УДК 517.95

А.Х. Аттаев[1], С.А. Искаков[2], М.И. Рамазанов[2]

[1]*Институт прикладной математики и автоматизации, Нальчик, Россия;*
[2]*Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова, Казахстан*
(E-mail: isagyndyk@mail.ru)

Граничная задача для дробно-нагруженного уравнения Лаврентьева-Бицадзе

В статье исследована граничная задача для дробно-нагруженного уравнения Лаврентьева-Бицадзе в прямоугольной области, с нелокальными граничными условиями. Подобные граничные задачи изучались в работах [1-3]. Задача, исследуемая в этой работе, отличается от рассмотренных ранее тем, что, во-первых, область в гиперболической части является не характеристической, а во-вторых, в уравнении имеются дробно-нагруженные слагаемые, что позволяет выявить некоторые особенности рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: граничная задача, нагруженные уравнения, дробная производная, метод разделения переменных.

1 Постановка задачи

Пусть $Q_1 = \{x, t \big| 0 < x < 2\pi,\ 0 < t < T\}$, $Q_2 = \{x, t \big| 0 < x < 2\pi,\ -T < t < 0\}$, $Q = Q_1 \cup Q_2$. В области Q рассматривается следующая граничная задача:

$$\begin{cases} -D_t^2 u^{(1)}(x,t) - D_x^2 u^{(1)}(x,t) + \lambda_1 D_t^{\frac{1}{2}} u^{(1)}(x,t_1) = f^{(1)}(x,t), \quad (x,t) \in Q_1; \\ D_t^2 u^{(2)}(x,t) - D_x^2 u^{(2)}(x,t) + \lambda_2 u^{(2)}(x,t_2) = f^{(2)}(x,t), \quad (x,t) \in Q_2. \end{cases} \tag{1}$$

$$\frac{\partial^p u^j(0,t)}{\partial x^p} = \frac{\partial^p u^j(2\pi,t)}{\partial x^p};$$

$$\frac{\partial^p u^{(1)}(x,T)}{\partial t^p} = \mu_p \frac{\partial^p u^{(2)}(x,-T)}{\partial t^p}, p = 0, 1.$$

То есть, при $(x,t) \in Q_1$ будем иметь

$$-\frac{\partial^2 u^{(1)}(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^{(1)}(x,t)}{\partial x^2} + \alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u^{(1)}(x,t_1) = f^{(1)}(x,t); \tag{2}$$

$$\begin{cases} u^{(1)}(0,t) = u^{(1)}(2\pi,t) \\ \frac{\partial u^{(1)}(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u^{(1)}(2\pi,t)}{\partial x} \end{cases}; \tag{3}$$

и при $(x,t) \in Q_2$

$$\frac{\partial^2 u^{(2)}(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^{(2)}(x,t)}{\partial x^2} + \alpha_2 u^{(2)}(x,t_2) = f^{(2)}(x,t), \tag{4}$$

$$\begin{cases} u^{(2)}(0,t) = u^{(2)}(2\pi,t) \\ \frac{\partial u^{(2)}(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u^{(2)}(2\pi,t)}{\partial x} \end{cases}; \tag{5}$$

также предполагаем выполнение условий

$$\begin{cases} u^{(1)}(x,T) = \mu_0 u^{(2)}(x,-T); \\ \frac{\partial u^{(1)}(x,T)}{\partial t} = \mu_1 \frac{\partial u^{(2)}(x,-T)}{\partial t}, \end{cases} \tag{6}$$

где $D_t^{\frac{1}{2}} u^{(1)}(x,t_1)$ — дробная производная в смысле Римана-Луивилля порядка 1/2 на линии $t = t_1$.

