УДК 512. 815.6

Ш.Ш.Ибраев

Университет «Болашак», Кызылорда
(E-mail: ibrayevsh@mail.ru)

О третьих когомологиях простых SL_2-модулей

Когомологии третьей степени простых модулей для простых односвязных алгебраических групп в положительной характеристике мало изучены. Они известны для некоторых простых модулей малых размерностей и для простых алгебраических групп ранга 2. Для группы SL_2 полное описание когомологии третьей степени простых модулей не получено. В статье вычислены когомологии третьей степени простых модулей для группы SL_2 над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p>3$.

Ключевые слова: алгебраическая группа, простой модуль, третья когомология.

Введение. Когомологии простых модулей алгебраических групп над полем положительной характеристики были исследованы в работах Дж.О'Хэллорана [1], Х.Андерсена [2], К.Бенделя, Д.Накано и К.Пиллена [3], А.С.Клещева и Дж.Шета [4, 5], Э.Клайна, Б.Паршаля и Л.Скотта [6, 7], Дж.МакНинча [8], Э.Клайна [9], С. Йехия [10], Дж.Йе [11], Дж.Лиу и Дж.Йе [12], Д.Стюарта [13, 14], А.С.Джумадильдаева и Ш.Ш.Ибраева [15], Ш.Ш.Ибраева [16–20] и группы американских алгебраистов VIGRE [21, 22].

В [1] были описаны когомологии простых модулей со старшими весами в области ограниченных весов. Эти модули являются простыми фактор-модулями модулей Вейля с простыми подмодулями.

Общая формула вычисления расширения двух простых модулей получена Х.Андерсеном в [2]. Она была использована в работах [10–12] для вычисления расширения простых модулей простых алгебраических групп ранга 2. Формулы вычисления расширения простых модулей, полученные для алгебраических групп ранга 2 в [11–12], обобщены в работе [3] для больших характеристик $p \geq 3h-3$, где h — число Кокстера. Когомологии первой степени простых модулей над Sp_{2n} с фундаментальными старшими весами вычислены в работах [4, 5]. Кроме того, они вычислены и для простых модулей с минимальными доминантными старшими весами в [6] и [7]. Последний результат был расширен в [21] для всех доминантных старших весов, меньших или равных фиксированному фундаментальному весу, за исключением некоторых малых характеристик поля, зависящих от системы корней. Расширения простых модулей для SL_2 получены в [9], и когомологии первой степени простых модулей для SO_7 вычислены в [16]. Связь между первой когомологией алгебраической группы с неприводимой системой корней над алгебраически замкнутым полем характеристики $p>0$ с коэффициентами в простом модуле и соответствующей первой когомологией ее алгебры Ли изучена в [20], и там же получены необходимые достаточные условия их изоморфности.

В работе МакНинча [8] вычислены вторые когомологии простых модулей, размерности которых не превышают характеристику поля. Развивая методику, примененную в [21], авторами работы [22] были получены аналогичные результаты для вторых групп когомологий простых модулей. Вторые когомологии простых модулей вычислены также для SL_2 [13], SL_3 [14], Sp_4 [19], G_2 [18], SO_7 [17].

Примеры одномерной нетривиальной третьей когомологии содержатся в [1]. В [15] получено полное описание третьих групп когомологий простых модулей для простых односвязных алгебраических групп ранга 2 в положительной характеристике при незначительном ограничении на характеристику поля, исключаются случаи $p=2,3$ для A_2; $p=2,3,5$ для B_2; $p=2,3,5,7,11$ для G_2. Из основного результата этой работы следует, что размерности пространств когомологий не больше, чем ранг данной алгебраической группы, и существуют двумерные нетривиальные группы третьей когомологии в случаях A_2 и G_2. Как известно, для группы SL_2 ранга 1 аналогичный результат о когомологии третьей степени простых модулей еще не получен. Данная работа посвящена решению этой задачи. Нами найдены все простые G-модули с нетривиальными 3-когомологиями. Согласно полученному нами результату во всех нетривиальных случаях группа третьей когомологии одномерна. Для доказательства основной теоремы (теорема 1) будем использовать методику вычисления, разработанную в [15].

Пусть G — простая односвязная алгебраическая группа SL_2 над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p>3$. Будем считать, что G определена и расщепляется над простым подполем F_p поля k. Пусть $G_1 = Ker\,F$, где F — отображение Фробениуса на G.

