ӘОЖ 517

Ж.Хырхынбай

Павлодар мемлекеттік педагогикалық институты
(E-mail: zhamal_khanym@mail.ru)

Біртекті теңдеуге келтірілетін бірінші ретті дифференциалдық теңдеулерді интегралдаудың оңтайлы әдісі

Мақалада пәнішілік байланысты пайдалану арқылы студенттердің кәсіби бағыттағы шығармашылық әрекетін арттыру үшін, олардың танымдық белсенділігін жетілдіру мақсатында бірінші ретті дифференциалдық теңдеулерді бір ғана әдіспен интегралдауға болатынын көрсетілді. Математикалық талдау пәнінде туындысы бойынша белгісіз функцияны, яғни алғашқы бейнені, табу зерттелді. Бұл амалды қарапайым дифференциалдық теңдеуді шешудің алғашқы кезеңі ретінде қарастырған қолайлы. Бұл алғашқы кезең пропедевтикалық (дайындық) сипатқа ие. Онда студенттер өзінің білімін ұғымдық деңгейде қалыптастырып, дифференциалдық теңдеудің, оның негізгі элементтерінің мәнін түсініп, оларды басқа теңдеулерге қолдануға мүмкіндік алады.

Кілт сөздер: дифференциалдық теңдеулер, интегралдау, оқыту әдістері, біртекті теңдеу, біртекті теңдеуге келтірілетін теңдеу.

1. Айталық, $x \in \langle a;b \rangle$, x — тәуелсіз айнымалы $y(x)$-осы айнымалының $\langle a;b \rangle$ аралығында анықталған үзіліссіз дифференциалданатын белгісіз функциясы болсын және де екеуінің аралық байланысы

$$y' = f(x) \tag{1}$$

теңдеуімен берілсін. Мұндағы $\langle a;b \rangle$ — ақырлы немесе ақырсыз тұйық, немесе ашық аралық. (1) — бірінші ретті дифференциалдық теңдеу. Оның $\langle a;b \rangle$ аралығындағы шешімі деп теңдеуді осы аралықта тепе-теңдікке айналдыратын кез келген үзіліссіз дифференциалданатын $y = \varphi(x)$ функциясын атайды

$$\varphi'(x) = f(x),\ \forall x \in \langle a;b \rangle. \tag{2}$$

Дифференциалдар арқылы (1) теңдеуді жазайық:

$$-f(x)dx + dy = 0. \tag{3}$$

Шешімді бұл теңдеуге қойып,

$$dy = \varphi'(x)dx \Rightarrow [-f(x) + \varphi'(x)]dx = 0,\ \forall x \in \langle a;b \rangle,\ \Leftrightarrow d\int[-f(x) + \varphi'(x)]dx = 0,\ \forall x \in \langle a;b \rangle$$

тепе-теңдігін аламыз. Бұдан

$$-\int f(x)dx + \int \varphi'(x)dx = C$$

немесе $\varphi(x) = y \Rightarrow \varphi' dx = dy$ екенін ескерсек,

$$y = \int f(x)dx + C,\ \ \forall x \in \langle a;b \rangle \tag{4}$$

тепе-теңдігі алынады. C=0 болған кезде

$$\varphi(x) = \int f(x)dx$$

деп есептеп, (2) тепе-теңдікті қанағаттандыратын φ(x) функциясын, яғни бір шешімді табамыз. Егер C еркін тұрақты (кез келген сандық мән қабылдайтын) болса, онда (4) өрнек бүкіл шешімдердің жалпы (ортақ) формуласын береді, яғни жалпы шешімді анықтайды [1]. Одан тұрақты C-ның әрбір бекітілген мәнінде (мысалы, $C = 0$) алынатын функция дара шешімді береді. (3) теңдеудің сол жағы (4) негізінде мынадай тепе-теңдікті қанағаттандырып тұр [1]:

$$-f(x)dx + dy = d\left[-\int f(x)dx + y\right],$$

немесе

$$-f(x)dx + dy = dU(x,y)\ ; \tag{5}$$

$$U(x,y) = -\int f(x)dx + y.$$

Басқа сөзбен айтқанда, (3) теңдеудің сол жағы үзіліссіз дифференциалданатын $U(x,y)$ функцияның толық дифференциалына тең болып тұр. Мұндай теңдеуді толық дифференциалдық теңдеу деп атайды. Әлбетте,

$$dU(x,y)=0$$

болғандықтан, шешімнің бойында (яғни $y=\varphi(x)$ деп алғанда)

$$U(x,y)=C,\ x\in\langle a;b\rangle,\quad y\in\langle\phi(a),\phi(b)\rangle=:\langle c;d\rangle$$

теңдігі орындалады. Бұл өрнекті (3)-теңдеудің жалпы интегралы деп атайды. Жалпы интеграл — жалпы шешімнің айқындалмаған түрі [1]. Одан (4) түрдегі жалпы шешім алынады. Енді $U(x,y)$ функциясын табу мәселесін қарастыралық. Ол үшін (5) теңдікті ашып жазалық [2]

$$-f(x)dx+dy=dU(x,y)=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy,\quad \forall(x,y)\in D: D=\langle a;b\rangle\times\langle c;d\rangle.$$

Сондықтан

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-f(x),\quad \frac{\partial U}{\partial y}=1. \tag{6}$$

Бұл теңдіктердің біріншісін x бойынша интегралдау арқылы ($U(x,y)$ функциясын у-тен де тәуелді екенін ескеріп),

$$U(x,y)=-\int f(x)dx+C(y)$$

алынады да, оны екінші теңдікке қою арқылы $C'(y)=1$ теңдігін аламыз. Демек, $C(y)=y$ болады да, (4) түрдегі

$$U(x,y)=-\int f(x)dx+y=C\Leftrightarrow y=\int f(x)dx+C$$

жалпы шешім алынады.

Егер (6) теңдіктердің біріншісін y бойынша, ал екіншісін x бойынша дифференциалдайтын болсақ,

$$-\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial(1)}{\partial x}=0\Rightarrow\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2U}{\partial y\partial x}$$

болатынын көрер едік. Бұл (3)-теңдеудің толық дифференциалдық болуының қажетті шарты.

Жоғарыда (1) теңдеу үшін дәлелденген пайымдауларды $y'=f(y)$ теңдеуі үшін де жасауға болады. Ол үшін x пен y айнымалыларын теңдеудің мағынасын сақтай отырып, орындарымен ауыстырса болғаны.

2. Дифференциалдар арқылы жазылған жалпы түрдегі бірінші ретті теңдеуді қарастырайық

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0, \tag{7}$$

мұндағы M,N функциялары — екі өлшемді $D\subset R^2$ облысында анықталған үзіліссіз функциялар [3]. Егер $M(x,y),\ N(x,y)$ бірдей дәрежелі біртекті функциялар болса, яғни кез келген s-айнымалысы үшін

$$M(sx,sy)=s^mM(x,y),\ \forall(x,y)\in D;$$
$$N(sx,sy)=s^mN(x,y),\ \forall(x,y)\in D$$

теңдіктері орындалатын болса, (7) теңдеу біртекті теңдеу деп аталады. Егер (7) біртекті теңдеу болса, онда $s=\frac{1}{x}$ деп есептеп, $M(x,y)=x^mM(1,\frac{y}{x}),\ N(x,y)=x^mN(1,\frac{y}{x})$ теңдіктерін алар едік. Бұдан біртекті теңдеуді $y=xz$ ауыстыруы арқылы айнымалылары ажыратылатын

$$x^m\left[M(1,z)+zN(1,z)\right]dx+x^{m+1}N(1,z)dz=0$$

теңдеуіне келтіруге болатыны көрініп тұр. Бұл теңдеудің интегралдаушы көбейткіші болып

$$\mu(x,y):=\frac{1}{x^m\left[M(1,z)+zN(1,z)\right]}$$

функциясы табылады.

