау | 3 | 70 |
| <i>Сыздықова Н.К., Бейсенова Д.Р.</i> MS Excel бағдарламасын қолданбалы есептерді шешуге қолдану... | 3 | 79 |
| <i>Ташенова Ж.М., Нұрлыбаева Э.Н., Құдайқұлов А.Қ.</i> Әр түрлі жылу ағындары мен жылу алмасу әсеріндегі жартылай изоляцияланған шекті ұзындықтағы стерженнің (өзектің немесе өзекшенің, білектің) термо-механикалық күйін зерттеу | 2 | 95 |
| <i>Глеуханова Н.Т., Жұмабаева А.А.</i> Анизотропты Лоренц кеңістігіндегі көбейткіштер мәселесі туралы | 2 | 102 |
| <i>Төрбек Б.Т.</i> Лаплас теңдеуі үшін шекаралық шартында Капуто мағынасындағы бөлшек ретті оператор қатысқан бейлокалды есептің шешімділігі | 1 | 78 |
| <i>Тұрметов Б.Х., Байметова Н.З.</i> Адамар-Маршо түріндегі оператор қатысқан кейбір шеттік есептердің шешімділігі туралы..... | 3 | 89 |
| <i>Тұрметов Б.Х., Қуанышбаева А.У.</i> Бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулерді шешудің бір әдісі туралы | 3 | 99 |
| <i>Тұрметов Б.Х., Мұратбекова М.А.</i> Шарда кейбір шеттік есептерді шешудің операторлық әдісі туралы..... | 4 | 108 |
| Тұрсынов К.А., Ахажанов С.Б., Мәкенова Л.С. Серпімді-илемділік кезеңіндегі арқалықты есептеу .. | 3 | 107 |
| <i>Түсіпов Ж.А., Жетпісов Қ.Ж., Сәтекбаева А.Ж., Жалмағамбетова Л.М.</i> Графтағы жиындар үйірінің анықталғандығы | 3 | 84 |
| <i>Халманов Х.Ж., Валиева Д.Г.</i> Бір типті қауіпті өндірістік объектілерде өнеркәсіп қауіпсіздігінің деңгейін бағалауда иерархиялық талдау әдісін қолдану..... | 2 | 109 |
| <i>Яушев Р.А., Микляева Т.В.</i> Қазақстан темір жолдарының мүмкіндігін бағалауда қолданылатын айқын емес логика теориясы әдісі..... | 3 | 112 |

| | № | с. |
|---|---|----|
| <i>Akysh A.Sh.</i> The maximum principle of the Navier-Stokes equations..... | 2 | 4 |
| <i>Абильдин С.К., Абдрахманов Н.Г., Москаленко Н.А.</i> Разработка алгоритма автоматизированного расчета стальных элементов конструкций, имеющих общие и локальные повреждения..... | 1 | 3 |
| <i>Алибиев Д.Б., Кушекова Г.Ж., Кажикенова А.Ш.</i> Некоторые особенности постановки задач течения жидкости с поверхностными гравитационными волнами..... | 2 | 16 |
| <i>Алимагамбетова А.З., Бесжанова А.Т.</i> Вопросы использования мультимедийных технологий при обучении математическим дисциплинам..... | 1 | 7 |
| <i>Арендаренко Л.С.</i> Об ограниченности одного класса интегральных операторов с переменными пределами интегрирования..... | 2 | 21 |
| <i>Асанов А., Калимбетов Б., Тойгонбаева А.</i> Об одном классе линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стилтьеса первого рода..... | 4 | 3 |
| <i>Ахажанов С.Б.</i> Расчет штампа на упругом основании..... | 3 | 3 |
| <i>Ахманова Д.М., Космакова М.Т.</i> К решению одного интегрального уравнения с одним переменным и другим бесконечными пределами интегрирования..... | 4 | 7 |
| <i>Ахманова Д.М., Космакова М.Т., Рамазанов М.И.</i> Решение одного сингулярного интегрального уравнения Вольтерра второго рода..... | 2 | 28 |
| <i>Аширбаев Н.К.</i> Численное исследование влияния разрыва в граничных условиях на волновое поле в прямоугольнике..... | 3 | 7 |
