УДК 517.22+519.614

Л.К.Кусаинова, А.Б.Оспанова

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана
(E-mail: leili2006@mail.ru)

Теоремы вложения разностных весовых пространств $w_p^2(\upsilon)$. II

Статья является второй частью статьи «Теоремы вложения разностных весовых пространств», посвященной исследованию вложений разностных аналогов весовых пространств Соболева $w_p^2(\upsilon)$ функций с конечной нормой $\|y;w_p^2(\upsilon)\| = \|y^{(2)}\|_p + \|\upsilon^{1/p}y\|_p$. В работе продолжаются исследования вложений $w_p^2(\upsilon)$ в $l_q(u)$. В частности, получен ряд необходимых условий вложения.

Ключевые слова: разностное весовое пространство, весовое пространство Соболева, вложения.

Настоящая работа посвящена изучению вложений разностных весовых пространств $w_p^2(\upsilon)$ в пространство последовательностей $l_q(u)$ ($1 \le p \le q < \infty$). По данной тематике известны работы [1–9].

Приведем здесь необходимые нам определения из первой части работы. Пусть $\upsilon = (\upsilon_j)_{j=1}^{\infty}$ — неотрицательная числовая последовательность, удовлетворяющая условию невырожденности

$$\sum_{j=k}^{\infty} \upsilon_j > 0 \ (k = 1, 2, ...).$$

Через $l_q(u)$ $(u_j \ge 0)$ обозначается пространство последовательностей $y = (y_j)_{j=1}^{\infty}$ с конечной нормой

$$\|y\|_{l_q(u)} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} u_j \, | \, y_j \, |^q \right)^{1/q}, \ 1 \le q < \infty.$$

Обозначим через Δ разностный оператор

$$\Delta y = \{\Delta y_j\}_{j=1}^{\infty}, \ \Delta y_j = y_{j+1} - y_j \quad (j = 1, 2 ...).$$

Оператор Δ^2 на $y = \{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ зададим равенством

$$\Delta^2 y_j = y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1} = \Delta y_{j+1} - \Delta y_j \ (y_0 = 0).$$

Весовое разностное пространство $w_p^2(\upsilon)$ $(1 < p < \infty)$ целой гладкости $m = 2$ определяется как пространство всех последовательностей $y = (y_j)_{j=1}^{\infty}$, таких, что норма

$$\|y\|_{w_p^2(\upsilon)} = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left(| \, \Delta^2 y_j \, |^p + \upsilon_j \, | \, y_j \, |^p \right) \right\}^{1/p} < \infty \quad (y_0 = 0).$$

Далее мы строим характеристическую последовательность $\{k_n^*\}_{n=1}^{\infty}$. Пусть $n, k \ge 0$ — целые. Пусть $R_{n,k}$ — множество последовательностей $r = \{r_j\}_{j=1}^{\infty} \in l^{\infty}$, для которых

$$\sum_{j=n}^{n+k} |r_j|^p = 1.$$

Положим, что

$$S_{\upsilon}(n,k) = \inf_{r \in R_{n,k}} \left\{ \sum_{j=n}^{n+k} |r_j|^p \, \upsilon_j \right\}^{1/p}.$$

По определению

$$k_n^* = k_n^*(\upsilon) = \begin{cases} \sup\left\{k : k^{1+1/p'} S_{\upsilon}(n,k) \le 1\right\}, & \text{если } \upsilon_n \le 1, \\ 0, & \text{если } \upsilon_n > 1, \end{cases} \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

Для всех n число $k_n^* \ge 0$. Это очевидно при $\upsilon_n > 1$. Если $\upsilon_n \le 1$, то $S_\upsilon(n,0) = \upsilon_n^{1/p} \le 1$, откуда следует $k_n^* \ge 0$.

Будем говорить, что последовательность $\upsilon = \{\upsilon_j\}_{j=1}^\infty$ допустима (и писать $\upsilon \in \Pi_p$), если $k_n^* < \infty$ $(n = 1, 2, ...)$.

Ряд примеров дан в части I.

Пусть X, Y — пространства с полунормами $\|\cdot;X\|$, $\|\cdot;Y\|$ соответственно. Будем говорить, что X вложено в Y (запись $X \to Y$), если X есть подпространство Y, а оператор (вложения) $E: Ex = x$ ограничен как оператор из X в Y.

