УДК 521.1

М.Дж. Минглибаев[1,2], Т.М. Жумабек[1], Г.М. Маемерова[1]

[1]*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан;*
[2]*Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова, Алматы, Казахстан*
(E-mail: mayemerova@gmail.com)

Исследование ограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной центральной системе координат

В статье аналитически исследована пространственная классическая ограниченная задача трех тел. Введена новая специальная неинерциальная центральная система координат. Начало введенной системы координат совпадает с центром сил исследуемой задачи. Получены новые базовые дифференциальные уравнения движения ограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной центральной системе координат. В новой системе координат найдено аналитическое выражение инварианта центра сил. Во введенной системе координат ограниченная задача трех тел разделена на две отдельные задачи и получены различные базовые дифференциальные уравнения этих двух задач. Корректность такого разделения исследуемой задачи на два в специальной неинерциальной системе координат обеспечивается инвариантом центра сил, найденным в этой же системе координат. Первая – треугольная ограниченная задача трех тел, когда три тела во все время движения образуют треугольник. Вторая – коллинеарная ограниченная задача трех тел, когда три тела во все время движения лежат на одной и той же прямой. Отдельно выведены дифференциальные уравнения движения треугольной ограниченной задачи трех тел во вращающейся специальной неинерциальной центральной системе координат в пульсирующих переменных. Также получены дифференциальные уравнения коллинеарной ограниченной задачи трех тел в неинерциальной центральной системе координат. Полученные новые формы дифференциальных уравнений ограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной системе координат открывают новые перспективы в исследовании этой задачи.

Ключевые слова: ограниченная задача трех тел, неинерциальная система координат, инварианты центра сил, равнобедренные решения, точки либрации.

Введение

Движение малого естественного или искусственного небесного тела в поле тяготения двух больших небесных тел (далее основные тела) хорошо описывается математической моделью в широко известной ограниченной задаче трех тел [1–6]. При произвольных значениях масс основных тел задача имеет пять точек либрации — точные частные решения. Два из них — решения Лагранжа, когда три тела во все время движения образуют равносторонний *треугольник*. Три *коллинеарных* решения Эйлера, когда три тела во все время движения расположены на одной и той же прямой. Известны также решения в форме равнобедренного треугольника при условии, что массы основных тел, расположенные у основания равнобедренного треугольника, равны между собой [7–9]. В связи с отсутствием общего аналитического решения в конечном виде многие аспекты задачи изучены различными качественными и численными методами [1–9]. Поиск новых точных частных аналитических решений представляется актуальным.

В настоящей работе аналитически исследуется пространственная ограниченная задача трех тел в новой специальной неинерциальной центральной системе координат с началом в центре сил [7]. Специальная неинерциальная центральная система координат обобщает инерциальную барицентрическую прямоугольную декартовую систему координат в неинерциальную систему координат.

В начале введена новая специальная неинерциальная центральная система координат и выведено новое основное дифференциальное уравнение движения рассматриваемой задачи. Исходя из свойств неинерциальной центральной системы координат, получены *инварианты центра сил* ограниченной задачи трех тел в этой же системе координат. Изложена суть предложенного метода исследования проблемы. Исследована *треугольная* ограниченная задача трех тел. Выведены дифференциальные уравнения движения треугольной ограниченной задачи трех тел во вращающейся специальной неинерциальной центральной системе координат в пульсирующих переменных. Выделена и отдельно исследуется *коллинеарная* ограниченная задача трех тел. Получены дифференциальные уравнения движения коллинеарной ограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной центральной системе координат с учетом инварианта центра сил.

1 Различные уравнения движения ограниченной задачи трех тел и инварианты центра сил

1.1 Классические уравнения движения ограниченной задачи трех тел в абсолютной системе координат

Рассмотрим движение малого тела с исчезающей малой массой m_2 (далее безмассовое тело) в поле тяготения двух основных тел с постоянными массами m_1 и m_3. При этом тела рассматривается как материальные точки. Математические условия ограниченной постановки задачи трех тел [1–4] могут быть написаны в виде

$$m_2 << m_1, \quad m_2 << m_3, \quad m_2 \approx 0. \tag{1}$$

Дифференциальные уравнения движения этих трех тел в абсолютной системе координат $OXYZ$ имеют известный вид

$$\ddot{\vec{R}}_1^* = \vec{F}_1^* = fm_3 \frac{\vec{R}_3^* - \vec{R}_1^*}{R_{13}^{*3}}, \quad \ddot{\vec{R}}_3^* = \vec{F}_3^* = fm_1 \frac{\vec{R}_1^* - \vec{R}_3^*}{R_{31}^{*3}}, \tag{2}$$

$$\ddot{\vec{R}}_2^* = \vec{F}_2^* = f\left(m_1 \frac{\vec{R}_1^* - \vec{R}_2^*}{R_{21}^{*3}} + m_3 \frac{\vec{R}_3^* - \vec{R}_2^*}{R_{23}^{*3}}\right), \tag{3}$$

где $\vec{R}_i^*$ — радиус-векторы тел, $\vec{R}_{ij}^*$ $(i \neq j)$ — расстояния между телами. Точкой в этих уравнениях и далее обозначается дифференцирование по времени t. Из системы дифференциальных уравнений (2) получим известное соотношение

$$m_1\vec{R}_1^* + m_3\vec{R}_3^* = \vec{a}^*t + \vec{b}^*; \quad \vec{a}^* = \overrightarrow{const}, \quad \vec{b}^* = \overrightarrow{const}. \tag{4}$$

Отсюда получим хорошо известное аналитическое выражение радиус-вектора точки G_0 — барицентра двух основных тел в абсолютной системе координат

$$\vec{R}_{G_0}^* = \frac{m_1\vec{R}_1^* + m_3\vec{R}_3^*}{m_1 + m_3} = \frac{\vec{a}^*}{m_1 + m_3}t + \frac{\vec{b}^*}{m_1 + m_3}. \tag{5}$$

Система дифференциальных уравнений (2) описывает задачу двух тел. Из (5) следует $\ddot{\vec{R}}_{G_0}^* = 0$, то есть барицентрическая система координат инерциальная.

Уравнения движения (3) описывают движение безмассового тела в ньютоновском поле тяготения двух основных тел m_1, m_3 — классическую ограниченную задачу трех тел.

1.2 Специальная неинерциальная система координат. Дифференциальные уравнения ограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной центральной системе координат

Часто ограниченная задача трех тел изучается в барицентрической системе координат с началом в барицентре двух основных тел m_1 и m_3 [1–4]. Естественно, что барицентр находится все время на прямой, соединяющей два основных тела m_1 и m_3, при этом положение барицентра на прямой точно определено. Как было отмечено ранее, барицентрическая система координат, согласно (5), инерциальная.

