УДК 517.956.6

Г.Дилдабек[1,2], А.А.Тенгаева[1,3]

[1]*Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы;*
[2]*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы;*
[3]*Казахский национальный аграрный университет, Алматы*
(E-mail: dildabek.g@gmail.com)

Существование собственного значения задачи со смещением для уравнения параболо-гиперболического типа

В статье рассмотрена спектральная задача для оператора параболо-гиперболического типа I рода с неклассическими краевыми условиями. Задача представлена в стандартной области. Параболическая часть области — прямоугольник, а гиперболическая часть области совпадает с характеристическим треугольником. Проведено исследование задачи с локальным краевым условием в области параболичности и с краевым условием со смещением в области гиперболичности. Доказана сильная разрешимость указанной задачи. Основной целью работы является исследование спектральных свойств задачи. Доказано существование собственных значений задачи.

Ключевые слова: спектральная задача, уравнение параболо-гиперболического типа, краевое условие со смещением.

Введение

Теория уравнений смешанного типа является одним из центральных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Это связано с выявлением множества прикладных задач, математическое моделирование которых обусловливает изучение различных типов уравнений в рассматриваемой области, изменения независимых переменных.

Впервые на важность изучения уравнений смешанного типа указал С.А. Чаплыгин в 1902 г. в своей работе «О газовых струях». Начало же исследований краевых задач для уравнений смешанного типа было положено в 20–30-е гг. прошлого века работами Ф.Трикоми, С.Геллерстедта. Новым толчком в развитии этой теории послужили работы М.А.Лаврентьева, А.В.Бицадзе, Ф.И.Франкля, К.И.Бабенко, где, наряду с теоретическими исследованиями ряда существенных вопросов этой теории, была указана и их практическая значимость. В большинстве своем это были работы, посвященные теоретическим и прикладным аспектам уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа. Исследование уравнений параболо-гиперболического типа получило бурное развитие сравнительно недавно. Особый интерес эти задачи представляют в связи с их приложением к различным задачам механики и физики.

Проблемам теории краевых задач для уравнений смешанного типа посвящены многочисленные работы авторов из ближнего и дальнего зарубежья. Достаточно полный обзор полученных результатов содержится в книгах А.В.Бицадзе, Л.Берса, М.М.Смирнова, М.С. Салахитдинова, Т.Д.Джураева, Т.Ш.Кальменова. Существенный вклад в развитие теории краевых задач для параболо-гиперболических уравнений внесли исследования М.С.Салахитдинова, Т.Д.Джураева, А.М.Нахушева, А.С.Бердышева, М.А.Садыбекова.

В отличие от теории разрешимости, спектральные вопросы задач для уравнений смешанного типа являются мало изученными. Здесь необходимо отметить исследования, которые внесли существенный вклад в этом направлении, это работы Т.Ш.Кальменова [1, 2], Е.И.Моисеева [3], С.М.Пономарева [4]. Основная библиография по этим вопросам приведена в монографии Е.И.Моисеева [5]. В этих работах исследуются существование и расположение собственных значений у задач для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа, построение и полнота системы собственных функций задачи.

Спектральные вопросы для уравнения параболо-гиперболического типа изучены сравнительно меньше. Основная библиография по этим вопросам приведена в недавно вышедшей монографии А.С. Бердышева [6].

Постановка задачи

Пусть $\Omega \in R^2$ — конечная область, ограниченная при $y > 0$ отрезками AA_0, A_0B_0, B_0B, $A = (0,0)$, $A_0 = (0,1)$, $B_0 = (1,1)$, $B = (1,0)$, а при $y < 0$ — характеристиками $AC:\ x + y = 0$ и $BC:\ x - y = 1$ уравнения смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = \left\{ \begin{array}{c} u_x - u_{yy}, y > 0 \\ \\ u_{xx} - u_{yy}, y < 0 \end{array} \right\} = f(x,y). \tag{1}$$

Через $W_2^l(\Omega) = H^l(\Omega)$ обозначим пространство Соболева со скалярным произведением $(\cdot,\ \cdot)_l$ и нормой $\|\cdot\|_l$, $W_2^0(\Omega) = L_2(\Omega)$; $\Omega_1 = \Omega \bigcap \{y > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \bigcap \{y < 0\}$.