Далее положим, что:

$$\begin{cases} T < +\infty, \quad f^{(1)} \in L_1(Q_1), \quad f^{(2)} \in L_2(Q_2), \quad \mu_0, \mu_1 \in C; \\ \alpha_1,\, \alpha_2 \in C, \quad t_1 \in (0,T), \quad t_2 \in (-T,0) \end{cases} \tag{7}$$

— заданные функции и числа.

Заданное уравнение (1) является уравнением смешанного (эллиптико-гиперболического) типа, а из-за наличия слагаемого $\alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u^{(1)}(x,t_1)$ его называют дробно-нагруженным. Основная цель данного исследования – изучить вопросы L_2-сильной разрешимости граничных задач (2)–(6) при условиях (7).

2 Критерий однозначно сильной разрешимости

Для решения задачи (1) введем следующее обозначение:

$$s \in S = \{0, \pm 1,\ \pm 2,\ ...\};$$

$$\Delta_s = \begin{pmatrix} \frac{\sin sT + \mu_1 shsT}{s} & \cos sT - \mu_0 chsT & \alpha_2 \cdot \frac{\cos sT - 1}{s^2} & \alpha_1 \cdot \frac{1 - chsT}{s^2} \\ \cos sT - \mu_1 chsT & s(-\sin sT + \mu_0 shsT) & -\alpha_2 \frac{\sin sT}{s} & \alpha_1 \cdot \frac{shsT}{s} \\ \alpha_2 \frac{\sin s(t_2+T)}{s} & \alpha_2 \cos s(t_2+T) & -1-\alpha_2 \frac{1-\cos s(t_2+T)}{s^2} & 0 \\ A_{41} & A_{42} & 0 & A_{44} \end{pmatrix},$$

где

$$A_{41} = \alpha_1 \cdot \mu_1 \left(\frac{1}{s\sqrt{\pi t_1}} \cdot shsT - \frac{1}{2\sqrt{s}} \cdot e^{s(t_1 - T)} \cdot erf\sqrt{st_1} - \frac{1}{\sqrt{\pi s}} \cdot e^{sT} \cdot daw\sqrt{st_1} \right);$$

$$A_{42} = \alpha_1 \cdot \mu_0 \left(\frac{1}{\sqrt{\pi t_1}} \cdot chsT - \frac{\sqrt{s}}{2} \cdot e^{s(t_1 - T)} \cdot erf\sqrt{st_1} + \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{sT} \cdot daw\sqrt{st_1} \right);$$

$$A_{44} = 1 + \frac{\alpha_1}{s^2} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi t_1}} + \frac{1}{\sqrt{\pi t_1}} \cdot chsT - -\frac{\sqrt{s}}{2} \cdot e^{s(t_1 - T)} \cdot erf\sqrt{st_1} + \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{sT} daw\sqrt{st_1} \right].$$

Здесь

$$erf\ x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp\left(-t^2\right) dt, \quad daw\ x = \exp(-x^2) \int_0^x \exp(t^2) dt.$$

Теорема 1. Для любых f^j, μ_p, α, t_k, T, удовлетворяющих требованиям (7), граничные задачи (2)–(6) имеют единственное L_2-сильное решение тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$|\Delta_s| \neq 0; \quad s \in S. \tag{8}$$

Условие (8) в терминах данных (7) дает полное описание корректных граничных задач вида (2)–(6).

Следствие. Пусть при условиях теоремы 1 в уравнении (1) отсутствуют нагруженные слагаемые, т.е. $\alpha_k = 0$, $k = 1, 2$. Тогда для того, чтобы граничные задачи (2)–(6) имели единственное L_2-сильное решение, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\begin{vmatrix} \frac{\sin sT + \mu_1 shsT}{s} & \cos sT - \mu_0 chsT \\ \cos sT - \mu_1 chsT & s(-\sin sT + \mu_0 shsT) \end{vmatrix} \neq 0; \quad s \in S. \tag{9}$$

Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы будем проводить методом разделения переменных, т.е. ищем решение задач (2)–(6) в следующем виде:

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x,t) &= \sum_{s \in S} u_s^{(1)}(t) \cdot \exp\{is \cdot x\}; \\ u^{(2)}(x,t) &= \sum_{s \in S} u_s^{(2)}(t) \cdot \exp\{is \cdot x\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Учтем соответствующие разложения для правых частей уравнений (2), (4)

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x,t) &= \sum_{s \in S} f_s^{(1)}(t) \exp\{is \cdot x\}; \\ f^{(2)}(x,t) &= \sum_{s \in S} f_s^{(2)}(t) \exp\{is \cdot x\}. \end{aligned} \tag{11}$$

Граничные задачи (2)–(6) можно свести к изучению краевых задач для счетной системы нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-\frac{d^2u_s^{(1)}(t)}{dt^2}+s^2u_s^{(1)}(t)+\alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}}u_s^{(1)}(t_1)=f_s^{(1)}(t) \text{ при } t\in(0;T); \tag{12}$$

$$\frac{d^2u_s^{(2)}(t)}{dt^2}+s^2u_s^{(2)}(t)+\alpha_2 u_s^{(2)}(t_2)=f_s^{(2)}(t) \text{ при } t\in(-T;0); \tag{13}$$

$$\begin{cases} u_s^{(1)}(T)=\mu_0 u_s^{(2)}(-T) \\ \frac{du_s^{(1)}(T)}{dt}=\mu_1\frac{du_s^{(2)}(-T)}{dt}. \end{cases} \tag{14}$$

Введем системы чисел $\{\nu_s, s\in S\}$, $\{\varphi_s, s\in S\}$, пока временно неизвестные, с помощью которых вместо задач (12)–(14) будем рассматривать следующие граничные задачи:

$$\begin{cases} -\frac{d^2u_s^{(1)}(t)}{dt^2}+s^2u_s^{(1)}(t)+\alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}}u_s^{(1)}(t_1)=f_s^{(1)}(t), \quad t\in(0;T), \\ u_s^{(1)}(T)=\mu_0\nu_s \quad \frac{du_s^{(1)}(T)}{dt}=\mu_1\varphi_s, \quad s\in S. \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2u_s^{(2)}(t)}{dt^2}+s^2u_s^{(2)}(t)+\alpha_2 u_s^{(2)}(t_2)=f_s^{(2)}(t), \quad t\in(-T;0), \\ u_s^{(2)}(-T)=\nu_s \quad \frac{du_s^{(2)}(-T)}{dt}=\varphi_s, \quad s\in S. \end{cases} \tag{16}$$

Найдем решение уравнения (15). Перенесем нагруженное слагаемое в правую сторону, обозначим $f_s^{(1)}(t)-\alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}}u_s^{(1)}(t_1)=F_s^{(1)}(t)$ и будем считать $F_s^{(1)}(t)$ временно известной, тогда уравнение (15) будет иметь следующий вид:

$$-\frac{d^2u_s^{(1)}(t)}{dt^2}+s^2u_s^{(1)}(t)=F_s^{(1)}(t). \tag{17}$$

Решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$u_{\text{о.о.}}=C_1e^{-st}+C_2e^{st}=C_1ch\,st+C_2sh\,st.$$

Для получения частного решения неоднородного уравнения воспользуемся методом Коши:

$$K(t,\tau)=C_1(\tau)chst+C_2(\tau)shst; \tag{18}$$

$$\begin{cases} K(t,\tau)\big|_{t=\tau}=C_1(\tau)ch s\tau+C_2(\tau)sh s\tau=0; \\ K_t'(t,\tau)\big|_{t=\tau}=C_1(\tau)sh s\tau+C_2(\tau)ch s\tau=\frac{1}{s}. \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} chs\tau & shs\tau \\ shs\tau & chs\tau \end{vmatrix}=1,\ \ \Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & shs\tau \\ \frac{1}{s} & chs\tau \end{vmatrix}=-\frac{shs\tau}{s},\ \ \Delta_2=\begin{vmatrix} chs\tau & 0 \\ shs\tau & \frac{1}{s} \end{vmatrix}=\frac{chs\tau}{s}.$$