Обобщая инерциальную барицентрическую систему координат, мы переходим на новую специальную неинерциальную систему координат с началом в точке G. Точку G определим следующим образом. Линия действия суммарной силы притяжения двух основных тел $\vec{F}_2^*$ пересекает прямую R_{13}^* (соединяющую два тела m_1 и m_3) только в одной точке. Эту точку обозначим через G. В этой точке линии действия трех сил $\vec{F}_1^*$, $\vec{F}_2^*$, $\vec{F}_3^*$ все время пересекаются. Поэтому эту точку называют *центром сил* [7]. В общем случае эта точка подвижная, обладает ускорением, не равным нулю, и ее движение неизвестно.

Таким образом, новая специальная система координат *неинерциальная*, в этой системе координат сила $\vec{F}_2^*$ *центральная*, то есть направленная к началу системы координат. Радиус-вектор безмассового тела в новой системе координат и сила $\vec{F}_2^*$ лежат на одной и той же прямой, но направлены в противоположные стороны.

В частном случае, когда начало новой системы координат совпадает с барицентром двух тел, имеем $G \equiv G_0$ и получаем инерциальную барицентрическую систему координат.

Учитывая свойства введенной системы координат, новую систему координат назовем *специальной неинерциальной центральной* системой координат.

Переходим в новую специальную неинерциальную центральную систему координат по формулам

$$\vec{R}_i^* = \vec{R}_G + \vec{r}_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{6}$$

где $\vec{R}_G$ — радиус-вектор центра сил G в абсолютной системе координат, $\vec{r}_i$ — радиус-векторы тел в специальной системе координат. Пусть оси новой системы координат $Gxyz$ параллельны соответствующим осям абсолютной системы координат $OX^*Y^*Z^*$ (см. рис.).

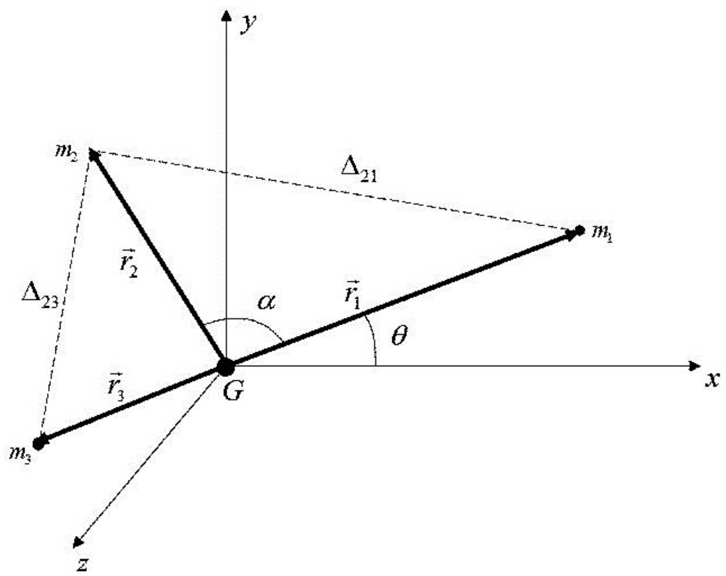

Рисунок. Пространственная ограниченная задача трех тел
в неинерциальной системе координат с началом в центре сил

Преобразованные уравнения движения (2) и (3) имеют вид

$$\ddot{\vec{R}}_G + \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1, \quad \vec{F}_1 = f m_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{r_{13}^3}, \quad \vec{r}_{13} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1, \tag{7}$$

$$\ddot{\vec{R}}_G + \ddot{\vec{r}}_3 = \vec{F}_3, \quad \vec{F}_3 = f m_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{r_{31}^3}, \quad \vec{r}_{31} = \vec{r}_1 - \vec{r}_3, \tag{8}$$

$$r_{31} = [(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2]^{1/2} = r_{13},$$

$$\ddot{\vec{R}}_G + \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2, \tag{9}$$

$$\vec{F}_2 = f\left(m_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\Delta_{21}^3} + m_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{\Delta_{23}^3}\right), \tag{10}$$

где Δ_{ij} — расстояния между безмассовым и основными телами

$$\Delta_{21} = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2} = \Delta_{12};$$

$$\Delta_{23} = [(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2]^{1/2} = \Delta_{32}.$$

Соотношения (4) преобразуются к виду

$$(m_1 + m_3)\,\vec{R}_G + m_1\vec{r}_1 + m_3\vec{r}_3 = \vec{a}^* t + \vec{b}^*, \tag{11}$$

Из уравнений (7), (8) и (9) получим

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \vec{F}_1 = \ddot{\vec{r}}_2 - \vec{F}_2, \quad \ddot{\vec{r}}_3 - \vec{F}_3 = \ddot{\vec{r}}_1 - \vec{F}_1, \quad \ddot{\vec{r}}_2 - \vec{F}_2 = \ddot{\vec{r}}_3 - \vec{F}_3. \tag{12}$$

Очевидно, что из этих трех уравнений независимые только два. Из этих уравнений следует

$$\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2 + \left(\ddot{\vec{r}}_1 - \vec{F}_1\right); \tag{13}$$

$$\ddot{\vec{r}}_{31} = -f\frac{m_3 + m_1}{r_{31}^3}\vec{r}_{31}. \tag{14}$$

Уравнения (14) есть хорошо известные уравнения классической задачи двух тел в специальной неинерциальной центральной системе координат. Из интеграла

$$\vec{r}_{31} \times \dot{\vec{r}}_{31} = \vec{c}_{31} = \overrightarrow{const}$$

следует, что орбита плоская, без потери общности можно считать, что орбита лежит на основной плоскости Gxy.

Таким образом, *дифференциальные уравнения движения ограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной центральной системе координат* могут быть написаны в виде

$$\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2 + \vec{W}; \tag{15}$$

$$\vec{W} = \ddot{\vec{r}}_1 - \vec{F}_1. \tag{16}$$

При этом выражение (16) находится из решений задачи двух основных тел (14), описанной в специальной неинерциальной центральной системе координат.

1.3 Инвариант центра сил в специальной неинерциальной центральной системе координат

Согласно выбору новой системы координат, сила $\vec{F}_2$ все время направлена к центру силы, G — к началу новой системы координат. Поэтому всегда в специальной неинерциальной центральной системе координат имеет место (см. рис.)

$$\vec{F}_2 \times \vec{r}_2 = 0. \tag{17}$$

В раскрытом виде равенство (17) имеет вид

$$\frac{m_3}{\Delta_{23}^3}\left(\vec{r}_3 \times \vec{r}_2\right) + \frac{m_1}{\Delta_{21}^3}\left(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2\right) = 0.$$

Последнее равенство перепишем в виде

$$\left(\frac{m_3}{\Delta_{23}^3}\vec{r}_3 + \frac{m_1}{\Delta_{21}^3}\vec{r}_1\right) \times \vec{r}_2 = 0. \tag{18}$$

Полученное соотношение (18) назовем *инвариантом центра сил* ограниченной задачей трех тел в специальной неинерциальной центральной системе координат *в векторной форме*. Далее, учитывая соотношения (см. рис.)

$$\vec{r}_3 = r_3\vec{e}_3 = r_3\left(-\vec{e}_1\right), \quad \vec{e}_1 = \frac{\vec{r}_1}{r_1}, \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{r}_3}{r_3}, \tag{19}$$

можно перейти к скалярному равенству

$$\left(\frac{m_3}{\Delta_{23}^3}r_3 - \frac{m_1}{\Delta_{21}^3}r_1\right) r_2 \sin\alpha = 0, \tag{20}$$

где α есть угол между векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ (рис. 1). Соотношение (20) назовем *инвариантом центра сил* ограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной центральной системе координат *в скалярной форме*.