Обозначим через B и T соответственно подгруппу Бореля и максимальный тор группы G. Если R — система корней группы G, то действие группы Вейля W системы R на группу характера $X(T)$ максимального тора T определяется по формуле $S_\alpha(\lambda)=\lambda-\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle\alpha$, где $s_\alpha\in W$, $\alpha\in R$, и $\alpha^\vee$ — дуальный к α корень. Напомним, что $X(T)$ может быть идентифицирована со множеством целых чисел Z. Тогда множеством доминантных весов будет Z_+. Точечное действие группы Вейля определяется через полусуммы всех положительных корней $\rho=1/2\alpha_1=\lambda_1$ по формуле $w\cdot\lambda=w(\lambda+\rho)-\rho$, где $w\in W$, $\lambda\in X(T)$; α_1 — единственный положительный корень системы R; λ_1 — фундаментальный вес.

Аффинная группа Вейля W_p порождается отражениями вида $s_{\alpha,np}$ для всех $\alpha\in R_+=\{\alpha_1\}$ и $n\in Z$. Обычно используется точечное действие $s_{\alpha,np}\cdot\lambda=\lambda-\langle\lambda+\rho,\alpha^\vee\rangle\alpha+np\alpha$ аффинной группы Вейля.

Пусть $X_+(T)=\{\lambda\in X(T)\,|\,\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle\geq 0 \text{ для всех } \alpha\in S\}\approx Z_+$ — множество доминантных весов и $X_1(T)=\{\lambda\in X(T)\,|\,0\leq\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle<p \text{ для всех } \alpha\in S\}\approx Z_p$ — множество ограниченных весов.

Для любого $\lambda\in X(T)$ существует одномерный B-модуль k_λ и индуцированный G-модуль $H^0(\lambda)=Ind_B^G(k_\lambda)$. Известно, что $H^0(\lambda)\neq 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda\in X_+(T)$. Если $V(\lambda)$ — модуль Вейля со старшим весом λ, то $H^0(\lambda)\approx V(-w_0(\lambda))^*$. Пусть $L(\lambda)$ — простой G-модуль со старшим весом λ. Его можно определить через $H^0(\lambda)$ или через $V(\lambda)$. С одной стороны, он простой цоколь $H^0(\lambda)$, а с другой — единственный простой фактор-модуль $V(\lambda)$ по максимальному подмодулю. Все три G-модуля, введенные выше, могут быть рассмотрены как G_1-модули, причем $L(\lambda)$ остается простым при переходе к G_1.

Пусть L — рациональный G-модуль. Через $L^{(d)}$ обозначим скручивание Фробениуса степени d для L. Тогда существует рациональный G-модуль V, такой что $V^{(d)}=L$, обозначим его через $L^{(-d)}$.

Предварительные сведения. При доказательстве основной теоремы мы используем следующие известные факты.

Теорема Стейнберга о тензорном произведении. Для любого $\lambda=\lambda^0+p\lambda^1+\cdots+p^m\lambda^m\in X_+(T)$, где $\lambda^i\in X_1(T)$, простой G-модуль $L(\lambda)$ со старшим весом λ разлагается в виде следующего тензорного произведения:

$$L(\lambda)=L(\lambda^0)\otimes L(\lambda^1)^{(1)}\otimes\cdots\otimes L(\lambda^m)^{(m)}. \qquad (1)$$

Принцип связанности и структура индуцированных модулей. Пусть $\lambda,\mu\in X(T)$. Назовем λ G_1-связанным (G-связанным) с μ, если $\lambda\in W_p\cdot\mu+pX(T)$ ($\lambda\in W_p\cdot\mu$). Если $H^i(G_1,L(\lambda))\neq 0$, то λ G_1-связан с нулевым весом [23], II.9.19. Аналогично, если $H^i(G,L(\lambda))\neq 0$, то λ G-связан с нулевым весом [23], II.6.17.

Для $\lambda = a\lambda_1 \in X(T)$ мы будем использовать сокращенное обозначение a. Очевидно, что для G $W_p \cdot 0 + pX(T) \bigcap X_1(T) = \{0, p-2\}$. Согласно [23], II.8.20, $H^0(\lambda) \approx L(\lambda)$, если $\lambda \in X_1(T)$. В частности, $H^0(0) = L(0) \approx k$ и $H^0(p-2) = L(p-2)$.

Когомологии простых модулей для G_1.

