УДК 512.554.31

Ш.Ш. Ибраев

Университет «Болашак», Кызылорда, Казахстан;
Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы, Казахстан
(E-mail: ibrayevsh@mail.ru)

О когомологии алгебры Джекобсона-Витта

Изучение когомологии классических модулярных алгебр Ли с помощью методов теории представлений соответствующих алгебраических групп позволяет получить много интересных результатов. В последнее время такую тенденцию можно наблюдать в исследованиях когомологии простых алгебр Ли картановских типов, в которых результаты приводят к изучению когомологии алгебр Ли некоторых редуктивных алгебраических групп. В работе дано полное описание когомологии алгебры Джекобсона–Витта $W_3(1)$ над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 3$ с коэффициентами в алгебре разделенных степеней $O_3(1)$ с помощью вычисления когомологии классической алгебры Ли $\mathfrak{sl}_3(k)$.

Ключевые слова: алгебра Джекобсона–Витта, алгебра Ли, алгебра Ли картановского типа, когомология, условия коцикличности.

1 Введение

1.1 Обобщенная алгебра Джекобсона-Витта. Пусть k – алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 0$.

Пусть $\varepsilon_i = (\delta_{i1}, \cdots, \delta_{in})$, где $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера, $m_1, \cdots, m_n$ – целые положительные числа. Алгебра разделенных степеней $O_n(\mathbf{m})$ высоты $\mathbf{m} = \sum_{i=1}^{n} m_i\varepsilon_i$ определяется так:

$$O_n(\mathbf{m}) = \langle x^{(\alpha)} := \prod_{i=1}^{n} x^{(\alpha_i)} \,:\, \alpha \in \Gamma_n(\mathbf{m}),\, x^{(\alpha)}x^{(\beta)} = \prod_{i=1}^{n} C_{\alpha_i}^{\alpha_i+\beta_i} x^{(\alpha+\beta)}\rangle_k;$$

$$\Gamma_n(\mathbf{m}) = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varepsilon_i \,:\, \alpha_i \in \mathbb{Z}_0,\, 0 \le \alpha_i < p^{m_i},\, i = 1, \cdots, n\},$$

где $\mathbb{Z}_0$ — множество неотрицательных целых чисел.

Для $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \Gamma_n(\mathbf{m})$ пусть $\mid \alpha \mid = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Определим дифференцирования D_i, $i = 1, \cdots, n$, алгебры $O_n(\mathbf{m})$ по формуле

$$D_i x^{(\alpha)} = x^{(\alpha-\varepsilon_i)}.$$

Тогда пространство

$$W = W_n(\mathbf{m}) = \{\sum_{j=1}^{n} a_j D_j \,:\, a_j \in O_n(\mathbf{m}),\, i = 1, \cdots, n\}$$

с умножением

$$[\sum_{j=1}^{n} a_j D_j, \sum_{j=1}^{n} b_j D_j] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_j D_j(b_i) - b_j D_j(a_i))D_i$$

является алгеброй Ли и называется общей алгеброй Ли картановского типа или обобщенной алгеброй Джекобсона–Витта. Она является алгеброй Ли специальных дифференцирований $O_n(\mathbf{m})$, и в $O_n(\mathbf{m})$ естественным образом можно ввести структуру $W_n(\mathbf{m})$-модуля с помощью формулы

$$(\sum_{j=1}^{n} a_j D_j)x^{(\alpha)} = \sum_{j=1}^{n} a_j D_j(x^{(\alpha)}) = \sum_{j=1}^{n} a_j x^{(\alpha-\varepsilon_j)},\ \sum_{j=1}^{n} a_j D_j \in W_n(\mathbf{m}),\, x^{(\alpha)} \in O_n(\mathbf{m}).$$

Полагая $W_i = \langle x^{(\alpha)} D_j \ : \mid \alpha \mid = i+1,\ j = 1, \cdots, n\rangle_k$, получаем естественную градуировку $W = \bigoplus_{i\geq -1} W_i$ глубины 1. Алгебра Ли W является простым, кроме случая, когда $n = 1$ и $p = 2$. Линейное отображение $x^{(\varepsilon_j)} D_i \mapsto E_{ij}$ определяет изоморфизм между подалгеброй Ли W_0 и общей линейной алгеброй Ли $\mathfrak{gl}_n(k)$, где $E_{i,j}$ – квадратная матрица n-го порядка с элементами $e_{l,q} = \delta_{il}\delta_{jq}$.