В Ω рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу, являющуюся обобщением аналога задачи Трикоми для параболо-гиперболического уравнения (1).

Задача S. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{AA_0 \cup A_0B_0} = 0; \tag{2}$$

$$\alpha u\left(\theta_0\left(t\right)\right) = \beta u\left(\theta_1\left(t\right)\right), \quad 0 \le t \le 1, \tag{3}$$

где $\theta_0\left(t\right) = \left(\dfrac{t}{2}, -\dfrac{t}{2}\right)$; $\theta_1\left(t\right) = \left(\dfrac{t+1}{2}, \dfrac{t-1}{2}\right)$.

Отметим, что при $\beta = 0$ задача S совпадает с задачей Трикоми, а при $\alpha = 0$ — с задачей Трикоми с данными на противоположной характеристике.

Сильная разрешимость частных случаев задачи при $\alpha = 0$ и при $\beta = 0$ исследована в работе М.А.Садыбекова, Г.Д.Тойжановой [7]. Показано, что при $\beta = 0$ задача является вольтерровой, а при $\alpha = 0$ у задачи существует собственное значение. Случай же произвольных α и β оставался до сих пор не исследованным. Исследованию задачи именно в этом случае и посвящена настоящая работа.

О сильной разрешимости задачи

Исследование задачи в операторном виде тесно связано с использованием обобщенных решений задачи. Дадим следующее определение.

Определение. Функцию $u \in L_2(\Omega)$ называют сильным решением задачи, если существует последовательность функций $\{u_n\}$, $u_n \in W = C^1\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^{1,2}_{x,y}\left(\overline{\Omega}_1\right) \cap C^2\left(\overline{\Omega}_2\right)$, удовлетворяющих краевым условиям задачи, такая, что последовательности u_n и Lu_n сходятся в пространстве $L_2(\Omega)$, соответственно, к функциям u и f.

Теорема 1. Решение задачи S единственно тогда и только тогда, когда $\alpha + \beta \neq 0$. При выполнении этого условия для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение $u(x,y)$ задачи S. Это решение принадлежит классу $H^1(\Omega) \cap H^{1,2}_{x,y}(\Omega_1) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$, удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_1 \le c\ \|f\|_0 \tag{4}$$

и представляется в виде

$$u(x,y) = \iint_{\Omega} K(x,y;;x_1,y_1) f(x_1,y_1)\, dx_1 dy_1, \tag{5}$$

где $K \in L_2(\Omega \times \Omega)$.

Доказательство. В силу однозначной разрешимости первой краевой задачи для уравнения теплопроводности и задачи Коши для волнового уравнения, любое решение уравнения (1) имеет вид

$$u(x,y) = \begin{cases} \int_0^x dx_1 \int_0^1 G(x-x_1,y,y_1) f(x_1,y_1) dy_1 + \int_0^x G_{y_1}(x-x_1,y,0)\tau(x_1) dx_1, \quad y>0; \\ -\int_\xi^\eta d\xi_1 \int_{\xi_1}^\eta f_1(\xi_1,\eta_1) d\eta_1 + \dfrac{1}{2}[\tau(\xi)+\tau(\eta)] - \dfrac{1}{2}\int_\xi^\eta \nu(s) ds, \ y<0, \end{cases} \tag{6}$$

где $\tau(x) = u(x,0)$, $\tau(0) = 0$, $\xi = x+y$, $\eta = x-y$, $\nu(x) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0)$, $f_1(\xi,\eta) = \dfrac{1}{4} f\left(\dfrac{\xi+\eta}{2}, \dfrac{\xi-\eta}{2}\right)$, а $G(x-x_1,y,y_1)$ — функция Грина первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в квадрате AA_0B_0B, представимая в виде [8]

$$G(x,y,y_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[exp\left\{-\frac{(y-y_1+2n)^2}{4x}\right\} - exp\left\{-\frac{(y+y_1+2n)^2}{4x}\right\}^2 \right]. \tag{7}$$