Лемма 1 ([13, предложение 2.2.]). Пусть $\lambda \in X_1(T)$, тогда $H^i(G_1, L(\lambda)) = 0$, кроме следующих случаев:

(i) $H^{2i}(G_1, k)^{(-1)} \approx H^0(2i)$;

(ii) $H^{2i+1}(G_1, L(p-2))^{(-1)} \approx H^0(2i+1)$.

Расширения модулей для G. Все расширения двух простых модулей для G найдены в [9].

Пусть

$$M(\lambda^0) = \{L(\lambda) \big| \lambda \in X_+(T),\ Ext^1_G(L(\lambda^0), L(\lambda)) \neq 0\},\quad \lambda^0 \in X_1(T).$$

Лемма 2. Пусть $p > 3$. Тогда:

$M(0) = \{L(p-2)^{(r)} \otimes L(1)^{(r+1)},\ r \geq 0\}$;

$M(1) = \{L(p-3) \otimes L(1)^{(1)},\ L(1) \otimes L(p-2)^{(r)} \otimes L(1)^{(r+1)},\ r > 0\}$;

$M(2) = \{L(p-4) \otimes L(1)^{(1)},\ L(2) \otimes L(p-2)^{(r)} \otimes L(1)^{(r+1)},\ r > 0\}$.

Во всех перечисленных случаях $Ext^1_G(L(\mu), L(\lambda)) \approx k$.

Вторые когомологии простых модулей для G. Все нетривиальные вторые когомологии найдены в [13, теорема 1]. Пусть

$$M_i = \{L(\lambda^0 + p\mu) \big| E_2^{2-i,i} = H^{2-i}(G, H^i(G_1, L(\lambda^0 + p\mu)^{(-1)}) \neq 0, \lambda^0 \in X_1(T), \mu \in X_+(T)\}, i = 0,1,2.$$

Лемма 3. Пусть $p > 3$. Тогда:

(i) $M_2 = \{L(2)^{(1)}\}$;

$M_1 = \{L(p-2) \otimes L(p-3)^{(1)} \otimes L(1)^{(2)}, L(p-2) \otimes L(1)^{(1)} \otimes L(p-2)^{(r+1)} \otimes L(1)^{(r+2)}, r > 0\}$;

$M_0 = \{L(\mu)^{(d)} \big| L(\mu) \in M_2 \cup M_1, d > 0\}$;

(ii) $H^2(G, L(\lambda)) = \begin{cases} k, \text{ если } L(\lambda) \in \bigcup_{i=0}^{2} M_i; \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$

О композиционном факторе двух модулей Вейля. Пусть $\lambda = a \in X_1(T)$, тогда очевидно, что $V(1) = L(1)$, $V(a) = L(a)$, и согласно [24]

$$L(1) \otimes L(a) \xleftrightarrow[G]{} V(a+1) \oplus V(a-1). \tag{2}$$

Здесь знак $\xleftrightarrow[G]{}$ означает, что обе стороны этого знака имеют одинаковые G-композиционные факторы.

Предварительные результаты. В дальнейшем нам понадобится информация о структурах цоколя тензорного произведения двух простых модулей. Сначала докажем несколько вспомогательных утверждений. Пусть $\mu^0 \in X_1(T)$ и $\Gamma(\mu^0) = \{\varphi \big| L(\varphi) \subset Soc_G L(1) \otimes L(\mu^0)\}$ — множество старших весов разложимых компонент $Soc_G L(1) \otimes L(\mu^0)$.

Лемма 4. Пусть $p > 3$ и $0 \in \Gamma(\mu^0)$. Тогда

$$\Gamma(\mu^0) = \begin{cases} \{0, 2\}, \text{ если } \quad \mu^0 = 1; \\ \varnothing \quad \text{в} \quad \text{остальных} \quad \text{случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Согласно формуле (2) $L(1) \otimes L(\mu^0)$ может иметь композиционный фактор, изоморфный $L(0)$, только в том случае, если $\mu^0 = 1$. Кроме того, $L(1) \otimes L(1) \xleftrightarrow[G]{} V(2) \oplus V(0)$. Так как $V(2) \cong L(2)$ и $V(0) \cong L(0)$, то $L(1) \otimes L(1) \xleftrightarrow[G]{} L(2) \oplus L(0)$. Очевидно, что $L(2) + L(0)$ — разложимый G-модуль. Следовательно, $L(1) \otimes L(1) \cong L(2) \oplus L(0)$ и $L(1) \otimes L(1) \cong Soc_G L(1) \otimes L(1)$.