Равенство (20) формально-математически выполнимо в двух случаях:

$$\frac{m_3}{\Delta_{23}^3} r_3 - \frac{m_1}{\Delta_{21}^3} r_1 = 0, \quad r_2 \sin\alpha \neq 0; \tag{21}$$

$$r_2 \sin\alpha = 0, \quad \left(\frac{m_3}{\Delta_{23}^3} r_3 - \frac{m_1}{\Delta_{21}^3} r_1\right) \neq 0. \tag{22}$$

В первом случае (21) во все время движения три тела образуют треугольник. Размеры, форма и ориентация треугольника со временем меняются. Таким образом, соотношение (21) имеет место в *треугольной* ограниченной задаче трех тел. Этот случай рассмотрен во второй части работы.

Во втором случае (22) три тела во все время движения находятся на одной и той же прямой, то есть имеем *коллинеарную* ограниченную задачу трех тел. Коллинеарная ограниченная задача трех тел рассмотрена в третьей части настоящей работы.

Первое равенство условия (21) перепишем в виде

$$\frac{r_3}{r_1} = \frac{m_1}{m_3} \left(\frac{\Delta_{23}}{\Delta_{21}}\right)^3. \tag{23}$$

Таким образом, в специальной неинерциальной центральной системе координат, независимо от значения масс основных тел и свойства треугольника, образованного тремя телами, равенство (23) имеет место во все время движения в треугольной ограниченной задаче трех тел.

Соотношение (23) назовем *инвариантом центра сил* треугольной ограниченной задачи трех тел в скалярной форме. В векторной форме *инвариант центра сил* треугольной ограниченной задачи трех тел можно написать в виде

$$m_1 \Delta_{23}^3 \vec{r}_1 + m_3 \Delta_{21}^3 \vec{r}_3 = 0. \tag{24}$$

1.4 Определение начала специальной неинерциальной центральной системы координат

Обозначим важный безразмерный параметр задачи

$$\frac{r_3}{r_1} = k = k(t) > 0. \tag{25}$$

Для однозначного определения начала специальной неинерциальной системы координат нужно знать безразмерную величину k. Если известно k, тогда с учетом (19) получим

$$\vec{r}_{31} = \vec{r}_1 - \vec{r}_3 = \vec{r}_1 - r_3\left(-\vec{e}_1\right) = \vec{r}_1 - \left(k r_1\right)\left(-\vec{e}_1\right) = \vec{r}_1 + k\vec{r}_1 = \left(1+k\right)\vec{r}_1.$$

Следовательно, можно написать

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{1+k}\vec{r}_{31}; \quad \vec{r}_3 = -\frac{k}{1+k}\vec{r}_{31}. \tag{26}$$

Поэтому из уравнений (11) можно определить начало специальной неинерциальной центральной системы координат

$$\left(m_1 + m_3\right)\vec{R}_G = \vec{a}^* t + \vec{b}^* - \left(m_1 \vec{r}_1 + m_3 \vec{r}_3\right) = \vec{a}^* t + \vec{b}^* - \frac{m_1 - k m_3}{1+k}\vec{r}_{31}. \tag{27}$$

Таким образом, определение начала специальной неинерциальной центральной системы координат сводится к определению параметра k. Если этот параметр определен, тогда инвариант центра сил треугольной ограниченной задачи трех тел (23) можно написать в виде

$$\left(\frac{\Delta_{23}}{\Delta_{21}}\right)^3 = k\frac{m_3}{m_1}. \tag{28}$$

1.5 Преобразование $\vec{W}$ с использованием решений задачи двух основных тел

Решение дифференциального уравнения движения задачи двух основных тел (14) в специальной неинерциальной центральной системе координат запишем в виде [10, 11]

$$r_{31} = r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}, \quad r^2\dot{\theta} = c_{31} = c = const \neq 0; \tag{29}$$

$$p = a\left(1 - e^2\right), \quad c^2 = \mu p, \quad \mu = f\left(m_1 + m_3\right); \tag{30}$$

$$x_{31} = r\cos\theta, \quad y_{31} = r\sin\theta, \quad z_{31} = 0, \quad r_{31}^2 = r^2. \tag{31}$$

В случае $c_{31} = c = 0$ имеем прямолинейную ограниченную задачу трех тел, и этот частный случай будет исследован в отдельной работе. В настоящей работе исследован наиболее интересный случай

$$c_{31} \neq 0. \tag{32}$$

Далее, используя первое равенство из соотношения (26), преобразуем аналитическое выражение (16) для $\vec{W}$:

$$\vec{W} = \ddot{\vec{r}}_1 - \vec{F}_1 = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\vec{r}_{31}}{1+k}\right) - \vec{F}_1 = \frac{1}{1+k}\left[\left(\ddot{\vec{r}}_{31} + \vec{F}_{31}\right) - \vec{F}_{31} - (1+k)\vec{F}_1\right] +$$
$$+\frac{1}{1+k}\left(2\dot{\vec{r}}_{31}\left(-\frac{\dot{k}}{1+k}\right) + \vec{r}_{31}\left(-\frac{\ddot{k}}{1+k} + \frac{2\dot{k}^2}{(1+k)^2}\right)\right).$$

Учитывая соотношения

$$\ddot{\vec{r}}_{31} + \vec{F}_{31} = 0, \quad \vec{F}_{31} = f\frac{m_1+m_3}{r_{31}^3}\vec{r}_{31}, \quad \vec{F}_1 = fm_3\frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{r_{13}^3} = fm_3\frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}^3} = -fm_3\frac{\vec{r}_{31}}{r_{31}^3};$$

окончательно получим

$$\vec{W} = -f\frac{(m_1 - km_3)}{k+1}\frac{\vec{r}_{31}}{r_{31}^3} + 2\dot{\vec{r}}_{31}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+k}\right) + \vec{r}_{31}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{1+k}\right). \tag{33}$$

1.6 Дифференциальное уравнение ограниченной задачи трех тел с учетом определения начала специальной неинерциальной центральной системы координат

Учитывая выражения (10) и (33), дифференциальное уравнение ограниченной задачи трех тел (13) напишем в следующем виде:

$$\ddot{\vec{r}}_2 - \vec{F}_2 = \vec{W}, \tag{34}$$

$$\vec{F}_2 = f\left(m_1\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\Delta_{21}^3} + m_3\frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{\Delta_{23}^3}\right); \tag{35}$$

$$\vec{W} = -f\frac{(m_1 - km_3)}{k+1}\frac{\vec{r}_{31}}{r_{31}^3} + 2\dot{\vec{r}}_{31}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+k}\right) + \vec{r}_{31}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{1+k}\right). \tag{36}$$

Полученное дифференциальное уравнение движения (34) открывает новые возможности в исследовании ограниченной задачи трех тел. Уравнение (34) назовем *основным дифференциальным уравнением ограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной центральной системе координат с началом в центре сил.* Из этого уравнения движения можно получить различные оригинальные виды уравнений движения для исследования различных частных случаев ограниченной задачи трех тел.