Вычислив в (6) производную $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ и устремляя y к нулю, внутри области Ω_1 получим соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, перенесенное из параболической части:

$$\nu(x) = \int_0^x k(x-t)\tau'(t) dt + \Phi_0(x), \tag{8}$$

где

$$k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2}{x}};$$

$$\Phi_0(x) = \int_0^x dx_1 \int_0^1 G_0(x-x_1,y_1) f(x_1,y_1) dy_1;$$

$$G_0(x,y_1) \equiv G_y(x,y_1,0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi} x^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (y_1+2n) e^{-\frac{(y_1+2n)^2}{4x}}.$$

Аналогично находим интегро-дифференциальное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, перенесенное на отрезок AB из гиперболической части Ω_2. Это соотношение имеет вид

$$\nu(x) = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\tau'(x) - 2\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int_0^x f_1(\xi_1,x) d\xi_1 - 2\frac{\beta}{\alpha+\beta}\int_x^1 f_1(x,\eta_1) d\eta_1, \tag{9}$$

где $0 < x < 1$.

Отметим, что если $\alpha+\beta = 0$, то при выводе соотношения (9) мы сразу получаем неединственность решения задачи. Эта процедура стандартная, и мы на ней не будем подробно останавливаться. Всюду в дальнейшем будем считать, что $\alpha+\beta \neq 0$.

Случай $\alpha-\beta = 0$ является самым простым. В этом случае из (9) сразу находится значение $\nu(x)$ для всех $0 < x < 1$. Тогда решение задачи S строится в явном виде и в параболической и в гиперболической частях области. Это также стандартная процедура, на которой мы подробно останавливаться не будем.

Пусть $\alpha-\beta \neq 0$. Тогда, исключая из соотношений (8) и (9) функцию $\nu(x)$, получим для $\tau'(x)$ интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\tau(x) - \int_0^x k(x-t)\tau'(t) dt = \varphi(x), \quad 0<x<1, \tag{10}$$

где

$$\varphi(x) = 2\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int_0^x f_1(\xi_1, x)\,d\xi_1 + 2\frac{\beta}{\alpha+\beta}\int_x^1 f_1(x, \eta_1)\,d\eta_1 - \int_0^x dx_1 \int_0^1 G_0(x - x_1, y_1)\,f(x_1, y_1)\,dy_1.$$

Разделив уравнение (10) на $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$, будем иметь

$$\tau'(x) - \int_0^x K(x-t)\,\tau'(t)\,dt = \Phi(x), \quad 0 < x < 1, \tag{11}$$

где $K(x-t) = \left(\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right) k(x-t)$, $\Phi(x) = \left(\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)\varphi(x)$.

Таким образом, задача S эквивалентно-редуцирована к интегральному уравнению Вольтерра второго рода (11). Так как $\alpha - \beta \neq 0$, а ядро $k(x)$ можно представить в виде

$$k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} + \tilde{k}(x),$$

где $\tilde{k}(x) \in C^{\infty}[0,1]$, то $k(x-t)$ – ядро со слабой особенностью, поэтому существует единственное сильное решение уравнения (11), и оно имеет вид

$$\tau'(x) = \Phi(x) + \int_0^x \Gamma(x-t)\,\Phi(t)\,dt, \tag{12}$$

где $\Gamma(x)$ — резольвента уравнения (11).

$$\Gamma(x) = \sum_{j=1}^{\infty} K_j(x),\ K_1(x) = k(x),\ K_{j+1}(x) = \int_0^x K_1(x-t)\,K_j(t)\,dt,\ j \in N.$$

Из (12), с учетом $\tau(0) = 0$, после несложных преобразований получим

$$\tau(x) = \int_0^x \Gamma_1(x-t)\,\Phi(t)\,dt, \tag{13}$$

где $\Gamma_1(x) = 1 + \int_0^x \Gamma(t)\,dt$.

