УДК 517.956.3

А.Т.Асанова[1], А.Е.Иманчиев[2]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы;*
[2] *Актюбинский региональный государственный университет*
(E-mail: assanova@math.kz)

О разрешимости нелокальной краевой задачи для нагруженных гиперболических уравнений с многоточечными условиями

В статье исследована нелокальная краевая задача для системы нагруженных гиперболических уравнений с многоточечными условиями. На основе метода введения функциональных параметров построены алгоритмы нахождения приближенного решения рассматриваемой задачи и установлены условия их сходимости. Получены условия однозначной разрешимости нелокальной краевой задачи для системы нагруженных гиперболических уравнений с многоточечными условиями в терминах исходных данных.

Ключевые слова: нагруженное гиперболическое уравнение, нелокальная задача, многоточечное условие, разрешимость, алгоритм.

Рассматривается нелокальная многоточечная краевая задача для системы нагруженных гиперболических уравнений со смешанной производной в прямоугольной области $\bar{\Omega} = [0,T] \times [0,\omega]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u +$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\Big\{P_i(x)\frac{\partial u(\theta_i,x)}{\partial x} + Q_i(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=\theta_i} + S_i(x)u(\theta_i,x)\Big\} + f(t,x) \qquad (1)$$

с условиями

$$u(t,0) = \psi(t), \qquad t \in [0,T], \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{m}\Big\{K_j(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{t=t_j} + L_j(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=t_j} + M_j(x)u(t,x)\Big|_{t=t_j}\Big\} = \varphi(x), \quad x \in [0,\omega], \qquad (3)$$

где $u = colon(u_1, u_2, ..., u_n)$, $(n \times n)$ – матрицы $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $P_i(x)$, $Q_i(x)$, $S_i(x)$, $i = \overline{1,k}$; $K_j(x)$, $L_j(x)$, $M_j(x)$, $j = \overline{1,m}$, n-вектор-функции. $f(t,x)$, $\varphi(x)$ являются непрерывными на $\bar{\Omega}$, $[0,\omega]$ соответственно, линии нагрузки $0 < \theta_1 < \theta_2 < ... < \theta_{k-1} < \theta_k < T$; n-вектор-функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$, линии в граничном условии $0 = t_1 < t_2 < ... < t_{m-1} < < t_m = T$.

Пусть $C(\bar{\Omega}, R^n)$ — пространство непрерывных на Ω вектор-функций $u(t,x)$ с нормой

$$||u||_0 = \max_{(t,x)\in\bar{\Omega}} ||u(t,x)||,$$

$$||u(t,x)|| = \max_{i=\overline{1,n}} |u_i(t,x)|.$$

Функция $u(t,x) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, имеющая частные производные

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in C(\bar{\Omega}, R^n), \ \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in C(\bar{\Omega}, R^n), \ \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x} \in C(\bar{\Omega}, R^n),$$

называется классическим решением задачи (1)–(3), если она удовлетворяет системе (1) при всех $(t,x) \in \bar{\Omega}$ и выполнены краевые условия (2), (3).

Математическое моделирование различных процессов физики, химии, биологии, экологии, геологии приводит к нагруженным дифференциальным уравнениям [1-4]. Нагруженные дифференциальные уравнения и краевые задачи для них исследовались в работах многих авторов, обзор и библиографию можно посмотреть в [4–12]. Были установлены условия классической, обобщенной разрешимости начально-краевых, локальных и нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений с нагрузками различных типов [5–12].

В работах [13–16] для исследования и решения двухточечных краевых задач для нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений был применен метод параметризации [17]. Указанный метод был разработан для решения линейных и нелинейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. На его основе были получены критерии однозначной, корректной разрешимости линейных двухточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в терминах исходных данных и предложены алгоритмы нахождения их решений. Методом параметризации были установлены необходимые и достаточные условия однозначной, корректной разрешимости двухточечных краевых задач для систем нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений [13-16].

Как известно, исследования многоточечных краевых задач являются важными в прикладном плане, так как имеют прямое отношение к теории сплайна и интерполирования, а также используются в теории многоопорных балок [18-21]. Основным аппаратом исследования и решения многоточечных краевых задач остается метод функций Грина, отражающий специфику краевой задачи, построение которой сопряжено с большими трудностями, ввиду сложности объекта и недостаточной изученности ее свойств. Одним из путей преодоления трудностей является разработка конструктивных методов исследования и решения многоточечных краевых задач для нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений, не использующих фундаментальную матрицу и функцию Грина. В работе [22] метод параметризации был применен к многоточечным краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. На его основе были получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости рассматриваемых задач без использования фундаментальной матрицы и функции Грина, а также построены алгоритмы нахождения решений.

В работах [23, 24] для исследования краевых задач с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений был предложен метод введения функциональных параметров, являющийся обобщением метода параметризации на гиперболические уравнения. Были получены условия классической разрешимости рассматриваемой задачи в терминах исходных данных. На основе эквивалентности корректных разрешимостей семейства краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и нелокальной задачи для систем гиперболических уравнений были установлены коэффициентные критерии корректной разрешимости последней задачи [25–27]. Метод параметризации и его обобщение были развиты на семейство периодических краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений и на полупериодические краевые задачи для систем нагруженных гиперболических уравнений со смешанными производными [28–30].