Лемма 5. Пусть $p>3$ и $p-2\in\Gamma(\mu^0)$. Тогда

$$\Gamma(\mu^0)=\begin{cases}\{p-2,\, p-4\}, \text{если} \quad \mu^0=p-3;\\ \varnothing \quad \text{в} \quad \text{остальных} \quad \text{случаях.}\end{cases}$$

Доказательство аналогично лемме 4.

Для простого G-модуля $L(\lambda)$ спектральная последовательность Линдона-Хохшильда-Серра имеет вид [23], I.6.6.(3)

$$E_2^{nm}=H^n\left(G,H^m(G_1,L(\lambda))^{(-1)}\right)\Rightarrow H^{n+m}(G,L(\lambda)). \tag{3}$$

Если E_∞^{nm} — стабилизированное значение точек предыдущей спектральной последовательности, то

$$H^i(G,L(\lambda))=\oplus_{n+m=i}E_\infty^{nm}. \tag{4}$$

Пусть $\lambda=\lambda^0+p\mu$, тогда согласно [15, (1.3)]

$$E_2^{nm}\cong H^n\left(G,H^m(G_1,L(\lambda^0))^{(-1)}\otimes L(\mu)\right). \tag{5}$$

Используя формулы (5.15)–(5.20) работы [15], формулу (4) и лемму 1, получим

$$H^3(G,L(\lambda))=E_2^{03}\oplus E_2^{12}\oplus E_2^{21}\oplus E_2^{30}. \tag{6}$$

Пусть $N_i=\{L(\lambda^0+p\mu)\,\big|\,E_2^{3-i,i}=H^{3-i}(G,H^i(G_1,L(\lambda^0+p\mu))^{(-1)})\neq 0\},\quad i=0,1,2,3.$

Лемма 6. Пусть $p>3$. Тогда:

(i) $N_3=\{L(p-2)\otimes L(3)^{(1)}\}$;

(ii) $N_2=\{L(p-4)^{(1)}\otimes L(1)^{(2)},L(2)^{(1)}\otimes L(p-2)^{(r+2)}\otimes L(1)^{(r+3)},r\geq 0\}$;

(iii) $N_1=\{L(p-2)\otimes L(1)^{(1)}\otimes L(2)^{(2)},L(p-2)\otimes L(p-3)^{(1)}\otimes L(p-3)^{(2)}\otimes L(1)^{(3)}$;

$L(p-2)\otimes L(p-3)^{(1)}\otimes L(1)^{(2)}\otimes L(p-2)^{(r+3)}\otimes L(1)^{(r+4)},r\geq 0\}\bigcup\left\{L(p-2)\otimes L(\mu)^{(s)}\,\middle|\,L(\mu)\in M_1\bigcup M_2,\, s\geq 1\right\}$.

Доказательство. (i) Используя определение N_3 и формулу (1), имеем:

$$N_3=\{L(p-2)\otimes L(\mu)^{(1)}\,\big|\,E_2^{03}=H^0(G,H^3(G_1,L(p-2)\otimes L(\mu)^{(1)})^{(-1)})\neq 0,\mu\in X_+(T)\}.$$

По формуле (5) и лемме 1

$$N_3=\{L(p-2)\otimes L(\mu)^{(1)}\,\big|\,H^0(G,L(3)\otimes L(\mu))\neq 0,\mu\in X_+(T)\}=\{L(p-2)\otimes L(3)^{(1)}\}; \tag{ii}$$

$$N_2=\{L(\mu)^{(1)}\,\big|\,L(\mu)\in M(2)\}=\{L(\mu)^{(1)}\,\big|\,L(\mu)\in\{L(p-4)\otimes L(1)^{(1)},L(2)\otimes L(p-2)^{(r+1)}\otimes L(1)^{(r+2)},r\geq 0\}\}=$$
$$=\{L(p-4)^{(1)}\otimes L(1)^{(2)},L(2)^{(1)}\otimes L(p-2)^{(r+2)}\otimes L(1)^{(r+3)},r\geq 0\}.$$

Во втором равенстве была использована лемма 2.