Подставляя в (13) значение $\Phi(t)$, после очевидных преобразований приходим к виду

$$\begin{aligned} \tau(x) = -\frac{2(\beta)}{(\alpha-\beta)}\int_0^x d\xi_1 \int_{\xi_1}^1 \Gamma_1(x-\xi_1)\,f_1(\xi_1,\eta_1)\,d\eta_1 + \\ +\frac{2\alpha}{(\alpha-\beta)}\int_0^x d\xi_1 \int_{\xi_1}^x \Gamma_1(x-\eta_1)\,f_1(\xi_1,\eta_1)\,d\eta_1 - \\ -\frac{\alpha+\beta}{(\alpha-\beta)}\int_0^x dx_1 \int_0^1 G_1(x-x_1,y_1)\,f(x_1,y_1)\,dy_1, \end{aligned} \tag{14}$$

где $G_1(x,y) = \int_0^x G_0(t,y)\,\Gamma_1(x-t)\,dt$.

Подставляя (14) в (8) и в (6), получим формулу (5), где подробный вид ядра $K(x,y;;x_1,y_1)$ может быть выписан в явном виде. Из-за громоздкости мы не приводим здесь этот вид.

Покажем только, что $K(x,y;x_1,y_1) \in L_2(\Omega\times\Omega)$. Для этого из анализа представления ядра легко увидеть, что в формуле все слагаемые ограничены, за исключением первого: $G_2(x-x_1,y,y_1)$, в котором не ограничено слагаемое $G(x-x_1,y,y_1)$, поэтому достаточно показать, что

$$\theta(y)\,\theta(y_1)\,\theta(x-x_1)\,G(x-x_1,y,y_1) \in L_2(\Omega\times\Omega).$$

Из представления (7) функции Грина $G(x-x_1,y,y_1)$ следует, что для этого достаточно оценить слагаемое при $n=0$:

$$B(x-x_1,y,y_1)=\frac{\theta(y)\,\theta(y_1)\,\theta(x-x_1)}{2\sqrt{\pi(x-x_1)}}\left[exp\left\{-\frac{(y-y_1)^2}{4(x-x_1)}\right\}-exp\left\{-\frac{(y+y_1)^2}{4(x-x_1)}\right\}\right].$$

Заметим, что $0\leq B(x-x_1,y,y_1)\leq\dfrac{1}{2\sqrt{\pi(x-x_1)}}^{-\frac{(y-y_1)^2}{4(x-x_1)}}$. Используя это соотношение, вычислим:

$$\|\mathrm{B}\|^2_{L_2(\Omega\times\Omega)}=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^x dx_1\int_0^1 |B(x-x_1,y,y_1)|^2 dy_1=$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^1 dy_1\int_0^1 dx\int_0^x |B(x_1,y,y_1)|^2 dx_1\leq\int_0^1 dy\int_0^1 dy_1\int_0^1 |B(x,y,y_1)|^2 dx\leq$$

$$\leq\frac{1}{4\pi}\int_0^1 dy\int_0^1 dy_1\int_0^1 \frac{1}{x}e^{-\dfrac{(y-y_1)^2}{4x}}dx=\frac{1}{4\pi}\int_0^1 dy\int_0^1\frac{dx}{x}\int_0^1 e^{-\dfrac{(y-y_1)^2}{4x}}dy_1.$$

Заменяя $\dfrac{y-y_1}{2\sqrt{x}}=y_2$, далее имеем

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^1 dy\int_0^1\frac{dx}{x}\int_{\frac{y-1}{2\sqrt{x}}}^{\frac{y}{2\sqrt{x}}} e^{-y_2^2}2\sqrt{x}dy_2=\frac{1}{2\pi}\int_0^1 dy\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y_2^2}dy_2<\infty.$$

Следовательно, $K(x,y;x_1,y_1)\in L_2(\Omega\times\Omega)$.