| <i>Базикова К.М., Попова Н.В.</i> Исследовательская деятельность студентов специальности 5В060200 – «Информатика» в процессе профессиональной подготовки..... | 2 | 34 |
| <i>Бейсебаев А.К., Богатова Е.К., Заикина Т.В.</i> Прочностной расчет рамной конструкции по предельному состоянию..... | 4 | 11 |
| <i>Бейсебаев А.К., Тельгузинова Р.Ш., Заикина Т.В.</i> Синтез вантово-балочной комбинированной конструкции..... | 3 | 11 |
| Бобровский В.П. , <i>Бухарицына Л.В.</i> Обобщённые числа Фибоначчи порядка k | 2 | 41 |
| <i>Григорьева Т.С., Заикина Т.В.</i> Использование некоторых геометрических преобразований при решении задач оптимизации в планиметрии..... | 3 | 17 |
| <i>Григорьева Т.С., Заикина Т.В.</i> Метод сквозных задач в обучении математике..... | 1 | 11 |
| <i>Дженалиев М.Т., Иманбердиев К.Б., Айменова К.А.</i> Оптимизационный метод решения некорректной задачи для бигармонического уравнения..... | 4 | 21 |
| <i>Джумабаева А.А.</i> Об одном свойстве «трансформированного» оператора свертки..... | 2 | 51 |
| <i>Есбаев А.Н., Жанболова А.К., Петерс С.Н.</i> О первой краевой задаче для слабо-нагруженного параболического уравнения..... | 4 | 31 |
| <i>Ешкеев А.Р.</i> Δ -йонсоновские теории..... | 4 | 37 |
| <i>Ешкеев А.Р., Оспанов Р.М., Ульбрихт О.И.</i> Решетки экзистенциальных формул Δ -йонсоновской теории..... | 4 | 41 |
| <i>Ешкеев А.Р., Пальчунов Д.Е.</i> Формализации некоторых синтаксических и семантических свойств аналитических йонсоновских теорий предметных областей..... | 1 | 19 |
| <i>Жумагулова С.К., Абилдаева Г.Б.</i> Алгоритм и программа информационного обеспечения системы охраны труда на предприятии..... | 1 | 32 |
| <i>Жумагулова С.К., Саданова Б.М.</i> Исследование и разработка средств поиска в локальных коллекциях документов..... | 4 | 50 |
| <i>Кан О.А., Жумагулова С.К.</i> Методические аспекты создания автоматизированных обучающих систем..... | 3 | 21 |
| <i>Каренов Р.С.</i> Изучение многошаговых экономических задач и разработка методов их решения как предмет динамического программирования..... | 1 | 51 |
| <i>Каренов Р.С.</i> Линейное программирование как специфический метод исследования операций для решения технико-экономических задач на отыскание оптимума..... | 3 | 27 |
| <i>Каренов Р.С.</i> Методика применения способов парной корреляции в экономических исследованиях..... | 4 | 60 |

| | | |
|---|---|-----|
| <i>Каренов Р.С.</i> Научная классификация задач, экономико-математических моделей и методов их решения | 2 | 55 |
| <i>Каренов Р.С.</i> Последовательность и содержание этапов экономико-математического моделирования и операционного исследования | 2 | 69 |
| <i>Каренов Р.С.</i> Проблемы использования ранговой корреляции и корреляции альтернативных признаков в экономических исследованиях | 1 | 37 |
| <i>Каренов Р.С.</i> Теоретические и методические основы применения имитационного моделирования в задачах управления | 4 | 75 |
| <i>Каренов Р.С.</i> Теоретические и методические основы применения метода линейного программирования в горно-экономических исследованиях | 3 | 42 |