1.2 Формулировка основных результатов. Рассмотрим обобщенную алгебру Джекобсона–Витта $W_n(\mathbf{m})$. Если $\mathbf{m} = (1, \cdots, 1)$, то $W_n(\mathbf{m})$ – ограниченная алгебра Ли. Ее называют алгеброй Джекобсона–Витта и обозначают через $W_n(\mathbf{1})$. В данной работе исследуются когомологии $W_3(\mathbf{1})$ с коэффициентами в $O_3(\mathbf{1})$. Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $L = W_3(\mathbf{1})$ – алгебра Джекобсона–Витта над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 3$ и $V = O_3(\mathbf{1})$ – L-модуль. Тогда $H^m(L, V) = 0$, за исключением следующих случаев:

$$H^0(L, V) \cong H^{12}(L, V) \cong k,\ H^1(L, V) \cong H^{11}(L, V) \cong k^4,\ H^2(L, V) \cong H^{10}(L, V) \cong k^6,$$

$$H^3(L, V) \cong H^4(L, V) \cong H^8(L, V) \cong H^9(L, V) \cong k^5,\ H^5(L, V) \cong H^7(L, V) \cong k^7,\ H^6(L, V) \cong k^8.$$

Согласно теореме 1,

$$\dim\ H^*(W_3(\mathbf{1}), O_3(\mathbf{1})) = \dim \sum_{m\geq 0} H^m(W_3(\mathbf{1}), O_3(\mathbf{1})) = 2\cdot 1 + 2\cdot 4 + 2\cdot 6 + 4\cdot 5 + 2\cdot 7 + 8 = 64.$$

Когомологии алгебр Ли картановских типов изучались в работах [1–5], где результаты получены с помощью вычисления когомологии алгебр Ли некоторых редуктивных алгебраических групп. Когомология $H^1(W_1(\mathbf{m}), O_1(\mathbf{m}))$ вычислена в [6], а когомология $H^2(W_2(\mathbf{m}), O_2(\mathbf{m}))$ – в работе [7].

2 Доказательство результатов

2.1. Когомологии $\mathfrak{gl}_n(k)$. В данном пункте доказывается, что вычисления когомологии $\mathfrak{gl}_n(k)$ с коэффициентами в тривиальном одномерном $\mathfrak{gl}_3(k)$-модуле k можно привести к вычислению когомологии классической алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(k)$. Такой результат ранее был получен в [5, предложение 1.2]. Применение результата, полученного авторами этой работы, требует дополнительных вычислений. Мы даем более простую формулу.

Предложение 2. Пусть $\mathfrak{gl}_n(k)$ – общая линейная алгебра Ли степени n над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 0$. Тогда

$$H^m(\mathfrak{gl}_n(k), k) \cong H^m(\mathfrak{sl}_n(k), k) \oplus H^{m-1}(\mathfrak{sl}_n(k), k). \tag{1}$$

Доказательство. Заметим, что $\mathfrak{gl}_n(k) \cong \mathfrak{sl}_n(k) \oplus k$. Рассматривая k как идеал алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n(k)$ и как $\mathfrak{gl}_n(k)$-модуль, мы можем использовать спектральную последовательность Серра-Хохшильда $\{E_r^{lq}\}$. В частности, для $H^m(\mathfrak{gl}_n(k), k)$ получаем

$$E_2^{lq} = H^l(\mathfrak{gl}_n(k)/k, H^q(k, k)) \cong H^l(\mathfrak{sl}_n(k), H^q(k, k)).$$

Очевидно, что $H^0(k, k) \cong H^1(k, k) \cong k$ и $H^q(k, k) = 0$, если $q \geq 2$. Поэтому $E_2^{lq} = 0$, если $q \geq 2$. Так как $l + q = m$, то $E_2^{m,0} \cong H^m(\mathfrak{sl}_n(k), k)$, $E_2^{m-1,1} \cong H^{m-1}(\mathfrak{sl}_n(k), k)$ и $E_2^{lq} = 0$ в других целочисленных точках первого квадранта. Следовательно,

$$H^m(\mathfrak{gl}_n(k), k) \cong E_2^{m,0} \oplus E_2^{m-1,1} \cong H^m(\mathfrak{sl}_n(k), k) \oplus H^{m-1}(\mathfrak{sl}_n(k), k).$$

Предложение 2 доказано.