2 Треугольная ограниченная задача трех тел

2.1 Базовая форма дифференциальных уравнений движения треугольной ограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной центральной системе координат

Используя инвариант центра сил (28) и соотношение (25), преобразуем аналитическое выражение (35) для $\vec{F}_2$:

$$\vec{F}_2 = fm_3\frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{\Delta_{23}^3} + fm_1\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\Delta_{21}^3} = f\frac{m_3}{\Delta_{23}^3}\left\{\vec{r}_3 - \vec{r}_2 + \left[\frac{m_1}{m_3}\frac{\Delta_{23}^3}{\Delta_{21}^3}\right](\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\right\} =$$
$$= f\frac{m_3}{\Delta_{23}^3}\left\{-\left[\vec{r}_2 + \left(\frac{r_3}{r_1}\right)\vec{r}_2\right] + \vec{r}_3 + \left(\frac{r_3}{r_1}\right)\vec{r}_1\right\} = -f\frac{m_3}{\Delta_{23}^3}(1+k)\,\vec{r}_2 + f\frac{m_3}{\Delta_{23}^3}\left(\frac{r_1\vec{r}_3 + r_3\vec{r}_1}{r_1}\right).$$

Согласно соотношениям (19) имеем (рис. 1)

$$r_1\vec{r}_3 + r_3\vec{r}_1 = r_1 r_3(-\vec{e}_1) + r_3 r_1 \vec{e}_1 = (-r_1 r_3 + r_3 r_1)\vec{e}_1 = 0.$$

Таким образом, окончательно получим

$$\vec{F}_2 = -f\frac{m_3\,(1+k)}{\Delta_{23}^3}\vec{r}_2. \tag{37}$$

Поэтому дифференциальное уравнение движения треугольной ограниченной задачи трех тел (34) в специальной неинерциальной центральной системе координат с учетом преобразованного выражения (37) может быть написано в виде

$$\ddot{\vec{r}}_2 + f\frac{m_3}{\Delta_{23}^3}\,(1+k)\,\vec{r}_2 = \vec{W}. \tag{38}$$

Далее, используя теорему Стюарта [12], выразим Δ_{23}^3 через r_2, r_{31}, m_1, m_3, k. Аналитическое выражение теоремы Стюарта в наших обозначениях (рис. 1) имеет вид

$$r_2^2 = \Delta_{21}^2\frac{r_3}{r_{31}} + \Delta_{23}^2\frac{r_1}{r_{31}} - r_3 r_1. \tag{39}$$

Инвариант центра сил треугольной ограниченной задачи трех тел (28) перепишем в виде

$$\Delta_{21} = \left(\frac{m_1}{m_3 k}\right)^{1/3}\Delta_{23}. \tag{40}$$

Из формул (26) следуют модули радиус-векторов

$$r_1 = \frac{1}{1+k}r_{31}, \quad r_3 = \frac{k}{1+k}r_{31}. \tag{41}$$

Подставляя (40), (41) в правые части равенства (39), получим

$$r_2^2 = \left[\left(\frac{m_1}{m_3}\right)^{2/3}k^{1/3} + 1\right]\frac{\Delta_{23}^2}{1+k} - \frac{k}{(1+k)^2}r_{31}^2.$$

Отсюда следует

$$\Delta_{23}^3 = \frac{(k+1)^{3/2}}{\left(1 + (m_1/m_3)^{2/3}\,k^{1/3}\right)^{3/2}}\left(r_2^2 + \frac{k}{(k+1)^2}r_{31}^2\right)^{3/2}. \tag{42}$$

С учетом последнего выражения (42) уравнения движения (38) окончательно имеют вид

$$\ddot{\vec{r}}_2 + \frac{\mu_2}{\left(r_2^2 + \sigma_2^2 r_{31}^2\right)^{3/2}}\vec{r}_2 = \vec{W}; \tag{43}$$

$$\mu_2 = f\frac{\left(m_3^{2/3} + m_1^{2/3}k^{1/3}\right)^{3/2}}{(1+k)^{1/2}}; \quad \sigma_2^2 = \frac{k}{(k+1)^2}. \tag{44}$$

Уравнения (40), (43)-(44) и (36), где нет никаких ограничений относительно параметра k выбранного, согласно (25), назовем *базовой формой* дифференциальных уравнений движения *треугольной ограниченной задачи трех тел* в специальной неинерциальной центральной системе координат. Причем из (31) следует, что $\vec{W} = \vec{W}\,(W_x,\, W_y,\, 0)$.

Полученные уравнения движения треугольной ограниченной задачи трех тел отличаются от известных форм уравнений движения ограниченной задачи трех тел и могут быть исследованы различными известными методами. Эти уравнения получены без ограничения при решении (29)-(31) дифференциального уравнения задачи двух основных тел (14). Поэтому они могут быть использованы при исследовании эллиптической, параболической и гиперболической ограниченной задач трех тел.

В скалярной форме базовые дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x}_2 + \frac{\mu_2}{\left(r_2^2 + \sigma_2^2 r_{31}^2\right)^{3/2}} x_2 = W_x, \quad \ddot{y}_2 + \mu_2 \frac{y_2}{\left(\sigma_2^2 r_{31}^2 + r_2^2\right)^{3/2}} = W_y, \quad \ddot{z}_2 + \mu_2 \frac{z_2}{\left(\sigma_2^2 r_{31}^2 + r_2^2\right)^{3/2}} = 0; \tag{45}$$

$$\begin{aligned} W_x &= -f\frac{(m_1 - km_3)}{k+1}\frac{x_{31}}{r_{31}^3} + 2\dot{x}_{31}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+k}\right) + x_{31}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{1+k}\right); \\ W_y &= -f\frac{(m_1 - km_3)}{k+1}\frac{y_{31}}{r_{31}^3} + 2\dot{y}_{31}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+k}\right) + y_{31}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{1+k}\right). \end{aligned} \tag{46}$$

Инвариант центра сил (40) перепишем в виде

$$\left(x_2 - \frac{1}{1+k}x_{31}\right)^2 + \left(y_2 - \frac{1}{1+k}y_{31}\right)^2 + z_2^2 =$$

$$= \left(\frac{m_1}{km_3}\right)^{2/3}\left[\left(x_2 + \frac{k}{1+k}x_{31}\right)^2 + \left(y_2 + \frac{k}{1+k}y_{31}\right)^2 + z_2^2\right]. \tag{47}$$

Система уравнений (45)-(46) и (47) содержит четыре неизвестные скалярные величины x_2, y_2, z_2, k, поэтому эти четыре скалярные уравнения представляют собой замкнутую систему уравнений.