Мысал 1. $y' = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі. Бұл жағдайда $xydx - (x^2 - y^2)dy = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2x, \text{ яғни, } \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x},$$

онда интегралдық көбейткішті іздейміз $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \dfrac{x + 2x}{-xy} = -\dfrac{3}{y}$.

Осы дифференциалдық теңдеуді толық дифференциалдық түрге алып келетін интегралдаушы көбейткіш $\mu(y) = e^{-3\int \frac{dy}{y}} = e^{-3\ln y} = \dfrac{1}{y^3}$. Берілген теңдеуді интегралдаушы көбейткішке көбейтсек,

$$\frac{x}{y^2}dx - \left(\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y}\right)dy = 0$$

толық дифференциалды теңдеуі алынады. Бұдан $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{2x}{y^3}, \quad \dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{2x}{y^3}$.

Онда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{y^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-x^2}{y^3} + \frac{1}{y};$$

$$u(x,y) = \int \frac{xdx}{y^2} + \varphi(y), \quad u(x,y) = \frac{x^2}{2y^2} + \varphi(y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x^2}{2y^2} + \varphi(y)\right) = \frac{x^2}{y^3} + \varphi'(y);$$

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = \frac{x^2}{y^3} + \varphi'(y) \Rightarrow -\frac{1}{y} = \varphi'(y);$$

$$\varphi'(y) = -\frac{1}{y};$$

$$\varphi(y) = -\ell ny + \ell nC_1, \quad \ell nyC_1 = -\frac{x^2}{2y^2}.$$

Берілген теңдеудің жалпы интегралы $\ell nyC = -\dfrac{x^2}{2y^2}$.

Мына түрдегі теңдеу:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{8}$$

біртекті теңдеуге келтірілетін теңдеу деп аталады [4]. Теңдеудегі x, y айнымалыларының орнына жаңадан u, v айнымалыларын мына ауыстырулар арқылы енгізейік:

$$a_1x + b_1y + c_1 =: v; \; a_2x + b_2y + c_2 =: u.$$

Онда

$$dv = a_1dx + b_1dy; \;\; du = a_2dx + b_2dy$$

болар еді де, (8) теңдеудің орнына мынадай теңдеу:

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1 + b_1y'}{a_2 + b_2y'} = \frac{a_1 + b_1f\left(\frac{v}{u}\right)}{a_2 + b_2f\left(\frac{v}{u}\right)} =: g\left(\frac{v}{u}\right)$$

алынар еді. Бұл біртекті теңдеу. Ол $v = uz, \;\; z = z(u)$ ауыстыруы арқылы (11) түрге келтіріледі

$$z + uz' = g(z),\ (z - g(z))du + udz = 0.$$

Интегралдаушы көбейткіш болып $\dfrac{1}{u\left[z - g(z)\right]}$ функциясы табылады.

Мысал 2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y + 1}{x + y - 3}$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі. Бұл жағдайда $x - y + 1 = v$, $x + y - 3 = u$ деп белгілесек, $dv = dx - dy$, $du = dx + dy$ болады.