В настоящей работе исследуются вопросы существования единственного решения и построения алгоритмов нахождения приближенных решений нелокальной задачи для систем нагруженных гиперболических уравнений с многоточечными условиями (1)–(3). Ранее многоточечные краевые задачи (1)–(3) при отсутствии нагруженных слагаемых, т.е. при $P_i(x) = Q_i(x) = S_i(x) = 0$, $i = \overline{1,k}$, были решены с помощью подхода из [25-27]. Были установлены условия однозначной разрешимости исследуемой задачи, и предложены алгоритмы нахождения решения [31, 32].

В данной работе результаты работы [32] развиваются на класс нагруженных гиперболических уравнений. Построены алгоритмы нахождения приближенных решений нелокальной задачи для системы нагруженных гиперболических уравнений с многоточечными условиями, и доказана их сходимость.

Вводятся новые неизвестные функции $v(t,x)=\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}$, $w(t,x)=\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}$, и задача (1)–(3) сводится к следующей эквивалентной задаче:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=A(t,x)v+\sum_{i=1}^{k}P_i(x)v(\theta_i,x)+f(t,x)+$$

$$+B(t,x)w(t,x)+C(t,x)u(t,x)+\sum_{i=1}^{k}\Big\{Q_i(x)w(\theta_i,x)+S_i(x)u(\theta_i,x)\Big\},\quad (t,x)\in\bar{\Omega};\tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\Big\{K_j(x)v(t_j,x)+L_j(x)w(t_j,x)+M_j(x)u(t_j,x)\Big\}=\varphi(x),\qquad x\in[0,\omega];\tag{5}$$

$$u(t,x)=\psi(t)+\int_0^x v(t,\xi)d\xi,\qquad w(t,x)=\dot{\psi}(t)+\int_0^x\frac{\partial v(t,\xi)}{\partial t}d\xi.\tag{6}$$

В задаче (4)–(6) условие $u(t,0)=\psi(t)$ учтено в соотношениях (6).

Тройка непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций $\{v(t,x),\,u(t,x),\,w(t,x)\}$ называется решением задачи (4)–(6), если функция $v(t,x)\in C(\bar{\Omega},R^n)$ имеет непрерывную на $\bar{\Omega}$ производную по t и удовлетворяет однопараметрическому семейству многоточечных краевых задач для систем нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений (4)–(5), где функции $u(t,x)$, $w(t,x)$ связаны с $v(t,x)$, $\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t}$ функциональными соотношениями (6).

При фиксированных $w(t,x)$, $u(t,x)$ в задаче (4)–(6) требуется найти решение из $C(\bar{\Omega},R^n)$ однопараметрического семейства многоточечных краевых задач для систем нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений, которое требует специального изучения.

Рассмотрим семейство многоточечных краевых задач для системы нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t}=A(t,x)v+\sum_{i=1}^{k}P_i(x)v(\theta_i,x)+F(t,x),\qquad t\in[0,T],\quad x\in[0,\omega],\quad v\in R^n;\tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{m}K_j(x)v(t_j,x)=\Phi(x),\qquad x\in[0,\omega].\tag{8}$$

Непрерывная функция $v:\bar{\Omega}\to R^n$, имеющая на $\bar{\Omega}$ непрерывную производную по t, называется решением краевой задачи (7), (8), если она удовлетворяет системе (7) и условию (8) соответственно при всех $(t,x)\in\bar{\Omega}$, $x\in[0,\omega]$.

При фиксированных $x\in[0,\omega]$ задача (7), (8) является линейной многоточечной краевой задачей для нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений. Вопросы разрешимости многоточечных задач для нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений остаются открытыми и требуют специального изучения. При изменении переменной x на $[0,\omega]$ получаем семейство многоточечных краевых задач для нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Метод параметризации [17] будет применен к семейству многоточечных краевых задач для системы нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений (7), (8), зависящему от параметра $x\in[0,\omega]$.

Приведем схему метода. Используя линии нагрузки $t=\theta_i$, $i=\overline{1,k}$, произведем разбиение области $[0,T)\times[0,\omega]=\bigcup\limits_{r=1}^{k+1}\Omega_r$, $\Omega_r=[\theta_{r-1},\theta_r)\times[0,\omega]$, где $\theta_0=0$, $\theta_{k+1}=T$. Пусть функция $v(t,x)$ —

решение задачи (7)–(8); v_r — сужение функции v на Ω_r, т.е. $v_r : \Omega_r \to R^n$ и $v_r(t,x) = v(t,x)$ при $(t,x) \in \Omega_r$; $r = \overline{1,k+1}$, $\lim\limits_{t\to T-0} v_{k+1}(t,x) = v(T,x)$ при $x \in [0,\omega]$. Тогда задача (7), (8) будет эквивалентна семейству многоточечных краевых задач:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = A(t,x)v_r + \sum_{i=1}^{k} P_i(x)v_{i+1}(\theta_i,x) + F(t,x), \qquad (t,x) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1,k+1}; \tag{9}$$

$$K_1(x)v_1(0,x) + \sum_{j=2}^{m-1} K_j(x)v_{r_j}(t_j,x) + K_m(x)\lim_{t\to T-0} v_{k+1}(t,x) = \Phi(x), \qquad x \in [0,\omega]; \tag{10}$$

$$\lim_{t\to\theta_p-0} v_p(t,x) = v_{p+1}(\theta_p,x), \qquad x \in [0,\omega], \quad p = \overline{1,k}. \tag{11}$$