(iii) Используя определение N_1 и (1), имеем:

$$N_1=\{L(p-2)\otimes L(\mu)^{(1)}\,\big|\,E_2^{21}=H^2(G,H^1(G_1,L(p-2)\otimes L(\mu)^{(1)})^{(-1)})\neq 0,\mu\in X_+(T)\}.$$

По формуле (5) и лемме 1

$$N_1=\{L(p-2)\otimes L(\mu)^{(1)}\,\big|\,H^2(G,L(1)\otimes L(\mu))\neq 0,\mu\in X_+(T)\}=$$
$$=\{L(p-2)\otimes L(\mu^0+p\nu)^{(1)}\,\big|\,H^2(G,L(1)\otimes L(\mu^0+p\nu))\neq 0,\ \mu^0\in X_1(T),\nu\in X_+(T)\}=$$
$$=\{L(p-2)\otimes L(\mu^0)^{(1)}\otimes L(\nu)^{(2)}\,\big|\,H^2(G,L(1)\otimes(L(\mu^0)\otimes L(\nu)^{(1)}))\neq 0,\mu^0\in X_1(T),\ \nu\in X_+(T)\}=$$
$$=\{L(p-2)\otimes L(\mu^0)^{(1)}\otimes L(\nu)^{(2)}\,\big|\,H^2(G,Soc_G L(1)\otimes(L(\mu^0)\otimes L(\nu)^{(1)}))\neq 0,\ \mu^0\in X_1(T),\ \nu\in X_+(T)\}.$$

Согласно предложению 4.4 [11]

$$N_1=\{L(p-2)\otimes L(\mu^0)^{(1)}\otimes L(\nu)^{(2)}\,\big|\,H^2(G,(Soc_G L(1)\otimes L(\mu^0))\otimes L(\nu)^{(1)})\neq 0,\ \mu^0\in X_1(T),\nu\in X_+(T)\}.$$

Наконец, используя леммы 3–5, получим:

$$N_1=\{L(p-2)\otimes L(1)^{(1)}\otimes L(2)^{(2)},L(p-2)\otimes L(p-3)^{(1)}\otimes L(p-3)^{(2)}\otimes L(1)^{(3)};$$
$$L(p-2)\otimes L(p-3)^{(1)}\otimes L(1)^{(2)}\otimes L(p-2)^{(r+3)}\otimes L(1)^{(r+4)},r\geq 0\}\bigcup\left\{L(p-2)\otimes L(\mu)^{(s)}\,\middle|\,L(\mu)\in M_1\bigcup M_2,\, s\geq 1\right\}.$$

Лемма 7. Пусть $p>3$. Тогда $N_0=\{L(\mu)^{(s)}\,\big|\,\mu\in N_3\bigcup N_2\bigcup N_1,\quad s>0\}$.

Доказательство.

$$N_0 = \{L(0)\otimes L(\mu)^{(1)} \,\big|\, H^3(G, H^0(G_1, L(0)\otimes L(\mu)^{(1)})^{(-1)}) \neq 0, \mu \in X_+(T)\} =$$

$$= \{L(\mu)^{(1)} \,\big|\, H^3(G, L(0)\otimes L(\mu)) \neq 0, \mu \in X_+(T)\} = \{L(\mu)^{(1)} \,\big|\, H^3(G, L(\mu)) \neq 0, \mu \in X_+(T)\}.$$

Согласно лемме 6 $H^3(G, L(\mu)) \neq 0,$ если

$$L(\mu) \in \{L(\mu^0 + p\gamma) \,\big|\, E_2^{03} = H^0(G, H^3(G_1, L(\mu^0)^{(-1)} \otimes L(\gamma)) \neq 0\};$$

$$\bigcup\{L(\mu^0 + p\gamma) \,\big|\, E_2^{12} = H^1(G, H^2(G_1, L(\mu^0)^{(-1)} \otimes L(\gamma)) \neq 0\};$$

$$\bigcup\{L(\mu^0 + p\gamma) \,\big|\, E_2^{21} = H^2(G, H^1(G_1, L(\mu^0)^{(-1)} \otimes L(\gamma)) \neq 0\} = N_3 \bigcup N_2 \bigcup N_1.$$

Следовательно, $N_0 = \left\{L(\mu)^{(s)} \,\big|\, \mu \in N_3 \bigcup N_2 \bigcup N_1, \quad s > 0\right\}.$

Сформулируем и докажем основную теорему. Сохраняем все обозначения предыдущего пункта.