Найдем отсюда

$$C_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-\frac{shs\tau}{s},\ \ C_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{chs\tau}{s}.$$

Подставим найденные C_1, C_2 в соотношение (18), получим

$$K(t,\tau)=-\frac{1}{s}\left[shst\cdot chs\tau-chst\cdot shs\tau\right]=\frac{1}{s}shs(t-\tau).$$

Таким образом, частное решение будет иметь вид

$$u_s^{(1)}\text{ч.р.}(t)=\int\limits_t^T\frac{sh(t-\tau)}{s}\cdot F_s^{(1)}(\tau)d\tau.$$

Теперь запишем общее решение уравнения (17)

$$u_{\text{о.р.}}^{(1)}=C_1ch\,st+C_2sh\,st+\int\limits_t^T\frac{sh\ s(t-\tau)}{s}\cdot F_s^{(1)}(\tau)d\tau=$$

$$=C_1ch\,st+C_2sh\,st+\int\limits_t^T\frac{sh\,s(t-\tau)}{s}\cdot f_s^{(1)}(\tau)d\tau-\int\limits_t^T\frac{sh\,s(t-\tau)}{s}\alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}}u_s^{(1)}(t_1)d\tau. \tag{19}$$

Проделаем тоже самое с уравнением (16), получим решение однородного уравнения $u_{\text{о.о.}} = \tilde{C}_1 \cos\, st + \tilde{C}_2 \sin\, st$, общее решение которого имеет вид

$$u^{(2)}_{\text{о.р.}} = \tilde{C}_1 \cos\, st + \tilde{C}_2 \sin\, st + \int\limits_{-T}^{t} \frac{\sin s(t-\tau)}{s} \cdot F^{(2)}_s(\tau) d\tau = \tilde{C}_1 \cos\, st +$$

$$+ \tilde{C}_2 \sin\, st + \int\limits_{-T}^{t} \frac{\sin s(t-\tau)}{s} \cdot f^{(2)}_s(\tau) d\tau - \int\limits_{-T}^{t} \frac{\sin s(t-\tau)}{s} \alpha_2 u^{(2)}_s(t_2) d\tau. \tag{20}$$

Теперь найдем C_1, C_2 и $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ из условий (15)–(16) $u^{(1)}_s(T) = \mu_0 \nu_s$, $\frac{du^{(1)}_s(T)}{dt} = \mu_1 \varphi_s$, $s \in S$ и $u^{(2)}_s(-T) = \nu_s$, $\frac{du^{(2)}_s(-T)}{dt} = \varphi_s$, $s \in S$.

Тогда

$$u^{(1)}_s(T) = C_1 ch\, sT + C_2 sh\, sT = \mu_0 \nu_s,$$

$$\frac{du^{(1)}_s(T)}{dt} = sC_1 shsT + sC_2 chsT = \mu_1 \varphi_s.$$

отсюда находим C_1, C_2

$$C_1 = \mu_0 \nu_s chsT - \frac{\mu_1 \varphi_s}{s} \cdot shsT,$$

$$C_2 = \frac{\mu_1 \varphi_s}{s} \cdot chsT - \mu_0 \nu_s \cdot shsT$$

и из соотношений

$$u^{(2)}_s(-T) = \tilde{C}_1 \cos s(-T) + \tilde{C}_2 \sin s(-T) = \nu_s,$$

$$\frac{du^{(2)}_s(-T)}{dt} = -s\tilde{C}_1 \sin s(-T) + s\tilde{C}_2 \cos s(-T) = \varphi_s$$