Последовательность $y = \{y_j\}_{j=1}^\infty$ называется финитной, если существуют целые $1 < m < h$ такие, что $y_j = 0$ при $j < m$, $j > h$. Обозначим через l_0 пространство всех финитных последовательностей. Очевидно, что $l_0 \subset w_p^2(\upsilon)$.

Рассмотрим введенную в части I данной работы целочисленную функцию

$$A_u(n,k) = (k+1)^{2-1/p}\left(\sum_{j=n}^{n+k} u_j\right)^{1/q}, \ 1 \le q < \infty.$$

Пусть $A_{\upsilon,u}^*(n) = A_u(n,k_n^*)$, $k_n^* = k_n^*(\upsilon)$. Введем величину $A_0^* = \max\{B_1^*, B_2^*\}$, где

$$B_1^* = \sup_{n>1}\left\{A_{\upsilon,u}^*(n); k_n^* \ge 1\right\}, \ B_2^* = \sup_{n>1}\left\{\left(\sum_{j=n}^{n+1} u_j\right)^{1/q}\left(\sum_{j=n}^{n+1}\upsilon_j\right)^{-1/p}; k_n^* = 0\right\}.$$

При этом учитываем, что по определению $\sup\varnothing = -\infty$. Заметим, что

$$A_{\upsilon,u}^*(n) > \frac{\left(\sum_{j=n}^{n+k_n^*} u_j\right)^{1/q}}{\left(\sum_{j=n}^{n+k_n^*} \upsilon_j\right)^{-1/p}}, \text{ если } k_n^* \ge 1.$$

Теорема 1. Пусть $1 < p, q < \infty$ и пусть $c^* = \sup_{n\ge1} k_n^* < \infty$. Если имеет место вложение

$$w_p^2(\upsilon) \to l_q(u), \tag{1}$$

то

$$A_0^* \le 2^{1/p}\left(1 + c^*\right)\left\|E: w_p^2(\upsilon) \to l_q(u)\right\|.$$

Доказательство. По условию теоремы существует $K > 0$, такая, что для всех $y \in w_p^2(\upsilon)$

$$\frac{\|y; l_q(u)\|}{\|y; w_p^2(\upsilon)\|} \le K, \ y \ne 0. \tag{2}$$

Возьмем $y = \{y_j\}_{j=1}^\infty$, где

$$y_j = \begin{cases} 0, & \text{если } j \notin \Omega_n^* = \left[n, n + k_n^*\right]; \\ 1, & \text{если } j \in \Omega_n^*. \end{cases} \tag{3}$$

1. Если $k_n^* = 1$, то

$$\Delta^2 y_n = y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = -1;$$
$$\Delta^2 y_{n+1} = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = -1.$$

Далее заметим, что при $k_n^*\ge 1$ справедливы оценки

$$\left(\sum_{j=n}^{n+k_n^*}\upsilon_j\right)^{1/p}\le\left(k_n^*\right)^{1+1/p'}\left(\sum_{j=n}^{n+k_n^*}\upsilon_j\right)^{1/p}=\left(k_n^*\right)^{1+1/p'}\left(\sum_{j=n}^{n+k_n^*}\left|\overline{r}_j\right|\right)\left(\sum_{j=n}^{n+k_n^*}\upsilon_j\right)^{1/p}\le$$

$$\le\left(k_n^*\right)^{1+1/p'}\left(k_n^*+1\right)\left(\sum_{j=n}^{n+k_n^*}\left|\overline{r}_j\right|^p\sum_{j=n}^{n+k_n^*}\upsilon_j\right)^{1/p}\le c_1\left(k_n^*\right)^{1+1/p'}\left(k_n^*+1\right)\left(\sum_{j=n}^{n+k_n^*}\left|\overline{r}_j\right|^p\upsilon_j\right)^{1/p}=\qquad(4)$$

$$=c_1\left(c^*+1\right)\left(k_n^*\right)^{1+1/p'}S\left(n,k_n^*\right)\le c_1\left(c^*+1\right).$$