Здесь r_j — номер области, которой принадлежит линия t_j: $(t_j,x) \in [\theta_{r_j-1},\theta_{r_j}) \times [0,\omega]$, $1 = r_1 \leq$ $\leq r_2 \ \leq r_3 \leq ... \leq r_m = k+1$. В условии (10) также учтено, что $0 = t_1$, $T = t_m$. Равенства (11) являются условиями склеивания или непрерывности решения во внутренних линиях разбиения. При отсутствии разбиения отсутствует также условие (11).

Пусть $C(\bar{\Omega},\Omega_r,R^{n(k+1)})$ — пространство систем функций

$$v([t],x) = (v_1(t,x), v_2(t,x), ..., v_{k+1}(t,x))',$$

где функция $v_r : \Omega_r \longrightarrow R^n$ непрерывна и равномерно относительно $x \in [0,\omega]$ имеет конечный левосторонний предел $\lim\limits_{t\to\theta_r-0} v_r(t,x)$, $r = \overline{1,k+1}$, с нормой $||v||_1 = \max\limits_{r=\overline{1,k+1}} \sup\limits_{(t,x)\in\Omega_r} ||v_r(t,x)||$.

Решением семейства многоточечных краевых задач (9)–(11) является система функций

$$v([t],x) = (v_1(t,x), v_2(t,x), ..., v_{k+1}(t,x))' \in C(\bar{\Omega},\Omega_r,R^{n(k+1)}),$$

где $v_r(t,x)$ — сужение функции $v(t,x)$ на Ω_r, непрерывно дифференцируемая и ограниченная на Ω_r (здесь в начальных отрезках линий $t = \theta_{r-1}$ функция $v_r(t,x)$ имеет правостороннюю производную), $r = \overline{1,k+1}$.

Эквивалентность задач (7), (8) и (9)–(11) заключается в следующем. Функция $v(t,x)$, определяемая равенствами

$$v(t,x) = v_r(t,x), \quad (t,x) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1,k+1}, \qquad v(T,x) = \lim_{t\to T-0} v_{k+1}(t,x), \quad x \in [0,\omega],$$

удовлетворяет системе уравнений (7) при всех $(t,x) \in \bar{\Omega}$ и условию (8) при всех $x \in [0,\omega]$. Если $v(t,x)$ — решение семейства краевых задач (7), (8), то система его сужений $\{v_r(t,x)\}$, $r = \overline{1,k+1}$, является решением семейства многоточечных краевых задач (9)–(11). И наоборот, если система функций $v([t],x) = (v_1(t,x), v_2(t,x), ..., v_{k+1}(t,x))' \in C(\bar{\Omega},\Omega_r,R^{n(k+1)})$ – решение задачи (9)–(11), то функция $v(t,x)$, получаемая склеиванием систем функций $\{v_r(t,x)\}, r =$ $= \overline{1,k+1}$, будет решением исходного семейства краевых задач (7), (8). Из непрерывности коэффициентов $A(t,x)$, правой части $F(t,x)$ и функции $v(t,x)$ вытекает непрерывность $\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t}$.

Через $\lambda_r(x)$ обозначим значение функции $v_r(t,x)$ при $t = \theta_{r-1}$ и в каждой области $(t,x) \in \Omega_r$ осуществим замену $\widetilde{v}_r(t,x) = v_r(t,x) - \lambda_r(x)$. Тогда задача (9)–(11) сводится к эквивалентной краевой задаче с неизвестными параметр-функциями $\lambda_r(x)$:

$$\frac{\partial \widetilde{v}_r}{\partial t} = A(t,x)\widetilde{v}_r + A(t,x)\lambda_r(x) + \sum_{i=1}^{k} P_i(x)\lambda_{i+1}(x) + F(t,x),$$

$$\widetilde{v}_r(\theta_{r-1},x) = 0, \qquad (t,x) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1,k+1}; \tag{12}$$

$$K_1(x)\lambda_1(x)+\sum_{j=2}^{m-1}K_j(x)\lambda_{r_j}(x)+K_m(x)\lambda_{k+1}(x)+$$

$$+\sum_{j=2}^{m-1}K_j(x)\widetilde{v}_{r_j}(t_j,x)+K_m(x)\lim_{t\to T-0}\widetilde{v}_{k+1}(t,x)=\Phi(x),\qquad x\in[0,\omega]; \tag{13}$$

$$\lambda_s(x)+\lim_{t\to\theta_s-0}\widetilde{v}_s(t,x)=\lambda_{s+1}(x),\qquad x\in[0,\omega],\quad s=\overline{1,k}. \tag{14}$$