Непосредственным вычислением нетрудно убедиться в справедливости оценки

$$\|\Phi(x)\|_{L_2(0,1)}\leq c\,\|f\|_0,$$

поэтому из (12) получим

$$\left\|\tau'(x)\right\|_{L_2(0,1)}\leq c\,\|\Phi(x)\|_{L_2(0,1)}\leq c\,\|f\|_0.$$

Отсюда и из свойств решения первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности следует, что решение задачи S принадлежит классу $W=H^1(\Omega)\cap H^{1,2}_{x,y}(\Omega_1)\cap C(\overline{\Omega})$ и удовлетворяет неравенству (4).

Покажем, что найденное решение будет сильным. Так как $C_0^1(\overline{\Omega})$ плотно в $L_2(\Omega)$, то для любой функции $f\in L_2(\Omega)$ существует последовательность функций $f_n\in C_0^1(\overline{\Omega})$ таких, что $\|f_n-f\|\to 0,\ \ n\to\infty$. Обозначим $u_n=L^{-1}f_n$.

При $f_n\in C_0^1(\overline{\Omega})$ нетрудно видеть, что $\Phi_n(x)\in C^1[0,1]$, поэтому уравнение (11) можно рассматривать как интегральное уравнение Вольтерра второго рода в пространстве $C^1[0,1]$. Следовательно, $\tau_n'(x)=u_x(x,0)\in C^1[0,1]$. Из свойств решений первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности и задачи Дарбу для волнового уравнения, принимая во внимание представление (6), получаем, что $u_n\in W$ для всех $f_n\in C_0^1(\overline{\Omega})$.

В силу неравенства (4) имеем $\|u_n-u\|_1\leq c\|f_n-f\|_0\to 0$. Следовательно, $\{u_n\}$ есть последовательность, отвечающая определению сильного решения, задача S сильно разрешима для любой правой части f, и сильное решение принадлежит классу $H^1(\Omega)\cap H^{1,2}_{x,y}(\Omega_1)\cap C(\overline{\Omega})$.

Теорема 1 доказана.

О спектре задачи

Из теоремы 1 следует, что оператор L задачи S обратим и обратный оператор L^{-1} является оператором Гильберта-Шмидта. Тогда спектр задачи может состоять только из собственных значений оператора L^{-1}. Естественно возникает вопрос о существовании собственных значений оператора L^{-1}, следовательно, и задачи S.

Теорема 2. Пусть L — оператор задачи S и $(\alpha - \beta)\beta \neq 0$. Тогда существует собственное значение задачи S, т.е. существует $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что уравнение $Lu = \lambda u$ имеет нетривиальное решение.

Доказательство. Приведем здесь только краткую схему доказательства. Через L обозначим замыкание в $L_2(\Omega)$ дифференциального оператора, заданного на W равенством (1). Из теоремы 1 следует, что оператор L обратим и L^{-1} — оператор Гильберта-Шмидта, определяемый формулой (5). Тогда оператор $L^{-2} \equiv \left(L^{-1}\right)^2$ ядерный в $L_2(\Omega)$, поэтому для оператора L^{-2} применим результат В.Б. Лидского о совпадении матричного и спектрального следов.

Лемма [9]. Если оператор T ядерный в гильбертовом пространстве H, тогда, каков бы ни был ортонормированный базис $\varphi_i\,(i = 1, 2, \dots)$ в H, справедливо равенство

$$Sp\ T \equiv \sum_{k=1}^{\infty} (T\varphi_k, \varphi_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(T), \tag{15}$$

где λ_k – собственные значения оператора T.