Из неравенства (2) и оценок (4) имеем:

$$K\ge\frac{\left\|y;l_q(u)\right\|}{\left\|y;w_p^2(\upsilon)\right\|}\ge\frac{\left\{\sum_{j=n}^{n+k_n^*}u_j\,|\,y_j\,|^q\right\}^{1/q}}{\left\{\sum_{j=n}^{n+k_n^*}\left(|\,\Delta^2y_j\,|^p+\upsilon_j\,|\,y_j\,|^p\right)\right\}^{1/p}}=\frac{\left\{\sum_{j=n}^{n+1}u_j\,|\,1\,|^q\right\}^{1/q}}{\left\{\sum_{j=n}^{n+1}\left(|-1|^p+\upsilon_j\,|\,1\,|^p\right)\right\}^{1/p}}=\frac{\left\{\sum_{j=n}^{n+1}u_j\right\}^{1/q}}{\left\{2+\sum_{j=n}^{n+1}\upsilon_j\right\}^{1/p}}\ge$$

$$\ge 2^{-1/p}\frac{\left\{\sum_{j=n}^{n+1}u_j\right\}^{1/q}}{2^{1/p}+c_1\left(c^*+1\right)}=2^{-1/p}\left(4c_2\right)^{-1}\left(c^*+1\right)^{-1}\mathsf{A}_{\upsilon,u}^*(n)=2^{-1/p}c_3^{-1}\left(c^*+1\right)^{-1}\mathsf{A}_{\upsilon,u}^*(n).$$

Последнее неравенство верно $\forall n\ge 1,$ значит,

$$K\ge\frac{\left\|y;l_q(u)\right\|}{\left\|y;w_p^2(\upsilon)\right\|}\ge 2^{-1/p}c_3^{-1}\left(c^*+1\right)^{-1}B_1^*\ge 2^{-1/p}c_3^{-1}\left(c^*+1\right)^{-1}A_0^*$$

и

$$\sup_{y=\{y_j\}_{j=1}^\infty\ne 0}\frac{\left\|y;l_q(u)\right\|}{\left\|y;w_p^2(\upsilon)\right\|}\ge 2^{-1/p}c_3^{-1}\left(c^*+1\right)^{-1}A_0^*.\qquad(5)$$

2. Рассмотрим случай $k_n^*>1$. Тогда

$$\Delta^2y_n=y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}=-1;$$
$$\Delta^2y_{n+1}=y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n=-1;$$
$$\Delta^2y_i=y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}=0,\ i=n+1,...,n+k_n^*-2;$$
$$\Delta^2y_{n+k_n^*-1}=y_{n+k_n^*}-2y_{n+k_n^*-1}+y_{n+k_n^*+1}=-1;$$
$$\Delta^2y_{n+k_n^*}=y_{n+k_n^*+1}-2y_{n+k_n^*}+y_{n+k_n^*-1}=-1.$$

Снова из неравенства (2) и оценок, аналогичных (4), получим:

$$K\ge\frac{\left\|y;l_q(u)\right\|}{\left\|y;w_p^2(\upsilon)\right\|}\ge\frac{\left\{\sum_{j=n}^{n+k_n^*}u_j\,|\,y_j\,|^q\right\}^{1/q}}{\left\{\sum_{j=n}^{n+k_n^*}\left(|\,\Delta^2y_j\,|^p+\upsilon_j\,|\,y_j\,|^p\right)\right\}^{1/p}}\ge\frac{\left\{\sum_{j=n}^{n+k_n^*}u_j\right\}^{1/q}}{\left\{\sum_{j=n}^{n+k_n^*}\left(1+\upsilon_j\right)\right\}^{1/p}}\ge$$

$$\geq 2^{-1/p}\frac{\left\{\sum_{j=n}^{n+k_n^*}u_j\right\}^{1/q}}{\left(k_n^*+1\right)^{1/p}+\left(\sum_{j=n}^{n+k_n^*}\upsilon_j\right)^{1/p}}\geq\frac{2^{-1/p}2^{1+1/p'}\mathsf{A}^*_{\upsilon,u}(n)}{\left(c^*+1\right)+c_4\left(c^*+1\right)}=2^{-1/p}c_5^{-1}\left(c^*+1\right)^{-1}\mathsf{A}^*_{\upsilon,u}(n).$$