Таким образом, вычисление когомологии $H^m(\mathfrak{gl}_n(k), k)$ приведено к вычислениям когомологии $H^m(\mathfrak{sl}_n(k), k)$ и $H^{m-1}(\mathfrak{sl}_n(k), k)$.

2.2. Когомологии $\mathfrak{sl}_3(k)$ и $\mathfrak{gl}_3(k)$. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{sl}_3(k)$ над полем k характеристики $p > 0$. Выберем в $\mathfrak{sl}_3(k)$ базис Шевалле $\{e_1, e_2, e_3, h_1, h_2, f_1, f_2, f_3\}$, где $e_i = e_{\alpha_i}, f_i = e_{-\alpha_i}, \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_2, i = 1, 2, 3,$ и положим $h_3 = h_1 + h_2$. Тогда $[e_i, f_i] = h_i$, $[h_i, e_i] = 2e_i$, $[h_i, f_i] = -2f_i$ для $i = 1, 2, 3$. Нетривиальные умножения задаются следующими равенствами:

$$[e_1, e_2] = e_3;\ \ [e_3, f_1] = -e_2;\ \ [e_3, f_2] = e_1;\ \ [f_1, f_2] = -f_3;$$

$$[e_1, f_3] = -f_2;\ \ [e_2, f_3] = f_1.$$

Разложим пространства коцепей $C^*(\mathfrak{sl}_3(k),V)$, где V — $\mathfrak{sl}_3(k)$-модуль, на прямую сумму весовых подпространств относительно максимального тора T группы $G=SL_3(k)$:

$$C^*(\mathfrak{sl}_3(k),V)=\bigoplus_{\mu\in X(T)} C^*_\mu(\mathfrak{sl}_3(k),V).$$

Пусть $P(M)$ — множество весов пространства M относительно T. Тогда

$$H^m(\mathfrak{sl}_3(k),V)=\bigoplus_{\mu\in P(H^m(\mathfrak{sl}_3(k),V))} H^m_\mu(\mathfrak{sl}_3(k),V).$$

В сопряженном пространстве $\mathfrak{sl}_3(k)^*$ выберем сопряженный базис $\{e_1^*,e_2^*,e_3^*,h_1^*,h_2^*,f_1^*,f_2^*,f_3^*\}$ и отождествим пространства $C^m(\mathfrak{sl}_3(k),V)$ с пространством $\bigwedge^n\mathfrak{g}^*\otimes V$.

Хорошо известно, что $P(H^m(\mathfrak{sl}_3(k),V))\subseteq pX(T)\cap P(\bigwedge^m\mathfrak{sl}_3(k)^*\otimes V)$. Тогда мы можем работать только с элементами подпространства $\overline{C}^m(\mathfrak{sl}_3(k),V)\subset C^m(\mathfrak{sl}_3(k),V)$, вес которого принадлежит множеству $pX(T)\cap P(\bigwedge^m\mathfrak{sl}_3(k)^*\otimes V)$. Соответствующие подпространства коциклов и когомологии обозначаются через $\overline{Z}^m(\mathfrak{sl}_3(k),V)$ и $\overline{H}^m(\mathfrak{sl}_3(k),V)$. Очевидно, что $H^m(\mathfrak{sl}_3(k),V)=\overline{H}^m(\mathfrak{sl}_3(k),V)$. Следующие формулы хорошо известны:

$$\dim H^m(\mathfrak{sl}_3(k),V)=\dim\overline{Z}^m(\mathfrak{sl}_3(k),V)+dim\,\overline{Z}^{m-1}(\mathfrak{sl}_3(k),V)-\dim\overline{C}^{m-1}(\mathfrak{sl}_3(k),V);\tag{2}$$

$$\dim H^m(\mathfrak{sl}_3(k),V)=\dim H^{dim\,\mathfrak{sl}_3(k)-m}(\mathfrak{sl}_3(k),V^*).\tag{3}$$

Весовые подпространства инвариантны относительно действия кограничного оператора, поэтому формула выполняется и для весовых подпространств:

$$\dim H^m_\mu(\mathfrak{sl}_3(k);V)=\dim Z^m_\mu(\mathfrak{sl}_3(k),V)+\dim Z^{m-1}_\mu(\mathfrak{sl}_3(k),V)-\dim C^{m-1}_\mu(\mathfrak{sl}_3(k),V).\tag{4}$$