2.2 Дифференциальные уравнения движения треугольной ограниченной задачи трех тел во вращающейся специальной неинерциальной центральной системе координат в пульсирующих переменных

В общем случае $\vec{r}_2 = \vec{r}_2\,(x_2,\, y_2,\, z_2)$. Рассмотрим уравнения движения треугольной ограниченной задачи трех тел (45)-(47) в специальной неинерциальной центральной системе координат в общем случае, когда

$$k = k\,(t) \neq const. \tag{48}$$

2.2.1 Уравнения движения во вращающейся специальной неинерциальной центральной системе координат

Обозначим

$$D_2 = 2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+k}\right), \quad E_2 = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{1+k}\right), \quad B_2 = -f\frac{m_1 - km_3}{k+1}. \tag{49}$$

Из (46) следует

$$\begin{aligned} W_x &= B_2\frac{x_{31}}{r_{31}^3} + D_2\dot{x}_{31} + E_2 x_{31}; \\ W_y &= B_2\frac{y_{31}}{r_{31}^3} + D_2\dot{y}_{31} + E_2 y_{31}. \end{aligned} \tag{50}$$

С учетом этих обозначений из дифференциальных уравнений движения (45) получим

$$\ddot{x}_2 + \frac{\mu_2 x_2}{(r_2^2 + \sigma_2^2 r_{31}^2)^{3/2}} = B_2\frac{x_{31}}{r_{31}^3} + D_2\dot{x}_{31} + E_2 x_{31}, \quad \ddot{y}_2 + \frac{\mu_2 y_2}{(r_2^2 + \sigma_2^2 r_{31}^2)^{3/2}} = B_2\frac{y_{31}}{r_{31}^3} + D_2\dot{y}_{31} + E_2 y_{31}; \tag{51}$$

$$\ddot{z}_2 + \frac{\mu_2 z_2}{(r_2^2 + \sigma_2^2 r_{31}^2)^{3/2}} = 0. \tag{52}$$

Эти уравнения, согласно решению задачи двух тел (29)–(31) описывают эллиптическую (в частности, круговую), гиперболическую, параболическую треугольную ограниченную задачу трех тел.

Переходим к вращающейся системе координат $G\xi_{вр}\eta_{вр}\zeta_{вр}$. Переход к вращающейся системе координат определяется формулами [1, 2, 9]

$$x_2 = \xi_{вр}\cos\theta - \eta_{вр}\sin\theta, \quad y_2 = \xi_{вр}\sin\theta + \eta_{вр}\cos\theta, \quad z_2 = \zeta_{вр}; \tag{53}$$

$$r_2^2 = \xi_{вр}^2 + \eta_{вр}^2 + \zeta_{вр}^2 = \rho_{вр}^2,$$

где $\theta = \theta(t)$ определяется решением задачи двух тел (29)-(31). Вычисляя, получим

$$\ddot{x}_2 = \left(\ddot{\xi}_{вр} - 2\dot{\theta}\dot{\eta}_{вр} - \dot{\theta}^2\xi_{вр} - \ddot{\theta}\eta_{вр}\right)\cos\theta - \left(\ddot{\eta}_{вр} + 2\dot{\theta}\dot{\xi}_{вр} - \dot{\theta}^2\eta_{вр} + \ddot{\theta}\xi_{вр}\right)\sin\theta;$$

$$\ddot{y}_2 = \left(\ddot{\eta}_{вр} + 2\dot{\theta}\dot{\xi}_{вр} - \dot{\theta}^2\eta_{вр} + \ddot{\theta}\xi_{вр}\right)\cos\theta + \left(\ddot{\xi}_{вр} - 2\dot{\theta}\dot{\eta}_{вр} - \dot{\theta}^2\xi_{вр} - \ddot{\theta}\eta_{вр}\right)\sin\theta,$$

$$\ddot{z}_2 = \ddot{\zeta}_{вр}.$$

Пусть новая ось $G\xi_{вр}$ все время проходит через точки с массами m_1 и m_3.

В результате получим уравнения движения треугольной ограниченной задачи трех тел *во вращающейся специальной неинерциальной центральной системе координат* в виде

$$\begin{gathered}\ddot{\xi}_{вр} - 2\dot{\theta}\dot{\eta}_{вр} - \dot{\theta}^2\xi_{вр} - \ddot{\theta}\eta_{вр} + \frac{\mu_2}{\left(\rho_{вр}^2 + r^2\sigma_2^2\right)^{3/2}}\xi_{вр} = \frac{B_2}{r^2} + D_2\dot{r} + E_2 r;\\ \ddot{\eta}_{вр} + 2\dot{\theta}\dot{\xi}_{вр} - \dot{\theta}^2\eta_{вр} + \ddot{\theta}\eta_{вр} + \frac{\mu_2}{\left(\rho_{вр}^2 + r^2\sigma_2^2\right)^{3/2}}\eta_{вр} = D_2 r\dot{\theta};\end{gathered} \tag{54}$$

$$\ddot{\zeta}_{вр} + \frac{\mu_2}{\left(\rho_{вр}^2 + r^2\sigma_2^2\right)^{3/2}}\zeta_{вр} = 0. \tag{55}$$

Инвариант центра сил (47) преобразуется к виду

$$\left(\xi_{вр} - \frac{1}{1+k}r\right)^2 + \eta_{вр}^2 + \zeta_{вр}^2 = \left(\frac{m_1}{km_3}\right)^{2/3}\left[\left(\xi_{вр} + \frac{k}{1+k}r\right)^2 + \eta_{вр}^2 + \zeta_{вр}^2\right]. \tag{56}$$

2.2.2 Уравнения движения треугольной ограниченной задачи трех тел в безразмерных пульсирующих переменных во вращающейся специальной неинерциальной центральной системе координат

Переходим к пульсирующим координатам ξ, η, ζ с новой независимой переменной θ по формулам [1, 2, 9]

$$\xi = \frac{\xi_{вр}}{r}, \quad \eta = \frac{\eta_{вр}}{r}, \quad \zeta = \frac{\zeta_{вр}}{r}, \quad d\theta = \frac{c}{r^2}dt, \tag{57}$$

$$\rho_{вр}^2 = r^2\rho^2, \quad \rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