| <i>Кервенов К.Е.</i> О вопросах применения дидактических игр при изучении математики | 4 | 89 |
| <i>Космакова М.Т., Мизамбаева М.Т.</i> Об однородной краевой задаче для уравнения теплопроводности в вырождающейся области | 1 | 61 |
| <i>Кусаинова Л.К., Оспанова А.Б.</i> О сходимости одной разностной схемы для сингулярной задачи Коши | 2 | 79 |
| <i>Калимбетов Б., Маматкулова М.</i> Асимптотические поведения решений сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости | 4 | 55 |
| <i>Минглибаев М.Дж., Магмерова Г.М.</i> Решение неавтономных дифференциальных уравнений задачи трех тел с помощью системы «Mathematica» | 4 | 95 |
| <i>Муратбеков М.Б., Шыракбаев А.Б., Баулыбаева Б.А.</i> Существование решений и оценки поперечников множеств, связанных с решениями нелинейных уравнений неклассического типа | 2 | 84 |
| <i>Нурланова Б.М., Абилдаева Г.Б.</i> Принципы построения информационных систем Интернет-торговли | 4 | 103 |
| <i>Омаров А.М., Есендаулетова Ж.Т.</i> Решение логических задач в школьном курсе математики с помощью теории графов | 3 | 56 |
| <i>Орумбаева Н.Т., Сабитбекова Г.</i> О разрешимости периодической краевой задачи для системы квазилинейных гиперболических уравнений со смешанной производной | 1 | 67 |
| <i>Оспанова А.Б.</i> Об устойчивости одной приближенной схемы для сингулярной задачи Коши ... | 2 | 90 |
| <i>Самойлова И.А.</i> Использование программного комплекса ЛИРА при обучении студентов специальности «Механика» | 3 | 62 |
| <i>Сланбекова А.Е., Фазылова Л.С.</i> Программирование методов минимизации для многомерных функций | 3 | 70 |
| <i>Сыздыкова Н.К., Бейсенова Д.Р.</i> Применение программы MS Excel для решения прикладных задач | 3 | 79 |
| <i>Ташенова Ж.М., Нурлыбаева Э.Н., Кудайкулов А.К.</i> Исследование термо-механического состояния частично термоизолированного стержня при воздействии различных тепловых потоков и теплообмена | 2 | 95 |
| <i>Глеуханова Н.Т., Джумабаева А.А.</i> О проблеме множителей в анизотропных пространствах Лоренца | 2 | 102 |
| <i>Торбек Б.Т.</i> О разрешимости одной нелокальной задачи для уравнения Лапласа с граничным оператором дробного порядка в смысле Капуто | 1 | 78 |
| <i>Tussupov J.A., Jetpisov K.J., Satekbaeva A.J., Jalmagambetova L.M.</i> Definability a family of sets in the graph | 3 | 84 |
| <i>Турметов Б.Х., Байметова Н.З.</i> О разрешимости некоторых краевых задач с оператором типа Адамара-Маршо | 3 | 89 |
| <i>Турметов Б.Х., Куанишбаева А.У.</i> Об одном методе решения дифференциальных уравнений дробного порядка | 3 | 99 |
| <i>Турметов Б.Х., Муратбекова М.А.</i> Об операторном методе решения некоторых краевых задач в шаре | 4 | 108 |
| Турсынов К.А., Ахажанов С.Б., Макенова Л.С. Расчет балки на упруго-пластической стадии | 3 | 107 |
| <i>Халманов Х.Ж., Валиева Д.Г.</i> Применение метода анализа иерархий к оценке уровня промышленной безопасности на однотипных опасных объектах | 2 | 109 |
| <i>Яушев Р.А., Микляева Т.В.</i> Методы теории нечеткой логики при оценке возможностей железных дорог Казахстана | 3 | 112 |