УДК 517.95

М.Т.Дженалиев[1], Ж.Т.Жамалова[2], М.И.Рамазанов[2]

[1] *Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы;*
[2] *Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова*
(E-mail: ramamur@mail.ru)

О краевой задаче в вырождающейся области с границей, движущейся по автомодельному закону

В статье рассмотрена краевая задача для уравнения теплопроводности в области с подвижными границами. При этом область вырождается в точку в начальный момент времени. Методом тепловых потенциалов задача сводится к особому интегральному уравнению типа Вольтерра. Показано, что однородное интегральное уравнение имеет одно ненулевое решение, но при этом соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение.

Ключевые слова: краевая задача, подвижная граница, вырождающаяся область, тепловые потенциалы, особое уравнение Вольтерра.

При исследовании температурного поля в размыкающихся электрических контактах возникает необходимость решения краевых задач для уравнений нестационарного переноса в области с подвижными границами. Особенность таких задач заключается в том, что, когда размер области зависит от времени и область вырождается в точку в начальной момент времени, не удается согласовать решение уравнения теплопроводности с движением границ области теплопереноса [1].

Методом тепловых потенциалов [2] решение подобного рода краевых задач можно свести к решению особых интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода. В работе исследованы вопросы разрешимости особого интегрального уравнения Вольтерра второго рода в классе существенно ограниченных функций с заданным весом, которые возникают при решении краевых задач теории теплопроводности в областях с подвижными границами, вырождающихся в точку в начальный момент времени. В работе показано, что соответствующая однородная краевая задача имеет только тривиальное решение.

Постановка краевой задачи. Рассмотрим сопряженную краевую задачу теплопроводности в вырождающейся области (области с подвижной границей): в области $G = (x,t) : t > 0, 0 < x < \sqrt{t}$, найти решение уравнения обратной теплопроводности:

$$-\frac{\partial u}{\partial t} \equiv a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

удовлетворяющее граничным условиям:

$$u(x,t)|_{t=\infty} = 0, u(x,t)|_{x=0} = v(t), u(x,t)|_{x=t} = \omega(t), \tag{2}$$

где

$$v(t), \omega(t) \in C(R^1_+) \cap L_\infty(R^1_+) \cap L_1(R^1_+), (R^1_+) = (0,\infty). \tag{3}$$

Решение задачи (1)–(3) ищем в классе $\sqrt{t} \cdot u(x,t) \in C(R^2_+) \cap L_\infty(R^2_+)$, $(R^2_+) = R^1_+ \times R^1_+$. Если потребуется, чтобы решение было непрерывным в окрестности $t = 0$, необходимо наложить дополнительно условие согласования $v(0) = \omega(0)$.

Редукция задачи к интегральному уравнению и его решение.

Решение задачи (1)-(3) ищем в виде суммы тепловых потенциалов двойного слоя [2]:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\cdot\int_t^{\infty}\frac{-x}{(\tau-t)^{\frac{3}{2}}}exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(\tau-t)}\right)\nu(\tau d\tau)+$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_t^{\infty}\frac{\sqrt{\tau}-x}{(\tau-t)^{\frac{3}{2}}}exp\left(-\frac{(\sqrt{\tau}-x)^2}{4a^2(\tau-t)}\right)\mu(\tau)d\tau, \qquad (4)$$

где $\nu(t),\mu(t)$ пока не известны.

Известно, что функция (4) удовлетворяет уравнению (1) при любых $\nu(t)$ и $\mu(t)$. Мы принимаем, что

$$\sqrt{t}\nu(t),\sqrt{t}\mu(t)\in C(R_+^1)\cap L_\infty(R_+^1). \qquad (5)$$

Используя условия (2) и свойства тепловых потенциалов, получим следующую систему интегральных уравнений относительно неизвестных плотностей $\nu(t)$ и $\mu(t)$ [3–5]:

$$v(t)=\frac{\nu(t)}{2a^2}+\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int_t^{\infty}\frac{\sqrt{\tau}}{(\tau-t)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\tau}{4a^2(\tau-t)}}\cdot\mu(\tau)d\tau;$$

$$\omega(t)=-\frac{\mu(t)}{2a^2}+\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int_t^{\infty}\frac{\sqrt{\tau}-\sqrt{t}}{(\tau-t)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{(\sqrt{\tau}-\sqrt{t})^2}{4a^2(\tau-t)}}\cdot\mu(\tau)d\tau+$$

$$+\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int_t^{\infty}\frac{-\sqrt{t}}{(\tau-t)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{t}{4a^2(\tau-t)}}\cdot\nu(\tau)d\tau. \qquad (6)$$

Исключая из системы (6) функцию $\nu(t)$:

$$\nu(t)=-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_t^{\infty}\frac{\sqrt{\tau}}{(\tau-t)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\tau}{4a^2(\tau-t)}}\cdot\mu(\tau)d\tau, \qquad (7)$$