Предложение 3. Имеют место следующие утверждения:
(a) если $p>3$, то $H^m(\mathfrak{sl}_3(k),k)=0$, кроме следующих случаев:

$$H^0(\mathfrak{sl}_3(k),k)\cong H^3(\mathfrak{sl}_3(k),k)\cong H^5(\mathfrak{sl}_3(k),k)\cong H^8(\mathfrak{sl}_3(k),k)\cong k;$$

(b) если $p=3$, то $H^m(\mathfrak{sl}_3(k),k)=0$, кроме следующих случаев:

$$H^0(\mathfrak{sl}_3(k),k)\cong H^2(\mathfrak{sl}_3(k),k)\cong H^6(\mathfrak{sl}_3(k),k)\cong H^8(\mathfrak{sl}_3(k),k)\cong k,\ H^3(\mathfrak{sl}_3(k),k)\cong H^5(\mathfrak{sl}_3(k),k)\cong k^7;$$

(c) если $p=2$, то $H^m(\mathfrak{sl}_3(k),k)=0$, кроме следующих случаев:

$$H^0(\mathfrak{sl}_3(k),k)\cong H^8(\mathfrak{sl}_3(k),k)\cong k,\ H^3(\mathfrak{sl}_3(k),k)\cong H^5(\mathfrak{sl}_3(k),k)\cong k^9.$$

Доказательство. (a) Изоморфизм $H^0(\mathfrak{sl}_3(k),k)\cong k$ очевиден. А также хорошо известно, что $H^1(\mathfrak{sl}_3(k),k)=H^2(\mathfrak{sl}_3(k),k)=0$ [8, 9].

Теперь докажем, что $H^3(\mathfrak{sl}_3(k),k)\cong k$. Подпространство $\overline{C}^3(\mathfrak{sl}_3(k),k)$ восьмимерно и порождается векторами

$$h_1^*\wedge e_1^*\wedge f_1^*,\ h_2^*\wedge e_1^*\wedge f_1^*,\ h_1^*\wedge e_2^*\wedge f_2^*,\ h_2^*\wedge e_2^*\wedge f_2^*;$$

$$h_1^*\wedge e_3^*\wedge f_3^*,\ h_2^*\wedge e_3^*\wedge f_3^*,\ e_3^*\wedge f_1^*\wedge f_2^*,\ e_1^*\wedge e_2^*\wedge f_3^*.$$

Предположим, что линейная комбинация этих векторов с коэффициентами b_i, $i=1,\cdots,8$, является 3-коциклом. Тогда из условия коцикличности следует, что

$$\begin{cases} b_1+b_2+b_5+b_7-b_8=0;\\ b_2+b_3-b_7+b_8=0;\\ b_3+b_4+b_6+b_7-b_8=0;\\ 2b_4+2b_7-2b_8=0;\\ 2b_5+2b_6+2b_7-2b_8=0.\end{cases}\tag{5}$$

Пространство решений этой линейной системы относительно b_i, $i = 1, \cdots, 8$, 3-мерно. Следовательно,

$$\dim\ Z^3(\mathfrak{sl}_3(k), k) = 3.$$

Подпространство $\overline{C}^2(\mathfrak{sl}_3(k), k)$ 4-мерно и порождается векторами $h_1^* \wedge h_2^*$, $e_1^* \wedge f_1^*$, $e_2^* \wedge f_2^*$, $e_3^* \wedge f_3^*$. Если $a_1 h_1^* \wedge h_2^* + a_2 e_1^* \wedge f_1^* + a_3 e_2^* \wedge f_2^* + a_4 e_3^* \wedge f_3^* \in \overline{Z}^2(\mathfrak{sl}_3(k), k)$, то, согласно условию коцикличности,

$$\begin{cases} a_1 = 0; \\ a_4 = a_2 + a_3. \end{cases} \tag{6}$$

Следовательно, $\dim\ \overline{Z}^2(\mathfrak{sl}_3(k), V) = 2$.