Решением задачи (12)–(14) является пара $(\lambda^*(x),\widetilde{v}^*([t],x))$, $\lambda^*(x)=(\lambda_1^*(x),\lambda_2^*(x),...,\lambda_{k+1}^*(x))'\in$ $\in C([0,\omega],R^{n(k+1)})$, $\widetilde{v}^*([t],x)=(\widetilde{v}_1^*(t,x),\widetilde{v}_2^*(t,x),...,\widetilde{v}_{k+1}^*(t,x))'\in C(\bar{\Omega},\Omega_r,R^{n(k+1)})$, где функции $\widetilde{v}_r^*(t,x)$ непрерывно дифференцируемы на Ω_r и при $\lambda_r(x)=\lambda_r^*(x)$, $r=\overline{1,k+1}$, удовлетворяют задаче Коши (12) при всех $(t,x)\in\Omega_r$ и условиям (13), (14) при всех $x\in[0,\omega]$, $r=\overline{1,k+1}$. Здесь $C([0,\omega],R^{n(k+1)})$ — пространство функций $\lambda^*(x)=(\lambda_1^*(x),\lambda_2^*(x),...,\lambda_{k+1}^*(x))'$, где функция $\lambda_r:[0,\omega]\longrightarrow R^n$ непрерывна на $[0,\omega]$ с нормой $||\lambda||_2=\max\limits_{r=\overline{1,k+1}}\max\limits_{x\in[0,\omega]}||\lambda_r(x)||$.

Задачи (7), (8) и (12)–(14) эквивалентны в следующем смысле. Если функция $v(t,x)$ является решением задачи (7), (8), то пара $(\lambda(x),\widetilde{v}([t],x))$ с компонентами $\lambda_r(x)=v(\theta_{r-1},x)$, $\widetilde{v}_r(t,x)=$ $=v(t,x)-v(\theta_{r-1},x)$, $(t,x)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,k+1}$, будет решением задачи (12)–(14). И наоборот, если пара $(\lambda^*(x),\widetilde{v}^*([t],x))$, где $\lambda^*(x)=(\lambda_1^*(x),\lambda_2^*(x),...,\lambda_{k+1}^*(x))'$, $\widetilde{v}^*([t],x)=(\widetilde{v}_1^*(t,x),\ \widetilde{v}_2^*(t,x),$ $...,\widetilde{v}_{k+1}^*(t,x))'$ – решение задачи (12)–(14), то функция $v^*(t,x)$, определяемая равенствами

$$v^*(t,x)=\lambda_r^*(x)+\widetilde{v}_r^*(t,x),(t,x)\in\Omega_r,\ r=\overline{1,k+1};v^*(T,x)=\lambda_{k+1}^*(x)+\lim_{t\to T-0}\widetilde{v}_{k+1}^*(t,x),x\in[0,\omega],$$

является решением задачи (7), (8). Из непрерывности и ограниченности функций $\widetilde{v}_r^*(t,x)$ на Ω_r, $r=\overline{1,k+1}$, следует существование левосторонних пределов $\lim\limits_{t\to\theta_r-0}\widetilde{v}_r^*(t,x)$, а значения $\widetilde{v}_1^*(0,x)$, $\widetilde{v}_{r_j}^*(t_j,x)$, $j=\overline{2,m-1}$, $\lim\limits_{t\to T-0}\widetilde{v}_{k+1}^*(t,x)$ удовлетворяют условию (13) при всех $x\in[0,\omega]$.

В отличие от (9)–(11) в задаче (12)–(14) появились начальные условия $\widetilde{v}_r(\theta_{r-1},x)=0$. При фиксированных $\lambda_r(x)$ функция $\widetilde{v}_r(t,x)$ является решением задачи Коши (12), эквивалентной семейству систем интегральных уравнений:

$$\widetilde{v}_r(t,x)=\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t}\Big[A(\tau,x)\widetilde{v}_r(\tau,x)+A(\tau,x)\lambda_r(x)+F(\tau,x)\Big]d\tau+$$

$$+(t-\theta_{r-1})\sum_{i=1}^{k}P_i(x)\lambda_{i+1}(x),\ r=\overline{1,k+1}. \tag{15}$$

Подставив вместо $\widetilde{v}_r(\tau,x)$ правую часть (15) и повторив этот процесс ν ($\nu\in\mathbb{N}$) раз, получим:

$$\widetilde{v}_r(t,x)=D_{\nu,r}(t,x)\lambda_r(x)+\widetilde{D}_{\nu,r}(t,x)\sum_{i=1}^{k}P_i(x)\lambda_{i+1}(x)+G_{\nu,r}(t,x,\widetilde{v}_r)+F_{\nu,r}(t,x), \tag{16}$$