находим $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$

$$\tilde{C}_1 = \nu_s \cos s(-T) - \frac{\varphi_s}{s} \sin s(-T),$$

$$\tilde{C}_2 = \frac{\varphi_s}{s} \cos s(-T) + \nu_s \sin s(-T).$$

Найденные C_1, C_2 и $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ подставляем в (19) и (20) соответственно, получаем следующие представления:

$$u^{(1)}_s(t) = \mu_0 \nu_s ch\, s(t-T) + \frac{\mu_1 \varphi_s}{s} sh\, s(t-T) + \int\limits_{t}^{T} \frac{sh\ s(t-\tau)}{s} \cdot F^{(1)}_s(\tau) d\tau =$$

$$= \mu_0 \nu_s ch\, s(t-T) + \frac{\mu_1 \varphi_s}{s} sh\, s(t-T) + \int\limits_{t}^{T} \frac{sh\, s(t-\tau)}{s} \cdot f^{(1)}_s(\tau) d\tau -$$

$$-\alpha_1 D^{\frac{1}{2}}_t u^{(1)}_s(t_1) \frac{1 - chs\,(t-T)}{s^2} \tag{21}$$

и

$$u^{(2)}_s(t) = \nu_s \cos s(t+T) + \frac{\varphi_s}{s} \sin s(t+T) + \int\limits_{-T}^{t} \frac{\sin s(t-\tau)}{s} \cdot f^{(2)}_s(\tau) d\tau -$$

$$- \int\limits_{-T}^{t} \frac{\sin s(t-\tau)}{s} \alpha_2 u^{(2)}_s(t_2) d\tau = \nu_s \cos s(t+T) + \frac{\varphi_s}{s} \sin s(t+T) +$$

$$+ \int\limits_{-T}^{t} \frac{\sin s(t-\tau)}{s} \cdot f^{(2)}_s(\tau) d\tau - \alpha_2 u^{(2)}_s(t_2) \cdot \frac{1 - \cos s(t+T)}{s^2}. \tag{22}$$

В этих представлениях неизвестными являются

$$\nu_s,\ \ \varphi_s,\ \ \alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1),\ \ \alpha_2 u_s^{(2)}(t_2).$$

Для их нахождения используем представления (21) и (22). Вначале найдем представления для производных решений задач (15) и (16):

$$\frac{du_s^{(1)}(t)}{dt} = \int\limits_t^T f_s^{(1)}(\tau)\cdot chs\,(t-\tau)\,d\tau + \mu_1\varphi_s\cdot chs\,(t-T) +$$

$$+\mu_0\nu_s\cdot s\cdot shs\,(t-T) + \alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1)\frac{shs\,(t-T)}{s}. \tag{23}$$

$$\frac{du_s^{(2)}(t)}{dt} = \int\limits_{-T}^t f_s^{(2)}(\tau)\cdot \cos s\,(t-\tau)\,d\tau + \varphi_s\cdot \cos s\,(t+T) -$$

$$-\nu_s\cdot s\cdot \sin s\,(t+T) - \alpha_1 u_s^{(2)}(t_2)\frac{\sin s\,(t+T)}{s}. \tag{24}$$

Далее, используя условия сопряжения

$$\begin{cases} u_s^{(1)}(0+) = u_s^{(2)}(0-) \\ \frac{du_s^{(1)}(0+)}{dt} = \frac{du_s^{(2)}(0-)}{dt} \end{cases},$$

на линии $t=0$ в области Q получим

$$\mu_0\nu_s ch\,s\,(-T) + \frac{\mu_1\varphi_s}{s} sh\,s\,(-T) + \int\limits_0^T \frac{sh\,s(-\tau)}{s}\cdot f_s^{(1)}(\tau)d\tau - \alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1)\frac{1-chs\,(-T)}{s^2} =$$

$$= \nu_s \cos sT + \frac{\varphi_s}{s}\sin sT + \int\limits_{-T}^0 \frac{\sin s(-\tau)}{s}\cdot f_s^{(2)}(\tau)d\tau - \alpha_2 u_s^{(2)}(t_2)\cdot\frac{1-\cos sT}{s^2}$$