Теорема 1. Пусть $G = SL_2$, $p > 3$ и $L(\lambda)$ — простой G-модуль. Тогда

$$H^3(G, L(\lambda)) \approx \begin{cases} k, \text{ если } L(\lambda) \in \bigcup\limits_{i=0}^{3} N_i; \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Согласно лемме 1 кратность вхождения данного неприводимого модуля (при наличии) к соответствующим когомологиям $H^i(G_1, L(\mu))^{(-1)}$, $i = 1,2,3,$ равна единице. Следовательно, во всех нетривиальных случаях $E_2^{nm} \approx k.$

Согласно лемме 6 множества N_3, N_2, N_1 попарно не пересекаются. Тогда утверждение теоремы следует из формулы (6) и лемм 6 и 7. Доказательство теоремы 1 завершено.

Список литературы

1 *O'Halloran J.* Weyl modules and the cohomology of Chevalley groups // Amer. J. Math. — 1981. — Vol. 103. — P. 399–410.

2 *Andersen H.H.* Extensions of modules for algebraic groups // Amer. J. Math. — 1984. — Vol. 106. — P. 489–504.

3 *Bendel C.P., Nakano D.K., Pillen C.* Extensions for finite Chevalley groups II // Trans. AMS. — 2002. — Vol. 354. — № 11. — P. 4421–4454.

4 *Kleshchev A.S., Shet J.* On extensions of simple modules over symmetric and algebraic groups // J. Algebra. — 1999. — Vol. 221. — P. 705–722.

5 *Kleshchev A.S., Shet J.* Corrigendum: On extensions of simple modules over symmetric and algebraic groups // J. Algebra. — 2001. — Vol. 238. — P. 843–844.

6 *Cline E., Parshal B., Scott L.* Cohomology of finite groups of Lie type. I // IHES Publ. Math. — 1975. — Vol. 45. — P. 169–191.

7 *Cline E., Parshal B., Scott L.* Cohomology of finite groups of Lie type. II // J. Algebra. — 1977. — Vol. 45. — P. 182–198.

8 *McNinch G.J.* The second cohomology of small irreducible modules for simple algebraic group // Pacific. J. Math. — 2002. — Vol. 204. — № 2. — P. 459–472.

9 *Cline E.* Ext1 for SL_2 // Commun. Algebra. — 1979. — Vol. 7. — P. 107–111.

10 *Yehia S. El.* Extensions of simple modules for the universal Chevalley group and parabolic subgroup: PhD Thesis. — Warwick, 1982.

11 *Ye Jia-chen*. Extensions of simple modules for the group *Sp* (4,*K*) // J. London Math. Soc. — 1990. — Vol. 2 (41). — P. 51–62.

12 *Liu Jia-chun, Ye Jia-chen*. Extensions of simple modules for the algebraic group of type *G*2 // Commun. Algebra. — 1993. — Vol. 21. — P. 1909–1946.

13 *Stewart D.I.* The second cohomology of simple SL_2-modules // Proc. Amer. Math. Soc. — 2010. — Vol. 138. — P. 427–434.

14 *Stewart D.I.* The second cohomology of simple SL_3-modules // Commun. Algebra. — 2012. — Vol. 40. — P. 4702–4716.

15 *Джумадильдаев А.С., Ибраев Ш.Ш.* О третьих когомологиях алгебраических групп ранга 2 в положительной характеристике // Матем. сб. — 2014. — Т. 205. — № 3. — С. 41–82.

16 *Ибраев Ш.Ш.* Первые группы когомологии простых модулей над алгебраической группой типа B_3 в положительной характеристике // Молодой ученый. — 2011. — Т. 2 — № 2 (25). — С. 6–10.

17 *Ибраев Ш.Ш.* Вторые группы когомологии простых модулей над $SO_7(k)$ в положительной характеристике // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2011. — № 3 (63). — С. 16–21.

18 *Ibrayev Sh.Sh.* The second cohomology groups of simple modules for G_2 // Сиб. электрон. матем. изв. — 2011. — Т. 8. — С. 381–396.

19 *Ibrayev Sh.Sh.* The second cohomology groups of simple modules over $Sp_4(k)$ // Commun. Algebra. — 2012. — Vol. 40. — P. 1122–1130.

20 *Ибраев Ш.Ш.* О первой когомологии алгебраической группы и ее алгебры Ли в положительной характеристике // Матем. заметки. — 2014. — Т. 96. — № 4. — С. 512–521.