где

$$D_{\nu,r}(t,x)=\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t}A(\tau_1,x)d\tau_1+\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t}A(\tau_1,x)\int\limits_{\theta_{r-1}}^{\tau_1}A(\tau_2,x)d\tau_2d\tau_1+$$

$$+...+\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t}A(\tau_1,x)...\int\limits_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}A(\tau_{\nu-1},x)\int\limits_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}A(\tau_\nu,x)d\tau_\nu...d\tau_1,$$

$$\widetilde{D}_{\nu,r}(t,x) = t-\theta_{r-1} + \int\limits_{\theta_{r-1}}^{t} A(\tau_1,x)(\tau_1-\theta_{r-1})d\tau_1 + \int\limits_{\theta_{r-1}}^{t} A(\tau_1,x)\int\limits_{\theta_{r-1}}^{\tau_1} A(\tau_2,x)(\tau_2-\theta_{r-1})d\tau_2 d\tau_1 +$$

$$+ ... + \int\limits_{\theta_{r-1}}^{t} A(\tau_1,x) ... \int\limits_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1},x)\int\limits_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu,x)(\tau_\nu-\theta_{r-1})d\tau_\nu ... d\tau_1,$$

$$G_{\nu,r}(t,x,\widetilde{v}_r) = \int\limits_{\theta_{r-1}}^{t} A(\tau_1,x) ... \int\limits_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1},x)\int\limits_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu,x)\widetilde{v}_r(\tau_\nu,x)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} ... d\tau_1,$$

$$F_{\nu,r}(t,x) = \int\limits_{\theta_{r-1}}^{t} F(\tau_1,x)d\tau_1 + \int\limits_{\theta_{r-1}}^{t} A(\tau_1,x)\int\limits_{\theta_{r-1}}^{\tau_1} F(\tau_2,x)d\tau_2 d\tau_1 + ... +$$

$$+ \int\limits_{\theta_{r-1}}^{t} A(\tau_1,x) ... \int\limits_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1},x)\int\limits_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} F(\tau_\nu,x)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} ... d\tau_1.$$

Из (16) найдем $\lim\limits_{t\to\theta_r-0}\widetilde{v}_r(t,x)$, $r=\overline{1,k+1}$, $x\in[0,\omega]$, $\widetilde{v}_{r_j}(t_j,x)$, $j=\overline{2,m-1}$. Подставляя их в (13) и (14), предварительно умножив (13) на $h=\theta_{k+1}-\theta_k>0$, относительно функциональных параметров $\lambda_r(x)$, $r=\overline{1,k+1}$, получим систему уравнений:

$$hK_1(x)\lambda_1(x) + h\sum_{j=2}^{m}K_j(x)[I+D_{\nu r_j}(t_j,x)]\lambda_{r_j}(x) + h\sum_{j=2}^{m}K_j(x)\widetilde{D}_{\nu r_j}(t_j,x)\sum_{i=1}^{k}P_i(x)\lambda_{i+1}(x) =$$

$$= h\Phi(x) - h\sum_{j=2}^{m}K_j(x)F_{\nu r_j}(t_j,x) - h\sum_{j=2}^{m}K_j(x)G_{\nu r_j}(t_j,x,\widetilde{v}_{r_j}), \quad x\in[0,\omega]; \tag{17}$$

$$[I+D_{\nu s}(\theta_s,x)]\lambda_s(x) - \lambda_{s+1}(x) = -F_{\nu s}(\theta_s,x) - G_{\nu s}(\theta_s,x,\widetilde{v}_s), \qquad s=\overline{1,k}, \tag{18}$$

где I – единичная матрица размерности n.

Запишем систему уравнений (17), (18) в виде

$$Q_\nu(x)\lambda(x) = -F_\nu(x) - G_\nu(x,\widetilde{v}), \tag{19}$$

где матрица $Q_\nu(x)$ размерности $(n(k+1)\times n(k+1))$ определяется левой частью (17), (18), а $n(k+1)$-векторы $F_\nu(x)$, $G_\nu(x,\widetilde{v})$ имеют вид

$$G_\nu(x,\widetilde{v}) = \big(h\sum_{j=2}^{m}K_j(x)G_{\nu r_j}(t_j,x,\widetilde{v}_{r_j}), G_{\nu,1}(\theta_1,x,\widetilde{v}_1), \ldots, G_{\nu,k}(\theta_k,x,\widetilde{v}_k)\big)',$$

$$F_\nu(x) = (-h\Phi(x) + h\sum_{j=2}^{m}K_j(x)F_{\nu r_j}(t_j,x), F_{\nu,1}(\theta_1,x), ..., F_{\nu,k}(\theta_k,x))'.$$

Если известна $\widetilde{v}([t],x)\in C(\bar{\Omega},\Omega_r,R^{n(k+1)})$, с компонентами $\widetilde{v}_r(t,x)$, то из (19) можно найти $\lambda(x)\in C([0,\omega],R^{n(k+1)})$ с компонентами $\lambda_r(x)$, $r=\overline{1,k+1}$. И наоборот, если известна $\lambda(x)\in$ $\in C([0,\omega],R^{n(k+1)})$, то из (12) можно найти $\widetilde{v}([t],x)\in C(\bar{\Omega},\Omega_r,R^{n(k+1)})$. Так как неизвестны как система функций $\widetilde{v}([t],x)$, так и функциональный параметр $\lambda(x)$, то применяется итерационный метод. Решение задачи (12)–(14) – пара $(\lambda^*(x), \widetilde{v}^*([t],x)) \in C([0,\omega], R^{n(k+1)}) \times C(\bar{\Omega}, \Omega_r, R^{n(k+1)})$ с компонентами $(\lambda^*_r(x), \widetilde{v}^*_r(t,x))$, $r == \overline{1,k+1}$, находим как предел последовательности:

$$(\lambda^{(k)}(x), \widetilde{v}^{(k)}([t],x)) \in C([0,\omega], R^{nN}) \times C(\bar{\Omega}, \Omega_r, R^{n(k+1)})$$