получим интегральное уравнение Вольтерра относительно неизвестной функции $\mu(t)$:

$$\mu(t)-\int_t^{\infty}k(t,\tau)\mu(t)d\tau=f(t),t>0, \qquad (8)$$

где

$$f(t)=-2a^2\omega(t)-\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_t^{\infty}\frac{\sqrt{t}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{t}{4a^2(t-\tau)}}\cdot v(\tau)d\tau; \qquad (9)$$

$$k(t,\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\sqrt{\tau}+\sqrt{t}}{(\tau-t)^{\frac{3}{2}}}exp\left[-\frac{(\sqrt{\tau}+\sqrt{t})^2}{4a^2(\tau-t)}\right]+\frac{\sqrt{\tau}-\sqrt{t}}{(\tau-t)^{\frac{3}{2}}}exp\left[\frac{(\sqrt{\tau}-\sqrt{t})^2}{4a^2(\tau-t)}\right]\right\}.$$

Будем искать решение уравнения (8) в классе функций

$$\sqrt{t}\cdot\mu(t)\in C(R_+^1)\cap L_\infty(R_+^1). \qquad (10)$$

Введем обозначение $\varphi(t)=\sqrt{t}\cdot\mu(t)$, тогда уравнение (8) примет вид

$$\varphi(t)-\int_t^{\infty}K(t,\tau)\cdot\varphi(\tau)d\tau=f_1(t), \qquad (11)$$

где

$$K(t,\tau)=\sqrt{\frac{t}{\tau}}\cdot k(t,\tau), f_1=\sqrt{t}\cdot f(t). \tag{12}$$

Вычислим интеграл от функции $K\{t,\tau\}$:

$$K(t,\tau)d\tau=\int_t^\infty \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{t}{\tau}}\left\{\frac{\sqrt{\tau}+\sqrt{t}}{(\tau-t)^{\frac{3}{2}}}exp\left[-\frac{(\sqrt{\tau}+\sqrt{t})^2}{4a^2(\tau-t)}\right]+\frac{\sqrt{\tau}-\sqrt{t}}{(\tau-t)^{\frac{3}{2}}}exp\left[-\frac{(\sqrt{\tau}-\sqrt{t})^2}{4a^2(\tau-t)}\right]d\tau\right\}=$$

$$=\left\|\begin{array}{c} \frac{\sqrt{\tau}-\sqrt{t}}{\sqrt{\tau}+\sqrt{t}}=\xi; \quad \sqrt{\frac{t}{\tau}}=\frac{1-\xi}{1+\xi}; \quad \tau=\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)^2 t; \quad \sqrt{\tau}-\sqrt{t}=2\sqrt{t}\frac{\xi}{1-\xi}; \\ \sqrt{\tau}+\sqrt{t}=2\sqrt{t}\frac{1}{1-\xi}; \quad \tau-t=4t\frac{\xi}{(1-\xi)^2} \quad d\tau=4t\frac{1+\xi}{(1-\xi)^3}d\xi. \end{array}\right\|=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-\frac{1}{4a^2\xi}}\cdot\frac{d\xi}{\xi^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-\frac{\xi}{4a^2}}\cdot\frac{d\xi}{\sqrt{\xi}}.$$

Далее, если произвести замены в первом интеграле $z=\dfrac{1}{2a\sqrt{\xi}}$, а во втором $-z=\dfrac{\sqrt{\xi}}{2a}$, то получим:

$$\int_t^\infty K(t,\tau)d\tau=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-z^2}dz=1. \tag{13}$$

Из соотношения (13) следует, что ядро $K(t,\tau)$ (12) обладает свойствами:

1) $K(t,\tau)\geq 0$ и непрерывно при $0<t\leq\tau<\infty$ и $\forall t>0$, $K(t,\tau)\in L_1(R_+)$;

2)
$$\int_t^\infty K(t,\tau)d\tau=1,\forall t>0. \tag{14}$$

Особенность интегрального уравнения (11) заключается в свойстве 2, из которого следует, что соответствующее неоднородное уравнение не может быть решено методом последовательных приближений.

Нужно отметить, что к подобного рода особым интегральным уравнениям приводят краевые задачи для спектрально-нагруженного параболического уравнения, когда линия нагрузки движется по закону $x=\sqrt{t}$ [4, 5].

Из равенства (14) следует, что однородное интегральное уравнение

$$\varphi(t)=\int_t^\infty K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau$$

имеет решение $\varphi(t)=C=const$.

Таким образом, однородное интегральное уравнение

$$\mu(t)-\int_t^\infty k(t,\tau)\mu(\tau)d\tau=0, \quad t>0,$$

соответствующее однородной краевой задаче

$$-\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t>0, 0<x<\sqrt{t},$$

$$u(x,t)|_{x=0}=0; u(x,t)|_{x=\sqrt{t}}=0; u(x,t)|_{t=\infty}=0, \tag{15}$$

имеет ненулевое решение $\mu(t)=\dfrac{c}{\sqrt{t}}$, где $C=const$. Далее покажем, что несмотря на это однородная задача (15) имеет только тривиальное решение.