21 University of Georgia VIGRE Algebra Group. First cohomology for finite groups of Lie type: simple modules with small dominant weights // Trans. Amer. Math. Soc. — 2013. — Vol. 365. — P. 1025–1050.

22 University of Georgia VIGRE Algebra Group. Second cohomology for finite groups of Lie type // J. Algebra. — 2012. — Vol. 360. — P. 21–52.

23 *Jantzen J.C.* Representations of algebraic groups. — Vol. 131. — Boston: Pure and Applied Mathematics, 1987.

24 *Винберг Е.Б., Онищик А.Л.* Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. — М.: Наука, 1988.

Ш.Ш.Ыбыраев

Жай SL_2-модульдердің үшінші когомологиялары туралы

Оң сипаттамалы жай бір байланысқан алгебралық группалар үшін жай модульдердің үшінші когомологиялары аз зерттелген. Олар кейбір өлшемі кіші жай модульдер үшін және рангы 2-ге тең жай алгебралық группалар үшін белгілі. SL_2 группасы үшін жай модульдердің үшінші когомологияларының толық сипаттамасы әлі алынбаған. Мақалада сипаттамасы $p>3$ алгебралық тұйық k өрісіндегі SL_2 группасы үшін жай модульдердің үшінші когомологиялары есептелген.

Sh.Sh.Ibrayev

On the third cohomology of simple SL_2-modules

The third cohomology groups of simple modules for the simple and simply connected algebraic groups in the positive characteristic are only a few investigated. They are well-known for some simple modules of small dimension and for the simple algebraic groups of rank 2. The third cohomology groups of simple modules for SL_2 has not studied yet. In this paper the third cohomology groups of simple modules for SL_2 over algebraically closed field k of characteristic $p>3$ are calculated.

References

1 O'Halloran J. *Amer. J. Math.*, 1981, 103, p. 399–410.
2 Andersen H.H. *Amer. J. Math.*, 1984, 106, p. 489–504.
3 Bendel C.P., Nakano D.K., Pillen C. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2002, 354, 11, p. 4421–4454.
4 Kleshchev A.S., Shet J. *J. Algebra*, 1999, 221, p. 705–722.
5 Kleshchev A.S., Shet J. *J. Algebra*, 2001, 238, p. 843–844.
6 Cline E., Parshal B., Scott L. *IHES Publ. Math.*, 1975, 45, p. 169–191.
7 Cline E., Parshal B., Scott L. *J. Algebra*, 1977, 45, p. 182–198.
8 McNinch G.J. *Pacific. J. Math*, 2002, 204, 2, p. 459–472.
9 Cline E. *Ext1 for* SL_2*, Commun. Algebra*, 1979, 7, p. 107–111.
10 Yehia S.El. *Extensions of simple modules for the universal Chevalley group and parabolic subgroup*, Warwick: PhD Thesis, 1982.
11 Ye Jia-chen. *J. London Math. Soc.*, 1990, 2 (41), p. 51–62.
12 Liu Jia-chun, Ye Jia-chen. *Commun. Algebra*, 1993, 21, p. 1909–1946.
13 Stewart D.I. *Proc. Amer. Math. Soc*, 2010, 138, p. 427–434.
14 Stewart D.I. *Commun. Algebra*, 2012, 40, p. 4702–4716.
15 Dzhumadil'dayev A.S., Ibrayev Sh.Sh. *Matem. Sbornic*, 2014, 205, 3, p. 41–82.
16 Ibrayev Sh.Sh. *Young scientist*, 2011, 2, 2 (25), p. 6–10.
17 Ibrayev Sh.Sh. *Bull. Karagand. un-ta Ser. Matematics*, 2011, 3 (63), p. 16–21.
18 Ibrayev Sh.Sh. *Sib. Electron. Matem. Izv.*, 2011, 8, p. 381–396.
19 Ibrayev Sh.Sh. *Commun. Algebra*, 2012, 40, p. 1122–1130.
20 Ibrayev Sh.Sh. *Matem. Zametki*, 2014, 96, 4, p. 512–521.
21 *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2013, 365, p. 1025–1050.

22 *J. Algebra*, 2012, 360, p. 21–52.
23 Jantzen J.C. *Representations of algebraic groups*, Boston, Pure and Applied Mathematics, 131, 1987.
24 Vinberg Ye.B., Onishchik A.L. *Seminar po gruppam Li i algebraicheskim gruppam*, Moscow: Nauka, 1988.