где $r = r(t)$ и $\theta = \theta(t)$ определяются решением задачи двух тел (29)–(31). Вычисляя, получим

$$\dot{\xi}_{вр} = \dot{\theta}\left(r'\xi + r\xi'\right), \quad \ddot{\xi}_{вр} = \dot{\theta}\left(\dot{\theta}'\left(r'\xi + r\xi'\right) + \dot{\theta}\left(r''\xi + 2r'\xi' + r\xi''\right)\right);$$

$$\dot{\eta}_{вр} = \dot{\theta}\left(r'\eta + r\eta'\right), \quad \ddot{\eta}_{вр} = \dot{\theta}\left(\dot{\theta}'\left(r'\eta + r\eta'\right) + \dot{\theta}\left(r''\eta + 2r'\eta' + r\eta''\right)\right);$$

$$\ddot{\zeta}_{вр} = \dot{\theta}\left(\dot{\theta}'\left(r'\zeta + r\zeta'\right) + \dot{\theta}\left(r''\zeta + 2r'\zeta' + r\zeta''\right)\right).$$

В этих аналитических выражениях и далее штрихом обозначается дифференцирование по переменной θ.

Учитывая соотношения

$$2r'\dot{\theta} + \dot{\theta}'r = 0, \quad \dot{\theta}r'' + \dot{\theta}'r' - \dot{\theta}r = -\frac{c}{p},$$

получим преобразованные *дифференциальные уравнения движения треугольной ограниченной задачи трех тел в пульсирующих переменных во вращающейся специальной неинерциальной центральной системе координат*

$$\xi'' - 2\eta' - \frac{1}{1+e\cos\theta}\left(1 - \frac{A}{\left(\rho^2 + \sigma_2^2\right)^{3/2}}\right)\xi = \frac{1}{1+e\cos\theta}B + s''; \tag{58}$$

$$\eta'' + 2\xi' - \frac{1}{1+e\cos\theta}\left(1 - \frac{A}{\left(\rho^2 + \sigma_2^2\right)^{3/2}}\right)\eta = 2s'; \tag{59}$$

$$\zeta'' + \frac{1}{1 + e\cos\theta}\left(e\cos\theta + \frac{A}{\left(\rho^2 + \sigma_2^2\right)^{3/2}}\right)\zeta = 0, \tag{60}$$

где обозначены безразмерные величины

$$A = \frac{\mu_2}{\mu} = \frac{\left[m_3^{2/3} + m_1^{2/3}k^{1/3}\right]^{3/2}}{(1+k)^{1/2}\,(m_1 + m_3)} = \frac{\left[1 + \nu^{2/3}k^{1/3}\right]^{3/2}}{(1+k)^{1/2}(1+\nu)} = \frac{\left(s^{1/3} + \nu^{2/3}\,(1-s)^{1/3}\right)^{3/2}}{1+\nu} > 0; \tag{61}$$

$$B = \frac{B_2}{\mu} = \frac{km_3 - m_1}{(k+1)(m_1 + m_3)} = \frac{k - \nu}{(k+1)(1+\nu)} = \frac{1 - s\,(1+\nu)}{1+\nu}, \tag{62}$$

$$s = \frac{1}{1+k}, \quad \nu = \frac{m_1}{m_3} = const > 0, \quad \sigma_2^2 = s - s^2. \tag{63}$$

Инвариант центра сил треугольной ограниченной задачи трех тел (56) в пульсирующих переменных ξ, η, ζ, с учетом обозначения (63), можно написать в виде

$$(\xi - \xi_1)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \left(\frac{\nu s}{1-s}\right)^{2/3}\left[(\xi - \xi_3)^2 + \eta^2 + \zeta^2\right]; \tag{64}$$

$$\xi_1 = s \neq const, \quad \xi_3 = -\,(1-s) \neq const.$$

Полученная форма инварианта центра сил треугольной ограниченной задачи трех тел (64), записанная в пульсирующих переменных, удобна для качественных исследований треугольной ограниченной задачи трех тел.

Отметим, что выведенные три дифференциальные уравнения (58)–(60) и одно алгебраическое уравнение (64) могут содержать четыре переменные ξ, η, ζ и s, поэтому система замкнутая.

Полученные дифференциальные уравнения движения (58)–(60) треугольной ограниченной задачи трех тел, соответствующие параметру $k = k\,(t) \neq const$, в специальной неинерциальной центральной системе координат в пульсирующих переменных (57) и алгебраическое уравнение (64) удобны для установления точных частных решений. В эти уравнения входит массовый параметр ν, согласно обозначению (63).

Как показывает анализ уравнений (27), (45)–(47), для исследования полученных базовых дифференциальных уравнений движения треугольной ограниченной задачи трех тел в новой специальной неинерциальной центральной системе координат удобно различать случаи $k = m_1/m_3 = const$, $k = const \neq m_1/m_3$ и $k = k(t)$.

3 Коллинеарная ограниченная задача трех тел

3.1 Базовое дифференциальное уравнение движения коллинеарной ограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной центральной системе координат

Рассмотрим случай (22)

$$r_2 \sin\alpha = 0, \quad \left(\frac{m_3}{\Delta_{23}^3} r_3 - \frac{m_1}{\Delta_{21}^3} r_1\right) \neq 0. \tag{65}$$

Из первого равенства следует, что в этом случае три тела все время движения лежат на одной и той же прямой. Эта прямая все время движения находится на фиксированной плоскости движения основных двух тел (31). Поэтому $z_2 = 0$, то есть *коллинеарная ограниченная задача трех тел плоская.* В случае

$$r_2 = 0 \tag{66}$$

безмассовое тело лежит в начале системы координат. Если

$$r_2 \neq 0, \quad \sin\alpha = 0, \tag{67}$$

то возможно три комбинации расположения трех тел на одной прямой. Используя соотношения (26)

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{1+k}\vec{r}_{31}; \quad \vec{r}_3 = -\frac{k}{1+k}\vec{r}_{31},$$

преобразуем аналитическое выражение (35) для $\vec{F}_2$. В результате получим

$$\vec{F}_2 = -f\left(\frac{m_3}{\Delta_{23}^3} + \frac{m_1}{\Delta_{21}^3}\right)\vec{r}_2 - f\left(\frac{km_3}{(1+k)\Delta_{23}^3} - \frac{m_1}{(1+k)\Delta_{21}^3}\right)\vec{r}_{31}. \tag{68}$$

Таким образом, дифференциальные уравнения движения ограниченной задачи трех тел (34)-(36) в специальной неинерциальной центральной системе координат в случае *коллинеарной ограниченной задачи трех тел* имеет вид

$$\ddot{\vec{r}}_2 + f\left(\frac{m_3}{\Delta_{23}^3} + \frac{m_1}{\Delta_{21}^3}\right)\vec{r}_2 + f\left(\frac{km_3}{(1+k)\Delta_{23}^3} - \frac{m_1}{(1+k)\Delta_{21}^3}\right)\vec{r}_{31} = \vec{W}; \tag{69}$$

$$\vec{W} = -f\frac{(m_1 - km_3)}{k+1}\frac{\vec{r}_{31}}{r_{31}^3} - \frac{2}{1+k}\left(\frac{\dot{k}}{1+k}\right)\dot{\vec{r}}_{31} - \frac{1}{1+k}\left(\frac{\ddot{k}}{1+k} - 2\frac{\dot{k}^2}{(1+k)^2}\right)\vec{r}_{31}. \tag{70}$$

Полученное дифференциальное уравнение движение (69) назовем *базовым дифференциальным уравнением* движения коллинеарной ограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной центральной системе координат.