Известно также, что если T – ядерный оператор в пространстве $L_2(\Omega)$, представленный как произведение $T = KR$ двух операторов Гильберта-Шмидта

$$(Kf)(z) = \int_{\Omega} K(z, z_1) f(z_1)\, dz_1, \;\; (Rf)(z) = \int_{\Omega} R(z, z_1) f(z_1)\, dz_1,$$

то имеет место формула Гаала вычисления следов [10]:

$$Sp\ T = \int_{\Omega} \left[\int_{\Omega} K(z, z_1)\, R(z_1, z) dz_1\right] dz. \tag{16}$$

Из (15) и (16) получаем, что

$$Sp\ L^{-2} = \iint_{\Omega} dxdy \int_{\Omega} K(x, y; x_1, y_1)\, K(x_1, y_1; x, y)\, dx_1 dy_1.$$

Следовательно, используя явный вид ядра $K(x, y; x_1, y_1)$, можем показать, что $Sp\text{Ł}^{-2} \neq 0$. Не останавливаясь на подробных вычислениях, укажем только, что наиболее существенным является доказательство отличия от нуля интеграла $\int_0^{\xi} G_0(t, y)\, dt$.

Имеем

$$\int_0^{\xi} G_0(t, y)\, dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\xi} \frac{y+2n}{t^{3/2}} e^{-\frac{(y+2n)^2}{4t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=\mp\infty}^{\infty} \int_{\frac{y+2n}{2\sqrt{\pi}}}^{\pm\infty} e^{-t^2} dt =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{-1} \int_{-\infty}^{\frac{y+2n}{2\sqrt{\pi}}} e^{-t^2} dt + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\frac{y+2n}{2\sqrt{\pi}}}^{\infty} e^{-t^2} dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{y+2n}{2\sqrt{\pi}}}^{\infty} e^{-t^2} dt - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\frac{y+2n}{2\sqrt{\pi}}}^{\infty} e^{-t^2} dt \right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\frac{y+2n}{2\sqrt{\pi}}}^{\infty} e^{-t^2}dt - \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{2n-y}{2\sqrt{\pi}}}^{\infty} e^{-t^2}dt\right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\frac{y+2n}{2\sqrt{\pi}}}^{\infty} e^{-t^2}dt - \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\frac{2n-y+2}{2\sqrt{\pi}}}^{\infty} e^{-t^2}dt\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\frac{2n+y}{2\sqrt{\pi}}}^{\frac{2n+2-y}{2\sqrt{\pi}}} e^{-t^2}dt.$$

Отсюда получаем, что $\int_0^{\xi} G_0\left(t,y\right)dt \geq 0$. Причем равенство здесь достигается только при $y = 1$, т.е. $\int_0^{\xi} G_0\left(t,y\right)dt \not\equiv 0$.

Отличие от нуля других слагаемых доказывается проще, и мы на этом подробно останавливаться не будем. Таким образом, получим $Sp\ L^{-2} \neq 0$. Тогда, в силу (16), имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left(L^{-2}\right) \equiv \sum_{k=1}^{\infty}{\lambda_k}^2\left(L^{-1}\right) \neq 0,$$

где $\lambda_k\left(L^{-2}\right)$ — собственные значения оператора L^{-2}. Это означает, что $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{{\lambda_k}^2} \neq 0$, где λ_k — собственные значения задачи (1)–(3). Отсюда следует существование собственных значений рассматриваемой нелокальной краевой задачи.

Теорема доказана.

Авторы выражают благодарность М.А. Садыбекову за постановку задачи и ценные советы во время работы. Эта работа была поддержана грантом 0825 / ГФ4 МОН РК.

Список литературы

1 *Кальменов Т.Ш.* О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференциальные уравнения. — 1977. — Т. 13 — № 8. — С. 1418–1425.

2 *Кальменов Т.Ш.* О спектре задачи Трикоми для одного уравнения смешанного типа четвертого порядка // Дифференциальные уравнения. — 1979. — Т. 15. — № 2. — С. 354–356.

3 *Moiseev E.I.* Properties of Solution of Lavrentev-Bitsadze Equation // Mathematical Notes. — 1979. — Vol. 26. — No. 3, 4. — P. 757–762.