Таким образом, по формуле (2)

$$\dim\ H^3(\mathfrak{sl}_3(k), k) = \dim\ \overline{Z}^3(\mathfrak{sl}_3(k), k) + \dim\ \overline{Z}^2(\mathfrak{sl}_3(k), k) - \dim\ \overline{C}^2(\mathfrak{sl}_3(k), k) = 3 + 2 - 4 = 1.$$

Выполнив аналогичное вычисление, легко показать, что $H^4(\mathfrak{sl}_3(k), k) = 0$. Далее, используя формулу (3), получаем

$$\dim\ H^0(\mathfrak{sl}_3(k), k) = \dim\ H^5(\mathfrak{sl}_3(k), k) = 1 \text{ и } \dim\ H^7(\mathfrak{sl}_3(k), k) = \dim\ H^6(\mathfrak{sl}_3(k), k) = 0.$$

Наконец, заметим, что $H^m(\mathfrak{sl}_3(k), k) = 0$, когда $m > 8 = \dim\ \mathfrak{sl}_3(k)$. Таким образом, доказано утверждение (a) предложения 3.

(b) Согласно предложению 6.2 работы [8] $H^1(\mathfrak{sl}(3, k), k) = 0$ и предложению 4.1 работы [9]

$$H^2(\mathfrak{sl}(3, k), k) \cong k.$$

Докажем, что $\dim\ H^3(\mathfrak{sl}_3(k), k) = 7$. Выполнив соответствующие вычисления, получим

$$P(\overline{C}^3(\mathfrak{sl}_3(k), k)) = \{0,\ \pm 3\lambda_1,\ \pm 3(-\lambda_1 + \lambda_2),\ \pm 3\lambda_2\}.$$

Доминантными являются 0, $3\lambda_1$, $3\lambda_2$. Вычислим размерности соответствующих весовых подпространств 3-когомологии.

Над полем характеристики $p = 3$ размерности пространств решений систем (5) и (6) совпадают с соответствующими размерностями случая $p > 3$. Поэтому $\overline{H}_0^3(\mathfrak{sl}_3(k), k) = 1$.

Весовые подпространства $\overline{C}_{3\lambda_1}^3(\mathfrak{sl}_3(k), k)$, $\overline{C}_{3\lambda_2}^3(\mathfrak{sl}_3(k), k)$ двумерны и порождаются соответственно с 3-коцепями: $h_1^* \wedge f_1^* \wedge f_3^*$, $h_2^* \wedge f_1^* \wedge f_3^*$, и $h_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^*$, $h_2^* \wedge f_2^* \wedge f_2^*$. Выполнив соответствующие вычисления, получим $\dim\ \overline{Z}_{3\lambda_1}^3(\mathfrak{sl}_3(k), k) = \dim\ \overline{Z}_{3\lambda_2}^3(\mathfrak{sl}_3(k), k) = 1$.

Так как $\dim k = 1$, $\dim H^0(\lambda_1) = \dim H^0(\lambda_1) = 3$, то $\dim H^3(\mathfrak{sl}_3(k), k) = 1 + 3 + 3 = 7$.

Наконец, рассуждая как в предыдущем случае, убедимся в справедливости остальных утверждений случая (b).

(c) Доказательство всех утверждений аналогично случаю (a), кроме изоморфизма $H^3(\mathfrak{sl}_3(k), k) \cong k^9$. В этом случае $P(\overline{C}^3(\mathfrak{sl}_3(k), k)) = \{0, \pm 2(\lambda_1 + \lambda_2), \pm 2(2\lambda_1 - \lambda_2), \pm 2(-\lambda_1 + 2\lambda_2)\}$. Доминантным является 0, $2(\lambda_1 + \lambda_2)$. Вычислим размерности соответствующих весовых подпространств 3-когомологии.

Как и в предыдущем случае, над полем характеристики $p = 2$ размерность пространства решений системы (6) совпадает с соответствующими размерностями случая $p \geq 3$. В характеристике $p = 2$ пространство решений системы (5) равно 5. Поэтому согласно (2) $\dim\ \overline{H}_0^3(\mathfrak{sl}_3(k), k) = 5 + 2 - 4 = 3$.

Все остальные весовые подпространства $\overline{C}_\mu^3(\mathfrak{sl}_3(k), k)$, $\mu \in P(\overline{C}^3(\mathfrak{sl}_3(k), k)) \backslash \{0\}$, одномерны, и соответствующие весовые подпространства $\overline{C}_\mu^2(\mathfrak{sl}_3(k), k)$ – нулевые подпространства в $C^2(\mathfrak{sl}_3(k), k)$. Кроме того, согласно условию коцикличности, любой ненулевой элемент каждого из этих весовых подпространств $\overline{C}_\mu^3(\mathfrak{sl}_3(k), V)$ является 3-коциклом. Следовательно, $\dim\ \overline{C}_\mu^3(\mathfrak{sl}_3(k), k) = 1$, если $\mu \in P(\overline{C}^3(\mathfrak{sl}_3(k), k)) \setminus \{0\}$. Тогда $\dim H^3(\mathfrak{sl}_3(k), k) = 3 + 6 = 9$.