и

$$\int\limits_0^T f_s^{(1)}(\tau)\cdot chs\,(-\tau)\,d\tau + \mu_1\varphi_s\cdot chs\,(-T) + \mu_0\nu_s\cdot s\cdot shs\,(-T) + \alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1)\frac{shs\,(-T)}{s} =$$

$$= \int\limits_{-T}^0 f_s^{(2)}(\tau)\cdot \cos s\,(-\tau)\,d\tau + \varphi_s\cdot\cos sT - \nu_s\cdot s\cdot \sin sT - \alpha_1 u_s^{(2)}(t_2)\frac{\sin sT}{s}.$$

Отсюда имеем

$$\mu_0\nu_s ch\,sT - \frac{\mu_1\varphi_s}{s} sh\ sT - \int\limits_0^T \frac{sh\,s\tau}{s}\cdot f_s^{(1)}(\tau)d\tau - \alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1)\frac{1-chsT}{s^2} =$$

$$= \nu_s \cos sT + \frac{\varphi_s}{s}\sin sT - \int\limits_{-T}^0 \frac{\sin s\tau}{s}\cdot f_s^{(2)}(\tau)d\tau - \alpha_2 u_s^{(2)}(t_2)\cdot\frac{1-\cos sT}{s^2}$$

и

$$\int\limits_0^T f_s^{(1)}(\tau)\cdot chs\tau d\tau + \mu_1\varphi_s\cdot chsT - \mu_0\nu_s\cdot s\cdot shsT - \alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1)\frac{shsT}{s} =$$

$$= \int\limits_{-T}^0 f_s^{(2)}(\tau)\cdot \cos s\tau d\tau + \varphi_s\cdot\cos sT - \nu_s\cdot s\cdot \sin sT - \alpha_1 u_s^{(2)}(t_2)\frac{\sin sT}{s}.$$

В итоге получим

$$\left(\frac{\sin sT}{s}+\mu_1\frac{shsT}{s}\right)\cdot\varphi_s+(\cos sT-\mu_0 chsT)\cdot\nu_s-\frac{1-\cos sT}{s^2}\cdot\alpha_2 u_s^{(2)}(t_2)+$$

$$+\frac{1-chsT}{s^2}\cdot\alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}}u_s^{(1)}(t_1)=F_s^1;$$

$$(\cos sT-\mu_1 chsT)\cdot\varphi_s+s\left(-\sin sT+\mu_0 shsT\right)\cdot\nu_s-\frac{\sin sT}{s}\cdot\alpha_2 u_s^{(2)}(t_2)+$$

$$+\frac{shsT}{s}\cdot\alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}}u_s^{(1)}(t_1)=F_s^2, \tag{25}$$

где

$$F_s^1=\int_{-T}^{0}\frac{\sin s\tau}{s}\cdot f_s^{(2)}(\tau)d\tau-\int_0^T\frac{sh\ s\tau}{s}\cdot f_s^{(1)}(\tau)d\tau;$$

$$F_s^2=-\int_{-T}^{0}\cos s\tau\cdot f_s^{(2)}(\tau)d\tau+\int_0^T chs\tau\cdot f_s^{(1)}(\tau)d\tau. \tag{26}$$

Теперь проделываем следующее: от обеих частей равенства (21) берем дробные производные порядка $1/2$ и в полученном равенстве полагаем $t=t_1$. Тогда имеем

1. $D_t^{\frac{1}{2}}\left[\frac{shs\,(t-T)}{s}\right]_{t=t_1}=-\frac{1}{s\sqrt{\pi t_1}}\cdot shsT+\frac{1}{2\sqrt{s}}\cdot e^{s(t_1-T)}\cdot erf\sqrt{st_1}+\frac{1}{\sqrt{\pi s}}\cdot e^{sT}\cdot daw\sqrt{st_1}.$