4 *Ponomarev S.M.* Eigenvalue Problem for Lavrentiev-Bitsadze Equation // Doklady Mathematics. — 1977. — Vol. 233. — No. 1. — P. 39, 40.

5 *Моисеев Е.И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. — М.: Изд-во МГУ, 1988. — 150 с.

6 *Бердышев А.С.* Краевые задачи и их спектральные свойства для уравнения смешанного параболо-гиперболического и смешанно-составного типов. — Алматы, 2015. — 224 с.

7 *Sadybekov M.A., Toizhanova G.D.* Spectral properties of a class of boundary value problems for a parabolic-hyperbolic equation // Differential Equations. — 1992. — Vol. 28. — No. 1. — P. 176–179.

8 *Samarskii A.A., Tikhonov A.N.* Equations of Mathematical Physics. — M.: MSU Publ., 1999. — 799 p.

9 *Lidskii V.B.* Nonselfadjoint operators possessing a trace // Doklady Mathematics. — 1959. — Vol. 125. — No. 3. — P. 485–488.

10 *Brislawn C.* Kernels of trace class operators // Proc. Amer. Math. Soc. — 1988. — Vol. 104. — No. 4. — P. 1181–1190.

Г.Ділдәбек, А.А.Тенгаева

Парабола-гиперболалық типті теңдеулер үшін ауысуы бар есептің меншікті мәндерінің бар болуы

Мақалада классикалық емес шеттік шарттары бар I текті парабола-гиперболалық типті оператор үшін спектралды есеп қарастырылды. Есеп стандартты облыста берілген. Облыстың параболалық бөлігі — төртбұрыш, ал гиперболалық облыстың бөлігі сипаттаушы үшбұрышпен сәйкес келеді. Гиперболалану облысында ауыспалы шеттік шарттары бар және параболалану облысында локалды шеттік шарттары бар есепке зерттеу жүргізілген. Аталған есептің шешімділігі және меншікті мәндерінің бар болуы дәлелденген. Жұмыстың негізгі мақсаты спектралды есептің қасиеттерін зерттеу болып табылады.

G. Dildabek, A.A.Tengayeva

Existence of eigenvalues of problem with shift for an equation of parabolic-hyperbolic type

In the paper a spectral problem for an operator of parabolic-hyperbolic type of I kind with non-classical boundary conditions is considered. The problem is considered in a standard domain. The parabolic part of the space is a rectangle. And the hyperbolic part of the space coincides with a characteristic triangle. We consider a problem with the local boundary condition in the domain of parabolicity and with the boundary condition with displacement in the domain of hyperbolicity. We prove the strong solvability of considered problem. The main aim of the paper is the research of spectral properties of the problem. The existence of eigenvalues of the problem is proved.

References

1 Kal'menov T.Sh. *Differential equations*, 1977, 13, 8, p. 1418–1425.

2 Kal'menov T.Sh. *Differential equations*, 1979, 15, 2, p. 354–356.

3 Moiseev E.I. *Mathematical Notes*, 1979, 26, 3–4, p. 757–762.

4 Ponomarev S.M. *Doklady Mathematics*, 1977, 233, 1, p. 39, 40.

5 Moiseev E.I. *Equations of Mixed Type with a Spectral Parameter*, Moscow: MSU Publ., 1988, 150 p.

6 Berdyshev A.S. *Boundary value problem for mixed type equation of the third order with periodic conditions*, Almaty, 2015, 224 p.

7 Sadybekov M.A., Toizhanova G.D. *Differential Equations*, 1992, 28, 1, p. 176–179.

8 Samarskii A.A., Tikhonov A.N. *Equations of Mathematical Physics*, Moscow: MSU Publ., 1999, 799 p.

9 Lidskii V. B. *Doklady Mathematics*, 1959, 125, 3, p. 485–488.

10 Brislawn C. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1988, 104, 4, p. 1181–1190.