Доказательство предложения 3 завершено.

Теперь рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{gl}_3(k)$.

Предложение 4. Пусть $\mathfrak{gl}_3(k)$ *— общая линейная алгебра Ли степени* 3 *над алгебраически замкнутым полем* k *характеристики* $p > 3$. *Тогда* $H^m(\mathfrak{gl}_3(k), k) \cong k$, *если* $m \leq 9$ *и* $m \neq 2, 7$. *В остальных случаях когомологии* $H^m(\mathfrak{gl}_3(k), k)$ *тривиальны.*

Доказательство. Согласно предложению 2 вычисление когомологии $H^m(\mathfrak{gl}_3(k),k)$ приводится к вычислениям когомологии $H^m(\mathfrak{sl}_n(k),k)$ и $H^{m-1}(\mathfrak{sl}_n(k),k)$. Они вычислены в предложении 3. Согласно предложению 3, $H^m(\mathfrak{sl}_n(k),k)\cong k$, если $m=0,3,5,8$. В остальных случаях когомологии $H^m(\mathfrak{sl}_n(k),k)$ тривиальны. Тогда утверждение предложения 4 следует из (1).

2.2 Доказательство теоремы 1. Согласно теореме 0.2 работы [5], для любого $m\in\mathbb{Z}_0$, $H^m(W_3(\mathbf{1}), O_3(\mathbf{1}))\cong\bigoplus_{i=0}^m(\bigwedge^i(k^3)\bigotimes_k H^{m-i}(\mathfrak{gl}_3(k),k))$. Используя предложения 2 для когомологии алгебры Ли $\mathfrak{gl}_3(k)$, получим

$$H^m(W_3(\mathbf{1}),O_3(\mathbf{1}))\cong\bigoplus_{i=0}^m(\bigwedge^i(k^3)\bigotimes_k(H^{m-i}(\mathfrak{sl}_3(k),k)\bigoplus H^{m-i-1}(\mathfrak{sl}_3(k),k))).$$

Тогда утверждения теоремы 1 следуют из последней формулы и из утверждения (a) предложения 3. Доказательство теоремы 1 завершено.

Замечание. Согласно предложению 2, предыдущая формула верна и в общем случае

$$H^m(W_n(\mathbf{1}),O_n(\mathbf{1}))\cong\bigoplus_{i=0}^m(\bigwedge^i(k^3)\bigotimes_k(H^{m-i}(\mathfrak{sl}_n(k),k)\bigoplus H^{m-i-1}(\mathfrak{sl}_n(k),k))).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 0828/ГФ4 Министерства образования и науки Республики Казахстан по теме «Алгебры, близкие к Лиевым: когомологии, тождества и деформации».

Список литературы

1 Chiu S. Cohomology of graded Lie algebras of Cartan type of characteristic p / S.Chiu, G.Yu.Shen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1987. — Vol. 51. — P. 139–156.

2 Chiu S. Cohomology of graded Lie algebras of Cartan type $S(n,\mathbf{m})$ / S.Chiu // Chinese Ann. Math. Ser. B**10**. — 1989. — No 1. — P. 105–114.

3 Chiu S. Central extensions and $H^1(L,L^*)$ of the graded Lie algebras of Cartan type / S.Chiu // J. of Algebra. – 1992. – Vol. 149. – P. 46–67.

4 Chiu S. Derivations of the graded Lie algebras of Cartan type / S.Chiu // Chin. Ann. of Math. Ser. 13**B** — 1992. — No. 2. — P. 196–204.

5 Shi Bin. On cohomology of a class of nonclassical restricted simple Lie algebras / Shi Bin, Yu-Feng Yao // J. of Algebra and Its Appl. — Vol. 16, No. 5(2017), 1750157 (13 p.).

6 Джумадильдаев А.С. О когомологии модулярных алгебр Ли / А.С.Джумадильдаев // Математический сборник. – 1982. — Т. 119(161). — No. 9. — С. 132–149.