Представим равенство (4) в виде

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t), \tag{16}$$

где

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_t^\infty \frac{-x}{(\tau-t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(-x)^2}{4a^2(\tau-t)}} \cdot \nu(\tau) d\tau;$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_t^\infty \frac{\sqrt{\tau}-x}{(\tau-t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\sqrt{\tau}-x)^2}{4a^2(\tau-t)}} \cdot \mu(\tau) d\tau.$$

Найдем функцию $u_1(x,t)$, используя равенство (7) и учитывая, что $\mu(t) = \dfrac{c}{\sqrt{t}}$:

$$u_1(x,t) = \frac{C}{(2a\sqrt{\pi})^2} \int_t^\infty \frac{-x}{(\tau-t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(-x)^2}{4a^2(\tau-t)}} [-\int_t^\infty \frac{1}{(\xi-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\xi}{4a^2(\xi-\tau)}} d\xi] =$$

$$= \frac{C}{(2a\sqrt{\pi})^2} \int_t^\infty d\xi \int_t^\infty \frac{x}{[(\tau-t)(\xi-\tau)]^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{-\frac{(-x)^2}{4a^2(\tau-t)} - \frac{\xi}{4a^2(\xi-\tau)} d\tau} =$$

$$= \left\| \frac{\xi-\tau}{\tau-t} = z^2, \tau = \frac{\xi+tz^2}{1+z^2}; d\tau = -(\xi-t) \cdot \frac{2z}{(1+z^2)^2} dz \right\| =$$

$$= \frac{C}{2a\sqrt{\pi}} \int_t^\infty \frac{x}{(\xi-t)^{\frac{3}{2}}} \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{\xi}} \right] \cdot e^{-\frac{2(-x)\cdot\sqrt{\xi}+x^2+\xi}{4a^2(\xi-t)}} d\xi =$$

$$= -\frac{C}{2a\sqrt{\pi}} \int_t^\infty \frac{\sqrt{\xi}-x}{(\xi-t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\sqrt{\xi}-x)^2}{4a^2(\xi-t)}} \cdot \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = -\frac{C}{2a\sqrt{\pi}} \int_t^\infty \frac{\sqrt{\tau}-x}{(\tau-t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\sqrt{\tau}-x)^2}{4a^2(\tau-t)}} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}.$$

Таким образом, $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) \equiv 0$, т.е. доказана
Теорема. Краевая задача (1)-(2) в классе функций

$$\sqrt{t} \cdot u(x,t), \sqrt{t} \cdot f(x,t) \in C(R_+^2) \cap L_\infty(R_+^2)$$

имеет единственное решение.

Список литературы

1 *Ким Е.И., Омельченко В.Т., Харин С.Н.* Математическое модели тепловых процессов в электрических контактах. — Алма-Ата: Наука, 1977. — 236 с.

2 *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. — Изд. 5-е. — М.: Наука, 1977. — С. 735.

3 *Амангалиева М.М., Ахманова Д.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Краевые задачи для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности с приближением линии загрузки в нуль или бесконечность // Диф. уравнения. — 2011.— Vol. 47. — No. 2. — С. 231-243.

4 *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Нагруженные уравнения – как возмущения интегральных уравнений. — Алматы: Гылым, 2010. — С. 334.

5 *Ахманова Д.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Об особом интегральном уравнении Вольтерра второго рода со спектральным параметром // Сиб. мат. журнал. — 2011. — Vol.52. — No. 1. — С. 3–14.

М.Т.Дженалиев, Ж.Т.Жамалова, М.И.Рамазанов

Автомодельді заң бойынша жылжитын шекарасы бар құлдырайтын облыстағы шеттік есеп жайында

Мақалада жылжымалы шекаралы облыста жылуөткізгiштiк теңдеуі үшін шеттік есеп қарастырылды. Сонымен бiрге облыс бастапқы уақыт кезеңінде нүктеге құлдырайды. Жылу әлеуеті әдісі көмегімен есеп Вольтерра типті ерекше интегралдық теңдеуге келеді. Авторлар біртекті интегралдық теңдеудің бір ғана нолден өзгеше шешімі бар екенін көрсетті. Және де мұнда сәйкес біртекті есеп тек қана тривиалды шешімге ие.

M.T.Jenaliyev, Zh.T.Zhamalova, M.I.Ramazanov

On a boundary value problem in a degenerate region with a boundary moving in a self-similar laws

In work the regional task for the heat conductivity equation in area with mobile borders is considered. Thus the area degenerates in a point in an initial timepoint. The task is reduced by method of thermal potentials to the special integrated equation like Voltaire. It is shown that the uniform integrated equation has one nonzero decision, but thus the corresponding uniform task has only the trivial decision.

References

1 Kim E.I., Omelchenko V.T., Harin S. *Mathematical models of thermal processes in the electrical contacts*, Alma-Ata: Gylym, 1977, 236 p.

2 Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Equations of mathematical physics*, Ed. 5, Moscow: Nauka, 1977, 735 p.

3 Amangalieva M.M., Akhmanova D.M., Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I. *Differential Equations*, 2011, 47, 2, p. 231-243.

4 Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I. *Loaded equation – as the perturbation of integral equations*, Almaty: Gylym, 2010, 334 p.

5 Akhmanova D.M., Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I. *Siberian Mathematical Journal*, 2011, 52, 1, p.3-14.