Заключение

В настоящей работе аналитически исследована пространственная ограниченная задача трех тел в новой специальной неинерциальной центральной системе координат с началом в центре сил. Получены новые результаты:

1. Выведено новое основное дифференциальное уравнение движения ограниченной задачи трех тел. В новой системе координат найдено аналитическое выражение инварианта центра сил.

2. Исходя из свойства инварианта центра сил ограниченной задачи трех тел, в новой системе координат на уровне дифференциальных уравнений движения задача разделена на две отдельные задачи: *треугольная* ограниченная задача трех тел и *коллинеарная* ограниченная задача трех тел. Получены различные базовые дифференциальные уравнения движения этих двух задач.

3. Выведены дифференциальные уравнения движения треугольной ограниченной задачи трех тел во вращающейся специальной неинерциальной центральной системе координат в пульсирующих переменных.

4. Выведены дифференциальные уравнения *коллинеарной* ограниченной задачи трех тел в неинерциальной центральной системе координат с использованием инварианта центра сил.

Полученные новые дифференциальные уравнения движения ограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной центральной системе координат могут быть эффективно использованы при исследовании этой задачи и открывают новые перспективы.

Предложенный метод может быть модифицирован для исследования неограниченной и ограниченной задачи $n\,(n \geq 3)$ тел. Полученные результаты также могут быть использованы в гомографической динамике [4].

В перспективе планируются детальный анализ полученных новых дифференциальных уравнений движения ограниченной задачи трех тел и установление новых точных частных решений этой задачи. Основная идея настоящей работы и предварительные результаты были изложены в работах [13–17].

Список литературы

1 Себехей В. Теория орбит. Ограниченная задача трех тел / В.Себехей. — М.: Наука, 1982. — 656 с.

2 Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике / А.П.Маркеев. — М.: Наука, 1978. — 312 с.

3 Dvorak R. Celestial Dynamics. Chaoticity and Dynamics of Celestial Systems / R.Dvorak, Ch.Lhotka. — Germany: Wiley-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA, 2013. — 309 p.

4 Гребеников Е.А. Математические проблемы гомографической динамики / Е.А.Гребеников. — М.: МАКС Пресс, 2010. — 256 с.

5 Морбиделли А. Современная небесная механика. Аспекты динамики Солнечной системы / А.Морбиделли. — М.-Ижевск: Институт комплексных исследований, 2014. — 432 с.

6 Брюно А.Д. Ограниченная задача трех тел. Плоские периодические орбиты / А.Д.Брюно. — М.: Наука, 1990. — 295 с.

7 Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики / А.Уинтнер. — М.: Наука, 1967. — 524 с.

8 Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы / Г.Н.Дубошин. — 2-е изд. — М.: Наука, 1978. — 456 с.

9 Маршал К. Задача трех тел / К.Маршал. — М.-Ижевск: Институт комплексных исследований, 2004. — 640 с.

10 Лукьянов Л.Г. Лекции по небесной механике / Л.Г.Лукьянов, Г.И.Ширмин. — Алматы: Эверо, 2009. — 277 с.

11 Холшевников К.В. Задача двух тел / К.В.Холшевников, В.Б.Титов. — СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 2007. — 180 с.

12 Атанасян Л.С. Геометрия / Л.С.Атанасян, В.Ф Бутузов, Ю.А.Глазков. — 5-е. изд. — М.: Вита-Пресс, 2005. — 176 с.

13 Минглибаев М.Дж. К равнобедренной ограниченной задаче трех тел / М.Дж.Минглибаев, Т.М.Жумабек // Известия НАН РК. Серия физ.-мат. — 2016. — № 6(310). — С. 67–73.

14 Жумабек Т.М. Об одном частном случае плоской ограниченной задачи трех тел / Т.М.Жумабек, М.Дж.Минглибаев // Математический журнал. Институт математики и математического моделирования. — 2016. — Т. 16, № 4(62). — С. 99-120.

15 Минглибаев М.Дж. Новые точные частные решения ограниченной задачи трех тел / М.Дж.Минглибаев, Т.М.Жумабек // Актуальные проблемы математики и информатики: тезисы докл. Междунар. науч. конф., посвящ. 80-летию со дня рождения академика НАН РК К.А. Касымова. — Алматы, 2015. — С. 86–88.

16 Минглибаев М.Дж. Новые уравнения движения ограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной системе координат / М.Дж.Минглибаев, Т.М.Жумабек // Вестн. КазНПУ им.Абая. Серия физ.-мат. науки. — 2015. — № 1(49). — С. 62–68.

17 Минглибаев М.Дж. Новые уравнения движения неограниченной и ограниченной задачи трех тел и их точные решения / М.Дж.Минглибаев, Т.М.Жумабек // Актуальные проблемы математики и математического моделирования: тезисы докл. Междунар. науч. конф. — Алматы, 2015. — С. 347–349.

М.Ж. Минглибаев, Т.М. Жұмабек, Г.М. Маемерова

Арнайы инерциалды емес центрлік координата жүйесінде шектелген үш дене мәселесін зерттеу

Мақалада кеңістікте классикалық шектелген үш дене мәселесі аналитикалық түрде зерттелген. Жаңа арнайы инерциалды емес центрлік координата жүйесі енгізілген. Бұл координата жүйесінің бас нүктесі зерттеліп жатқан мәселенің күш центрімен сәйкес келеді. Арнайы инерциалды емес центрлік координата жүйесінде шектелген үш дене мәселесінің жаңа базалық дифференциалдық теңдеулері алынды. Жаңа координата жүйесінде күш центрі инвариантының аналитикалық өрнегі табылды. Енгізілген координата жүйесінде шектелген үш дене мәселесі екі бөлек мәселе ретінде қарастырылған және осы екі мәселенің базалық дифференциалдық теңдеулері алынды. Арнайы инерциалды емес центрлік координата жүйесінде қарастырылып жатқан мәселені бұлай екіге бөлудің дұрыстығы осы координата жүйесінде табылған күш центрінің инвариантымен дәлелденеді. Біріншісі – үш дене қозғалыстың барлық кезінде үшбұрыш жасайтын үшбұрышты шектелген үш дене мәселесі. Екіншісі – үш дене қозғалыстың барлық мезетінде бір түзудің бойында жататындай коллинеарлы шектелген үш дене мәселесі. Айналмалы арнайы инерциалды емес центрлік координата жүйесінде пульсациялаушы айнымалыларда үшбұрышты шектелген үш дене мәселесінің дифференциалдық қозғалыс теңдеулері алынды. Сондай инерциалды емес центрлік координата жүйесінде коллинеарлы шектелген үш дене мәселесінің дифференциалдық теңдеулері табылды. Арнайы инерциалды емес центрлік координата жүйесінде алынған шектелген үш дене мәселесінің дифференциалдық теңдеулердің жаңа түрлері бұл мәселені зерттеуде жаңа мүмкіндіктер ашады.