Последнее неравенство верно $\forall n\geq 1$, значит,

$$K\geq\frac{\left\|y;l_q(u)\right\|}{\left\|y;w_p^2(\upsilon)\right\|}\geq 2^{-1/p}c_5^{-1}\left(c^*+1\right)^{-1}\sup_{n>1}\mathsf{A}^*_{\upsilon,u}(n)\geq 2^{-1/p}c_5^{-1}\left(c^*+1\right)^{-1}A_0^*$$

и

$$\left\|E:w_p^2(\upsilon)\to l_q(u)\right\|\geq 2^{-1/p}c_5^{-1}\left(c^*+1\right)^{-1}A_0^*. \tag{6}$$

3. Рассмотрим теперь случай $k_n^*=0.$ Тогда

$$\Delta^2 y_n=y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}=-1.$$

Из неравенства (2) следуют оценки

$$K\geq\frac{\left\|y;l_q(u)\right\|}{\left\|y;w_p^2(\upsilon)\right\|}\geq\frac{\left(\sum_{j=n}^{n+1}u_j\right)^{1/q}}{\left\{\sum_{j=n}^{n+1}\left(1+\upsilon_j\right)\right\}^{1/p}}\geq 2^{-1/p}\frac{\left(\sum_{j=n}^{n+1}u_j\right)^{1/q}}{\left(\sum_{j=n}^{n+1}\upsilon_j\right)^{1/p}},$$

т.е.

$$K\geq 2^{-1/p}B_2^*\geq 2^{-1/p}A_0^*,$$

откуда

$$\left\|E:w_p^2(\upsilon)\to l_q(u)\right\|\geq c_6^{-1}2^{-1/p}\left(1+c^*\right)^{-1}A_0^*. \tag{7}$$

Теперь из (5)–(7) для $y=\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$, определенной равенствами (3), имеем

$$A_0^*\leq c_7 2^{1/p}\left(1+c^*\right)\left\|E:w_p^2(\upsilon)\to l_q(u)\right\|.$$

Теорема доказана.

Следствие. Пусть $\upsilon=\{\upsilon_j\}_{j=1}^{\infty}$, где $\upsilon_j>1$ $(j=1,2,...)$. Тогда:

а) если $u=\{u_j\}_{j=1}^{\infty}\in l_\infty$, то имеет место вложение (1);

б) если имеет место вложение (1), то

$$A_0^*=\sup_{n>1}\left\{\left(\sum_{j=n}^{n+1}u_j\right)^{1/q}\left(\sum_{j=n}^{n+1}\upsilon_j\right)^{-1/p}\right\}<\infty.$$

Доказательство. По определению имеем $k_n^*=0$ $(n=1,2,...)$. Откуда

$$A^*_{\upsilon,u}(n)=\left(k_n^*+1\right)^{2-1/p}\left(\sum_{j=n}^{n+k_n^*}u_j\right)^{1/q}=u_n^{1/q}.$$

Из условия а) следует $\sup_{n\geq 1}u_n<\infty,$ т.е. для всех $n\geq 1$ существует $c>0,$ такая, что $u_n\leq c.$ Тогда $\sup_{n\geq 1}A^*_{\upsilon,u}(n)=A^*<\infty.$ Нетрудно убедиться, что тем самым выполнены все условия из теоремы 1 части I работы для вложения (1). Условие б) доказывает оценка

$$A_0^* = B_2^* = \sup_{n>1} \frac{\left(\sum_{j=n}^{n+1} u_j\right)^{1/q}}{\left(\sum_{j=n}^{n+1} \upsilon_j\right)^{1/p}} \le 2^{-1/p} \sup_{n>1} \left(\sum_{j=n}^{n+1} u_j\right)^{1/q} \le cK < \infty.$$

Теорема 2. Пусть $1 < p \le q < \infty$, и пусть $\infty < \liminf_{n\to\infty} \upsilon_n = \alpha > 0$. Справедливы утверждения:
а) если

$$U = \limsup_{n\to\infty} u_n^{1/q} < \infty,$$

то справедливо вложение (1);
б) если справедливо вложение (1), то $U < \infty$.