с компонентами $(\lambda^{(l)}_r(x), \widetilde{v}^{(l)}_r(t,x))$, $r = \overline{1,k+1}$, $l = 0,1,2,...$, определяемой по следующему алгоритму:

0-Шаг. Предполагая, что матрица $Q_\nu(x) : R^{n(k+1)} \to R^{n(k+1)}$ обратима для всех $x \in [0,\omega]$, начальное приближение по функциональному параметру $\lambda^{(0)}(x) = (\lambda^{(0)}_1(x), \lambda^{(0)}_2(x), ..., \lambda^{(0)}_N(x))' \in \in C([0,\omega], R^{n(k+1)})$ определяем из системы линейных уравнений $Q_\nu(x)\lambda(x) = -F_\nu(x)$. На Ω_r, решая семейство задач Коши (12) при $\lambda_r(x) = \lambda^{(0)}_r(x)$, $r = \overline{1,k+1}$, находим

$$\widetilde{v}^{(0)}([t],x) = (\widetilde{v}^{(0)}_1(t,x), \widetilde{v}^{(0)}_2(t,x), ..., \widetilde{v}^{(0)}_{k+1}(t,x))' \in C(\bar{\Omega}, \Omega_r, R^{n(k+1)}).$$

1-Шаг. Подставив вместо $\widetilde{v}([t],x)$ найденную функцию $\widetilde{v}^{(0)}([t],x)$, из систем уравнений (19) определяем $\lambda^{(1)}(x) = (\lambda^{(1)}_1(x), \lambda^{(1)}_2(x), ..., \lambda^{(1)}_{k+1}(x))' \in C([0,\omega], R^{n(k+1)})$. На Ω_r, решая семейство задач Коши (12) при $\lambda_r(x) = \lambda^{(1)}_r(x)$, $r = \overline{1,k+1}$, находим $\widetilde{v}^{(1)}([t],x) = (\widetilde{v}^{(1)}_1(t,x)$, $\widetilde{v}^{(1)}_2(t,x)$, ..., $\widetilde{v}^{(1)}_{k+1}(t,x))' \in C(\bar{\Omega}, \Omega_r, R^{n(k+1)})$.
И т.д.

l-Шаг. Подставив вместо $\widetilde{v}([t],x)$ найденную функцию $\widetilde{v}^{(l-1)}([t],x)$, из систем уравнений (19) определяем $\lambda^{(l)}(x) = (\lambda^{(l)}_1(x), \lambda^{(l)}_2(x), ..., \lambda^{(l)}_{k+1}(x))' \in C([0,\omega], R^{n(k+1)})$. На Ω_r, решая семейство задач Коши (12) при $\lambda_r(x) = \lambda^{(l)}_r(x)$, $r = \overline{1,k+1}$, находим $\widetilde{v}^{(l)}([t],x) = (\widetilde{v}^{(l)}_1(t,x)$, $\widetilde{v}^{(l)}_2(t,x)$, ..., $\widetilde{v}^{(l)}_{k+1}(t,x))' \in C(\bar{\Omega}, \Omega_r, R^{n(k+1)})$, $l = 0,1,2,...$.

Метод параметризации процесс нахождения неизвестных функций разбивает на две части:

1) нахождение введенных параметров $\lambda_r(x)$ из системы функциональных уравнений (19);

2) нахождение неизвестных функций $\widetilde{v}_r(t,x)$ из семейства задач Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (12).

Достаточные условия осуществимости и сходимости предложенного выше алгоритма, которые одновременно обеспечивают однозначную разрешимость задачи (7), (8), дает следующая

Теорема 1. Пусть при некотором $\nu \in \mathbb{N}$ матрица $Q_\nu(x) : R^{n(k+1)} \to R^{n(k+1)}$ обратима для всех $x \in [0,\omega]$ и выполняются неравенства:

a) $||[Q_\nu(x)]^{-1}|| \le \gamma_\nu(x)$, здесь $\gamma_\nu(x)$ — положительная, непрерывная по $x \in [0,\omega]$ функция,

b) $q_\nu(x) = \gamma_\nu(x) \cdot \max\Big(h \sum\limits_{j=2}^{m} ||K_j(x)||, 1\Big) \Big[e^{\alpha(x)\tilde{h}} - \sum\limits_{p=0}^{\nu} \frac{[\alpha(x)\tilde{h}]^p}{p!}\Big] \le \chi < 1,$

где $\tilde{h} = \max\Big(h, \max\limits_{i=\overline{1,k}}(\theta_i - \theta_{i-1})\Big)$, $\quad \chi - const.$

Тогда задача (7), (8) имеет единственное решение $v^*(t,x) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$. Доказательство теоремы проводится по приведенному выше алгоритму, аналогично доказательству теоремы 1 из [31].

Теорема 2. Пусть при некотором $\nu \in \mathbb{N}$ матрица $Q_\nu(x) : R^{n(k+1)} \to R^{n(k+1)}$ обратима для всех $x \in [0,\omega]$ и выполняются неравенства a), b) теоремы 1. Тогда краевая задача (1)–(3) имеет единственное классическое решение $u^*(t,x) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$.