Кілт сөздер: шектелген үш дене есебі, инерциалды емес координата жүйесі, күштер центрінің инварианттары, тең бүйірлі шешімдер, либрация нүктелері.

M.Zh. Minglibayev, T.M. Zhumabek, G.M. Mayemerova

Investigation of the restricted three-body problem in a special non-inertial central coordinate system

In this work we analytically investigated the spatial classical restricted three-body problem. A new special non-inertial central coordinate system has been introduced. The origin of the introduced coordinate system coincides with center of forces of the investigated problem. In the special non-inertial central coordinate system are obtained new basic differential equations of motions of the restricted three-body problem. In the new coordinate system is found the analytic expression for the invariant of the center of forces. In the introduced coordinate system the restricted three-body problem is divided into two separate problems, and various basic differential equations of these two problems are obtained . The correctness of such division of the investigated problem into two is provided by the invariant of the center of force finding in the same coordinate system. The first is a triangular restricted three-body problem when three bodies form a triangle at all time of motion. The second is a collinear restricted three-body problem when three bodies lie on the same line at all time of motion. The differential equations of motion of the triangular restricted three-body problem in the rotational special non-inertial central coordinate system in pulsating variables are derived separately. Also the differential equations of the collinear restricted three-body problem in the non-inertial central coordinate system are obtained separately. The new obtained forms of differential equations of the restricted three-body problem in the special non-inertial coordinate system open the new perspectives in the investigation of this problem.

Keywords: restricted three-body problem, non-inertial coordinate system, invariant of the center of forces, isosceles solutions, libration points.

References

1 Shebehely, V. (1982). *Teoriya orbit. Ohranichennaia zadacha treh tel [The theory of orbits. The limited three-body problem]*. Moscow: Nauka [in Russian].

2 Markeev, A.P. (1978). *Tochki libratsii v nebesnoi mekhanike i kosmodinamike [Libration points in celestial mechanics and cosmodynamics]*. Moscow: Nauka [in Russian].

3 Dvorak, R. & Lhotka, Ch. (2013). *Celestial Dynamics. Chaoticity and Dynamics of Celestial Systems.* Germany: Wiley-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA.

4 Grebenikov, Ye.A. (2010). *Matematicheskiie problemy homohraficheskoi dinamiki [Mathematical problems of homographic dynamics]*. Moscow: MAX Press [in Russian].

5 Morbidelli, A. (2014). *Sovremennaia nebesnaia mekhanika. Aspekty dinamiki Solnechnoi sistemy [Modern celestial mechanics. Aspects of the dynamics of the solar system]*. Moscow-Izhevsk: Institut kompleksnykh issledovanii [in Russian].

6 Bryuno, A.D. (1990). *Ohranichennaia zadacha trekh tel. Ploskiie periodicheskiie orbity [The limited three-body problem. Flat periodic orbits]*. Moscow: Nauka [in Russian].

7 Wintner, A. (1967). *Analiticheskiie osnovy nebesnoi mekhaniki [Analytical Foundations of Celestial Mechanics]*. Moscow: Nauka [in Russian].

8 Duboshin, G.N. (1978). *Nebesnaia mekhanika. Analiticheskiie i kachestvennyie metody [Celestial mechanics. Analytical and qualitative methods]*. Moscow: Nauka [in Russian].

9 Marshal, K. (2004). *Zadacha trekh tel [The three-body problem]*. Moscow-Izhevsk: Institut kompleksnykh issledovanii [in Russian].

10 Luk'yanov L.G. & Shirmin G.I. (2009). *Lektsii po nebesnoy mekhanike [Lectures on celestial mechanics]*. Almaty: Evero [in Russian].

11 Kholshevnikov, K.V. & Titov, V.B. (2007). *Zadacha dvukh tel [The two-body problem]*. Sankt-Peterburg: Izdatelstvo Sankt Peterburhskoho Universiteta [in Russian].

12 Atanasyan, L.S., Butuzov, V.F., & Glazkov, Iu.A. (2005). *Heometriya [Geometry]*. Moscow: Vita-Press [in Russian].

13 Minglibayev, M.Zh. & Zhumabek, T.M. (2016). K ravnobedrennoi ohranichennoi zadache trekh tel [To an isosceles bounded three-body problem]. *Izvestiia NAN RK. Seriia fiziko-matematicheskaia – Proceedings of NAS RK. Physics and mathematics series, 6(310),* 67–73 [in Russian].

14 Minglibayev, M.Zh. & Zhumabek, T.M. (2016). Ob odnom chastnom sluchae ploskoi ogranichennoi zadachi trekh tel [On a particular case of a plane bounded three-body problem]. *Matematicheskii zhurnal. Institut matematiki i matematicheskoho modelirovaniia – Matematicheskii zhurnal. Institute of Mathematics and Mathematical Model- tion, 16,* 4(62), 99–120 [in Russian].

15 Minglibayev, M.Zh. & Zhumabek, T.M. (2015). Novye tochnye chastnye resheniia ohranichennoi zadachi trekh tel [New exact particular solutions of the restricted three-body problem]. Proceedings from Actual problems of mathematics and computer science '15: *Mezhdunarodnaia nauchnaia konferentsiia, posvyashchennaya 80-letiyu so dnya rozhdeniya akademika NAN RK K.A. Kasymova* (pp. 86–88). Almaty [in Russian].

16 Minglibayev, M.Zh. & Zhumabek, T.M. (2015). Novye uravneniia dvizheniia ohranichennoi zadachi trekh tel v spetsialnoi neinertsialnoi sisteme koordinat [New equations of motion for a bounded three-body problem in a special noninertial coordinate system]. *Vestnik KazNPU imeni Abaia. Seriia Fiziko-matematicheskie nauki – Bulletin of Abay KazNPU. Series of Physics and Mathematics, 1(49),* 62–68 [in Russian].

17 Minglibayev, M.Zh. & Zhumabek, T.M. (2015). Novye uravneniia dvizheniia neohranichennoi i ohranichennoi zadachi trekh tel i ikh tochnye resheniia [New equations of motion for an unbounded and bounded three-body problem and their exact solutions]. Proceedings from Actual problems of mathematics and mathematical modeling: *Mezhdunarodnaia nauchnaia konferentsiia.* (pp. 347–349). Almaty [in Russian].