7 Джумадильдаев А.С. Нерасщепляемые расширения общей алгебры Ли картановского типа $W_n(\overline{m})$ / А.С.Джумадильдаев, У.У.Умирбаев // Математический сборник. — 1995. — Т. 186. — № 4. — С. 61–88.

8 Jantzen J.C. First cohomology groups for classical Lie algebras / J.C.Jantzen // Progress in Math. — 1991. — Vol. 95. — P. 291–300.

9 Van der Kallen W.L.J. Infinitesimally central extensions of Chevalley groups. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1973.

Ш.Ш. Ыбыраев

Джекобсон-Витт алгебрасының когомологиясы туралы

Классикалық модуляр Ли алгебраларының когомологияларын сәйкесті алгебралық группалардың көріністер териясы әдістерімен зерттеу көптеген қызықты нәтижелер алуға мүмкіндік береді. Соңғы кездері осындай беталысты, нәтижелері қайсыбір редуктивті алгебралық группалардың когомологияларын зерттеуге әкелетін, картан түріндегі жай Ли алгебраларының когомологияларын зерттеулерде де байқауға болады. Мақалада $\mathfrak{sl}_3(k)$ классикалық Ли алгебрасының когомологияларын есептеу арқылы сипаттамасы $p > 3$ алгебралық тұйық k өрісіндегі $W_3(1)$ Джекобсон-Витт алгебрасының коэффициенттері, $O_3(1)$ бөліктенген дәрежелі алгебрасына тиісті болатын когомологиялары толық сипатталды.

Кілт создер: Джекобсон-Витт алгебрасы, Ли алгебрасы, картан түріндегі Ли алгебрасы, когомология, коциклділік шарттары.

Sh.Sh. Ibraev

On the cohomology of the Jacobson–Witt algebra

The investigating cohomology of the classical modular Lie algebras by using the methods of representation theory of algebraic groups allows to get a lot of interesting results. Now this trend observed in the studying cohomology of the Lie algebras of Cartan type in which results lead to study the cohomology of certain reductive groups. In this paper we give a complete description the cohomology of the Jacobson–Witt algebra $W_3(1)$ over an algebraical closed field k of characteristic $p > 3$ with coefficients in the divided power algebra $O_3(1)$ by calculating the cohomology of the classical Lie algebra $\mathfrak{sl}_3(k)$.

Keywords: Jacobson-Witt algebra, Lie algebra, Lie algebra of Cartan type, cohomology, cocyclic conditions.

References

1 Chiu, S. & Shen, G.Yu. (1987). Cohomology of graded Lie algebras of Cartan type of characteristic *p. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg., Vol. 51,* 139–156.

2 Chiu, S. (1989). Cohomology of graded Lie algebras of Cartan type $S(n, m)$ *Chinese Ann. Math. Ser. B10, No. 1,* 105–114.

3 Chiu, S. (1992). Central extensions and $H^1(L, L^*)$ of the graded Lie algebras of Cartan type *J. Algebra, Vol. 149,* 46–67.

4 Chiu, S. (1992). Derivations of the graded Lie algebras of Cartan type *Chin. Ann. of Math. Ser. 13B, No. 2,* 196–204.

5 Shi Bin & Yu-Feng Yao. (2017). On cohomology of a class of nonclassical restricted simple Lie algebras *J. of Algebra and Its Appl., Vol. 16,* 5, 1750157 (13 p.).

6 Dzhumadil'daev, A.S. (1982). O kohomolohii moduliarnykh alhebr Li [On the cohomology of modular Lie algebras]. *Matematicheskii sbornik – Mathematical collection, 119(161),* 9, 132–149 [in Russian].

7 Dzhumadil'daev, A.S. & Umirbaev, U.U. (1995). Nerasshchepliaemye rasshireniia obshchei alhebry Li kartanovskoho tipa $W_n(\overline{m})$ [Non-splittable extensions of a general Lie algebras of Cartan type $W_n(\overline{m})$]. *Matematicheskii sbornik – Mathematical collection, 186,* 4, 61–88 [in Russian].

8 Jantzen, J.C. (1991). First cohomology groups for classical Lie algebras *Progress in Mathematics, Vol. 95,* 291–300.

9 Van der Kallen, W.L.J. (1973). *Infinitesimally central extensions of Chevalley groups.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.