Доказательство. а) Положим $b_n = \inf_{j\ge n} \upsilon_j$. По определению $\alpha = \lim_{n\to\infty} b_n = \sup_{n\ge 1} b_n$ и существует $n_0 \in N$ такое, что $\upsilon_j \ge b_n > 2^{-1}\alpha$ для всех $j \ge n \ge n_0$. Откуда получаем, что $\tilde{\upsilon}_n = 2\alpha^{-1}\upsilon_n > 1$ для всех $n \ge n_0$. Тогда по определению $\tilde{k}_n^* = \tilde{k}_n^*(\tilde{\upsilon}) = 0$ для всех $n \ge n_0$ и, следовательно, $\mathsf{A}_{\tilde{\upsilon},u}^*(n) = u_n^{1/q}$ для всех $n \ge n_0$. Величина

$$A_{\tilde{\upsilon},u}^* = \sup_{n\ge 1} \mathsf{A}_{\tilde{\upsilon},u}^*(n) = \max\left\{ \max_{1\le n<n_0} \mathsf{A}_{\tilde{\upsilon},u}^*(n), \sup_{n\ge n_0} u_n^{1/q} \right\} < \infty, \tag{8}$$

если $U = \sup_{n\ge n_0} u_n^{1/q} < \infty$. Далее в части I данной работы доказано, что

$$\left\| E : w_p^2(\tilde{\upsilon}) \to l_q(u) \right\| \le c A_{\tilde{\upsilon},u}^*. \tag{9}$$

Из (9), оценки

$$\left\| y; w_p^2(\upsilon) \right\| = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\Delta^2 y_j|^p + \sum_{j=1}^{\infty} \upsilon_j |y_j|^p \right\}^{1/p} =$$

$$= \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\Delta^2 y_j|^p + 2^{-1}\alpha \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\upsilon}_j |y_j|^p \right\}^{1/p} \ge \frac{2^{-1}\alpha}{1+2^{-1}\alpha} \left\| y; w_p^2(\tilde{\upsilon}) \right\|$$

и (8) следует, что

$$\left\| E : w_p^2(\upsilon) \to l_q(u) \right\| = \sup_{y=\{y_j\}_{j=1}^{\infty} \ne 0} \frac{\left\| y; l_q(u) \right\|}{\left\| y; w_p^2(\upsilon) \right\|} \le$$

$$\le \frac{1+2^{-1}\alpha}{2^{-1}\alpha} \sup_{y=\{y_j\}_{j=1}^{\infty} \ne 0} \frac{\left\| y; l_q(u) \right\|}{\left\| y; w_p^2(\tilde{\upsilon}) \right\|} = \left(\frac{2}{\alpha} + 1 \right) \left\| E : w_p^2(\tilde{\upsilon}) \to l_q(u) \right\| \le$$

$$\le \left(\frac{2}{\alpha} + 1 \right) c A_{\tilde{\upsilon},u}^* = \alpha^{-1}(2+\alpha) c A_{\tilde{\upsilon},u}^* < \infty.$$

б) Как и в п. а) положим, что $\tilde{\upsilon}_n = 2\alpha^{-1}\upsilon_n$ ($n = 1,2,...$). Из условия $\infty < \liminf_{n\to\infty} \upsilon_n = \alpha > 0$ получаем, что существует $n_0 \in N$ такое, что $\upsilon_j > 2^{-1}\alpha$ для всех $j \ge n \ge n_0$ и $\tilde{\upsilon}_n > 1$, $k_n^* = 0$, для всех $n \ge n_0$. Из вложения $w_p^2(\upsilon) \to l_q(u)$ и оценки

$$\left\| E : w_p^2(\upsilon) \to l_q(u) \right\| = \sup_{y=\{y_j\}_{j=1}^{\infty} \ne 0} \frac{\left\| y; l_q(u) \right\|}{\left\| y; w_p^2(\upsilon) \right\|} \ge \gamma \sup_{y=\{y_j\}_{j=1}^{\infty} \ne 0} \frac{\left\| y; l_q(u) \right\|}{\left\| y; w_p^2(\tilde{\upsilon}) \right\|},$$

где $\gamma = \left(1+2^{-1}\alpha\right)^{-1}$, следует, что существует $n_1 \in N$ такое, что для всех $n \ge n_1$

$$A_{\tilde{\upsilon},u}^*(n) \le c \left\| E : w_p^2(\tilde{\upsilon}) \to l_q(u) \right\| \le c\gamma^{-1} \left\| E : w_p^2(\upsilon) \to l_q(u) \right\| < \infty.$$

Теперь осталось заметить, что

$$\limsup_{n\to\infty} A^*_{\upsilon,u}(n) = \limsup_{n\to\infty} u_n^{1/q} = U \le c\left\| E : w_p^2(\upsilon) \to l_q(u) \right\|.$$

Теорема доказана.