Схема доказательства теоремы 2 аналогична схеме доказательства теоремы 2 из [32].

Список литературы

1 *Нахушев А.М.* Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги // Диф. уравнения. — 1979. — Т.15. — № 1. — С.96–105.

2 *Нахушев А.М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Диф. уравнения. — 1982. — Т.18. — № 1. — С.72–81.

3 *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их приложения // Диф. уравнения. — 1983. — Т.19. — № 1. — С.86–94.

4 *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высш. шк., 1995.

5 *Дженалиев М.Т.* Краевые задачи и задачи оптимального управления для линейных нагруженных уравнений гиперболического типа // Диф. уравнения. — 1992. — Т.28. — № 2. — С.232–241.

6 *Дженалиев М.Т.* К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. — Алматы: Компьютерный центр ИТПМ, 1995.

7 *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* О разрешимости граничных задач для нагруженных уравнений // Мат. журнал. — 2001. — Т.1. — № 1. — С.21–29.

8 *Рамазанов М.И.* О нелокальной задаче для нагруженного уравнения гиперболо-эллиптического типа в прямоугольной области // Мат. журнал. — 2002. — Т.2. — № 4(6). — С.75–81.

9 *Пулькина Л.С.* Нелокальная задача для нагруженного гиперболического уравнения // Тр. Мат. ин-та РАН им. В.А.Стеклова. — 2002. — Т.236. — С.298–303.

10 *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. — М.: Наука, 2006.

11 *Волынская М.Г.* О разрешимости одной смешанной задачи для нагруженного гиперболического уравнения // Вестн. СамГУ. Естественно-науч. сер. — 2008. — № 6(65). — С.40–49.

12 *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. — Алматы: Ғылым, 2010.

13 *Бакирова Э.А.* О признаке однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений // Известия НАН РК. Сер.физ-матем. — 2005. — № 1. — С.95–102.

14 *Бакирова Э.А.* О необходимых и достаточных условиях однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений // Мат. журнал. — 2005. — Т.5. — № 3. — С.25–34.

15 *Кадирбаева Ж.М.* Об одном алгоритме нахождения решения линейной двухточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений // Мат. журнал. — 2009. — Т.9. — № 2(32). — С.64–70.

16 *Кадирбаева Ж.М.* О необходимых и достаточных условиях однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений // Мат. журнал. — 2009. — Т.9. — № 4(34). — С.63–71.

17 *Джумабаев Д.С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал вычисл. математики и мат. физики. — 1989. — Т.29. — № 1. — С.50–66.

18 *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. — Киев: Наук. думка, 1984.

19 *Кигурадзе И.Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Современные проблемы математики. Новейшие достижения. — М.: Наука, 1987. — Т.30. — С.3–103.

20 *Митропольский Ю.А., Урманчева Л.Б.* О двухточечной задаче для систем гиперболических уравнений // Укр. мат. журнал. — 1990. — Т.42. — № 12. — С.1657–1663.

21 *Урманчева Л.Б.* Двухточечные и многоточечные задачи для систем уравнений с частными производными гиперболического типа. Киев: Ин-т мат. АН Украины, 1993. Препринт 93.2. — 40 с.

22 *Джумабаев Д.С., Иманчиев А.Е.* Корректная разрешимость линейной многоточечной краевой задачи // Мат. журнал. — 2005. — Т.5. — № 1(15). — С.30–38.

23 *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* Однозначная разрешимость краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений // Журнал вычисл. математики. и мат. физики. — 2002. — Т.42. — № 11. — С.1673–1685.

24 *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* Однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Диф. уравнения. — 2003. — Т.39. — №10. — С.1343–1354.

25 *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* О корректной разрешимости нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Докл. РАН. — 2003. — Т.391. — №3. — С.295–297.

26 *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* Корректная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений // Диф. уравнения. — 2005. — Т.41. — № 3. — С.337–346.

27 *Asanova A.T., Dzhumabaev D.S.* Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2013. — Vol.402. — № 1. — P.167–178.

28 *Джумабаев Д.С., Кадирбаева Ж.М.* Об одном приближенном методе нахождения решения полупериодической краевой задачи для систем нагруженных гиперболических уравнений // Вестн. КазНУ им. аль-Фараби. Сер. мат., мех., информ. — 2010. —No 1. — С.105–112.

29 *Кадирбаева Ж.М.* Об однозначной разрешимости линейной нелокальной краевой задачи для систем нагруженных гиперболических уравнений // Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. — 2011. — № 5(279). — С.19–23.

30 *Кадирбаева Ж.М.* Об одном приближенном методе нахождения решения нелокальной краевой задачи для систем нагруженных гиперболических уравнений // Вестн. КазНУ им. аль-Фараби. Сер. матем., мех., инф. — 2014. — № 5. — С.56–67.

31 *Асанова А.Т.* О разрешимости семейства многоточечных краевых задач для дифференциальных уравнений и их приложения к нелокальным краевым задачам // Мат. журнал. — 2013. — Т.13. — № 3(49). — С.43–55.