Онда

$$\frac{dv}{du} = \frac{1 - \dfrac{dy}{dx}}{1 + \dfrac{dy}{dx}} = \frac{1 - \dfrac{v}{u}}{1 + \dfrac{v}{u}} = \frac{u - v}{u + v};$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{u - v}{u + v}.$$

Бұл біртекті дифференциалдық теңдеу болғандықтан, $v = u \cdot z$, $dv = zdu + udz$ ауыстыруын енгізсек, келесі түрдегі теңдеуді аламыз: $\left(z^2 + 2z - 1\right)du + u(1 + z)dz = 0.$ Осы дифференциалдық теңдеуді толық дифференциалдық түрге алып келетін интегралдаушы көбейткіш

$$\mu(x) = \frac{1}{z^2 + 2z - 1}.$$

Берілген теңдеуді интегралдаушы көбейткішке көбейтсек, $du + \dfrac{u(1 + z)}{z^2 + 2z - 1}dz = 0.$ Одан төмендегі айнымалылары ажыратылатын дифференциалды теңдеу алынады $\dfrac{du}{u} + \dfrac{1 + z}{z^2 + 2z - 1}dz = 0.$

Теңдеуді интегралдасақ, $\ell nu + \dfrac{1}{2}\ell n\left|z^2 + 2z - 1\right| = \ell nC_1 \Rightarrow u^2\left(z^2 + 2z - 1\right) = C_1$, және $z = \dfrac{v}{u}$ екенін ескерсек, $u^2\left(\dfrac{v^2}{u^2} + 2\dfrac{v}{u} - 1\right) = C_1$. Жоғарыда енгізілген v, u мәндерін қойсақ,

$$2x^2 - 4xy - 2y^2 + 4x + 12y - 15 = C_1.$$

Сонда берілген теңдеудің жалпы интегралы $x^2 - y^2 - 2xy + 2x + 6y = C.$

Әдебиеттер тізімі

1 *Сулейменов Ж.С.* Методическая система обучения дифференциальным уравнениям студентов физико-математических факультетов университета: Дис. ... д-ра пед. наук. — Алматы, 2004. — 275 с.

2 *Матвеев Н.М.* Дифференциальные уравнения. — М.: Просвещение, 1988. — 254 с.

3 *William F.* Trench. Differential equationswith boundary value problems. — San Antonia, Texas, USA, 2002. — 797 p.

4 *Birkhoff G., Rota G.-C.* Ordinary Differential Equations, Blaisdell Publ. Co., Waltham, Mass., 1962. — 409 p.

Ж.Хырхынбай

Оптимальный метод решения однородных дифференциальных уравнений первого порядка, приведение к однородному уравнению

В статье показано, что дифференциальное уравнение первого порядка можно интегрировать одним только методом. Изучен вопрос о нахождении неизвестной функции, то есть рассматривать как первоначальный период решения простейших дифференциальных уравнений. При этом студенты формируют свои знания на понятийном уровне, осваивают дифференциальные уравнения и их основные элементы, получают возможность применить их при решении других уравнений.

Zh.Hyrhynbay

Optimal method of decision of homogeneous differential equalizations of first order, coersion to homogeneous equalization

Differential equations course plays a great role in the fundamental training of a future teacher in the aspect of the formation of a student's scientific world view, definite level of mathematical culture, definite level of methodological culture, especially on such components as understanding of applied and practical direction of mathematics education, mastering the method of mathematical modeling, the ability to fulfill inter and correlative connections between subjects. To the components of humanitarian potential of the differential equation teaching at pedagogical schools of higher education course except the above, we relate professional-pedagogical directivity of the course, at that, in comparison with other mathematical disciplines, there are greater opportunities for full realization of professional-pedagogical directivity of education. This imposes special obligations on a teacher of differential equations course in realization of the binarity principle — the most adequate combination of mathematical and methodological lines.

References

1 Suleiymenov Zh.S. *Methodical system of training of students of physical differential equations and mathematical faculties of the University*: Dis. ... doctor of ped. sciences, Almaty, 2004, 275 p.

2 Matveyev N.M. Differential equations, Moscow: Prosveshchenie, 1988, 254 p.

3 William F. *Trench. Differential equationswith boundary value problems. San Antonia*, Texas, USA, 2002, 797 p.

4 Birkhoff G., Rota G.-C. *Ordinary Differential Equations*, Blaisdell Publ. Co., Waltham, Mass., 1962, 409 p.