Список литературы

1 *Мусилимов Б., Отелбаев М.* Оценка наименьшего собственного значения одного класса матриц, соответствующего разностному уравнению Штурма–Лиувилля // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1981. — Т. 21. — № 6. — С. 1430–1434.

2 *Мухамедиев Г.* Спектр одного разностного оператора и некоторые теоремы вложения. Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения в механике и технике. — Алма-Ата: Наука, 1983. — С. 104, 105.

3 *Смаилов Е.С.* Разностные теоремы вложения для пространств Соболева с весом и их приложения // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 270. — № 1. — С. 52–55.

4 *Мынбаев К.Т., Отелбаев М.О.* Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 288 с.

5 *Ойнаров Р., Стихарный А.П.* Критерии ограниченности и компактности одного разностного вложения // Мат. заметки. — 1991. — Т. 50. — № 5. — С. 54–60.

6 *Булабаев А.Т., Мухамбетжанов А.Т.* О некоторых разностных теоремах вложения: Сб. КазГНУ. — Алматы, 1993.

7 *Трибель Х.* Теория функциональных пространств / Пер. с англ. — М.: Мир, 1986. — 450 с.

8 *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — 3-е изд. — М.: Наука, 1988. — 336 с.

9 *Kussainova L., Ospanova A.* An Embedding Theorem for Difference Weighted Spaces // Proceedings of The World Congress on Engineering: Lecture Notes. — London: UK., 2014. — P. 773, 774.

Л.К.Кусаинова, А.Б.Оспанова

$w_p^2(\upsilon)$ айырымдық салмақты кеңістіктердің енгізу теоремалары. II

Мақала Соболевтың шектелген нормалы $\|y; w_p^2(\upsilon)\| = \|y^{(2)}\|_p + \|\upsilon^{1/p} y\|_p$ $w_p^2(\upsilon)$ салмақты функциялар кеңістіктерінің айырымдық аналогтарының енгізулерін зерттеуге арналған «Айырымдық салмақты кеңістіктердің енгізу теоремалары» мақаланың екінші бөлігі болып табылады. $w_p^2(\upsilon)$ кеңістігін $l_q(u)$ кеңістігіне енгізу бойынша зерттеулер жалғастырылған, оның ішінде осы енгізудің бірнеше қажетті шарттары алынған.

L.K.Kussainova, A.B.Ospanova

Embedding theorems of $w_p^2(\upsilon)$ difference weighted spaces. II

This work is the second part of the paper «Embedding theorems of difference weighted spaces» devoted to research of embeddings of difference analogues of weighted Sobolev spaces $w_p^2(\upsilon)$ with the finite norm $\|y; w_p^2(\upsilon)\| = \|y^{(2)}\|_p + \|\upsilon^{1/p} y\|_p$. In the work further researches of embeddings of $w_p^2(\upsilon)$ into $l_q(u)$ are given. In particular, some necessary embedding conditions are obtained.

References

1 Musilimov B., Otelbaev M. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1981, 21, 6, p. 68–73 (Russian, English).

2 Muhamediev G. *Spectrum of a difference operator and some embedding theorems. Boundary value problems for differential equations and their applications in mechanics and techniques*, Alma-Ata: Nauka, 1983, p. 104, 105.

3 Smailov E.S. *Difference embedding theorems for weighted Sobolev spaces and their applications. Soviet Math. Dokl*., 1983, 270, 1, p. 52–55.

4 Mynbaev K.T., Otelbaev M.O. *Weighted functional spaces and spectrum of differential operators*, Moscow: Nauka, 1988, 288 p.

5 Oinarov R., Stikharnyi A.P. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1991, 50, 5, p. 1130–1135.

6 Bulabaev A.T., Muhambetzhanov A.T. *Collection KazGNU*, Almaty, 1993.

7 Triebel Kh. *Theory of Function Spaces*, Modern Birkhäuser Classics, 2010, 281 p.

8 Sobolev S.L. *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*, American Mathematical Society, 1991, 286 p.

9 Kussainova L., Ospanova A. *Proceedings of The World Congress on Engineering*: Lecture Notes, London, UK., 2014, p. 773, 774.