32 *Асанова А.Т.* О многоточечной задаче для системы гиперболических уравнений со смешанной производной // Нелинейные колебания. — 2014. — Т.17. — № 3. — С.295–313.

А.Т.Асанова, А.Е.Иманчиев

Жүктелген гиперболалық теңдеулер үшін көпнүктелі шарттары бар бейлокал шеттік есептің шешімділігі туралы

Мақалада жүктелген гиперболалық теңдеулер үшін көпнүктелі шарттары бар бейлокал шеттік есеп зерттелді. Функционалдық параметрлер енгізу әдісінің негізінде қарастырылып отырған есептің жуық шешімін табу алгоритмдері тұрғызылған және олардың жинақтылық шарттары тағайындалған. Жүктелген гиперболалық теңдеулер үшін көпнүктелі шарттары бар бейлокал шеттік есептің бірмәнді шешілімділігінің шарттары бастапқы берілімдер терминдерінде алынған.

A.T.Assanova , A.E.Imanchiev

On the solvability of a nonlocal boundary value problem for a loaded hyperbolic equations with multi-point conditions

The nonlocal boundary value problem for the system of loaded hyperbolic equations with multi-point conditions are investigated. On the basis of a method of an introduction functional parameters an algorithms of finding approximate solution to considering problem are constructed and conditions their convergence are established. The conditions of an unique solvability to the nonlocal boundary value problem for the system of loaded hyperbolic equations with multi-point conditions are obtained in the terms of initial data.

References

1 Nakhushev A.M. *Differential Equations*, 1979, 15, 1, p.96–105.
2 Nakhushev A.M. *Differential Equations*, 1982, 18, 1, p.72-81.
3 Nakhushev A.M. *Differential Equations*, 1983, 19, 1, p.86-94.
4 Nakhushev A.M. *Equations of mathematical biology*, Moscow: Vyshasshya shkola, 1995.
5 Dzhenaliev M.T. *Differential Equations*, 1992, 28, 2, p. 232-241.
6 Dzhenaliev M.T. *On the theory of linear boundary value problems for loaded differential equations*, Almaty: Computer center ITAM, 1995.
7 Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I. *Mathematical journal*, 2001, 1, 1, p. 21–29.
8 Ramazanov M.I. *Mathematical journal*, 2002, 2, 4(6), p. 75–81.
9 Pulkina L.S.*Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2002, 236, p. 298–303.
10 Nakhushev A.M. *Problems with shift for partial differential equations*, Moscow: Nauka, 2006.
11 Volynskaya M.G. *Bulletin of Samara State University.* Ser. Estestvenno-nauchnaya, 2008, 6(65), p. 40–49.
12 Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I. *Loaded equations as perturbation of a differential equations*, Almaty: Gylym, 2010.
13 Bakirova E.A. *News of the National Academy of sciences of the Republic of Kazakhstan.* Ser. Fiz-matem, 2005, 1, p. 95–102.
14 Bakirova E.A. *Mathematical journal*, 2005, 5, 3, p. 25–34.
15 Kadirbayeva Zh.M. *Mathematical journal*, 2009, 9, 2(32), p. 64–70.
16 Kadirbayeva Zh.M. *Mathematical journal*, 2009, 9, 4(34), p. 63–71.
17 Dzhumabayev D.S. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1989, 29, 1, p. 34–46.
18 Ptashnyck B.I. *Ill-posed boundary problems for a partial differential equations*, Kiev: Nauk. dumka, 1984.
19 Kiguradze I.T. *Sovremennye problemy matematiki. Noveishie dostizheniya*, Moscow: Nauka, 1987, 30, p. 3–103.
20 Mitropol'skii Yu.A., Urmancheva L.B. *Ukrainian Mathematical Journal*, 1990, 42, 12, p. 1657–1663.
21 Urmancheva L.B. *Two-point and multi-point problems for a system partial differential equations of hyperbolic type*, Institut matematiki AN Ukrainy, Kiev, 1993, Preprint 93.2., 40 p.
22 Dzhumabaev D.S., Imanchiev A.E. *Mathematical journal*, 2005, 5, 1(15), p. 30–38.
23 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2002, 42, 11, p. 1609–1621.

24 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. *Differential Equations*, 2003, 39, 10, p. 1414–1427.

25 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. *Doklady Akademii Nauk*, 2003, 68, 1, p. 46–49.

26 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. *Differential Equations*, 2005, 41, 3, p. 352–363.

27 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2013, 402, 1, p. 167–178.

28 Dzhumabaev D.S., Kadirbayeva Zh.M. *Bulletin of Kazakh National University al-Farabi.* Ser. matem., mech., inf., 2010, 1, p. 105–112.

29 Kadirbayeva Zh.M. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Kazakhstan*, Ser. fiz.-matem, 2011, 5(279), p. 19–23.

30 Kadirbayeva Zh.M. Bulletin of Kazakh National University al-Farabi, Ser. matem., mech., inf., 2011, 5, p. 56–67.

31 Asanova A.T. *Mathematical journal*, 2013, 13, 3(49), p. 43–55.

32 Asanova A.T. *Nonlinear oscillations [Nelineinye kolivannia]*, 2014, 17, 3. p. 295–313.