2. $D_t^{\frac{1}{2}}\left[\mathrm{ch}\ s\,(t-T)\right]_{t=t_1}=-\frac{1}{\sqrt{\pi t_1}}\cdot chsT+\frac{\sqrt{s}}{2}\cdot e^{s(t_1-T)}\cdot erf\sqrt{st_1}-\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{sT}\cdot daw\sqrt{st_1}.$

3. $\left[1+\alpha_1\cdot D_t^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1-ch\,s\,(t-T)}{s^2}\right\}\right]_{t=t_1}=1+\frac{\alpha_1}{s^2}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t_1}}+\frac{1}{\sqrt{\pi t_1}}\cdot chsT-\frac{\sqrt{s}}{2}\cdot e^{s(t_1-T)}\cdot erf\sqrt{st_1}+\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}}\cdot\right.$ $\left.\cdot e^{sT}\cdot daw\sqrt{st_1}\right].$

4. $$D_t^{\frac{1}{2}}\left\{\int\limits_t^T\frac{shs(t-\tau)}{s}\cdot f_s^{(1)}d\tau\right\}_{t=t_1}=\frac{1}{s\sqrt{\pi}}\cdot\frac{d}{dt}\left\{\int\limits_0^t\frac{1}{\sqrt{t-\xi}}\left[\int\limits_\xi^T sh\,s(\xi-\tau)\cdot f_s^{(1)}(\tau)d\tau\right]d\xi\right\}_{t=t_1}=$$

$$=\frac{1}{s\sqrt{\pi}}\cdot\frac{d}{dt}\left\{\int\limits_0^t f_s^{(1)}(\tau)d\tau\int\limits_0^\tau\frac{sh\ s(\xi-\tau)}{\sqrt{t-\xi}}d\xi+\int\limits_t^T f_s^{(1)}(\tau)d\tau\int\limits_0^t\frac{sh\,s(\xi-\tau)}{\sqrt{t-\xi}}d\xi\right\}_{t=t_1}=\frac{1}{s\sqrt{\pi}}\left\{f_s^{(1)}(t_1)\ldots\right.$$

$$\ldots\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}\cdot erf\sqrt{st_1}+\frac{2}{\sqrt{s}}\cdot sh\,st_1\cdot daw\sqrt{st_1}\right)+\int\limits_0^{t_1}f_s^{(1)}(\tau)\left[\sqrt{s}\cdot e^{-s\tau}\cdot daw\sqrt{st_1}-\sqrt{s}\cdot daw\sqrt{s(t_1-\tau)}+\right.$$

$$+\frac{\sqrt{\pi s}}{2}\cdot e^{s(t_1-\tau)}\left(erf\sqrt{st_1}-erf\sqrt{s(t_1-\tau)}\right)d\tau+\int\limits_{t_1}^T f_s^{(1)}(\tau)\left[\frac{\sqrt{s}\cdot\sqrt{\pi}}{2}e^{s(t_1-\tau)}\cdot erf\sqrt{st_1}-\frac{1}{\sqrt{t_1}}ch\ s\tau+\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{s}\cdot e^{st_1}\cdot daw\sqrt{st_1}\right]d\tau\right\}.$$

В итоге получаем

$$\alpha_1\cdot\mu_1\left(\frac{1}{s\sqrt{\pi t_1}}\cdot shsT-\frac{1}{2\sqrt{s}}\cdot e^{s(t_1-T)}\cdot erf\sqrt{st_1}-\frac{1}{\sqrt{\pi s}}\cdot e^{sT}\cdot daw\sqrt{st_1}\right)\cdot\varphi_s+$$

$$+\alpha_1\cdot\mu_0\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t_1}}\cdot chsT-\frac{\sqrt{s}}{2}\cdot e^{s(t_1-T)}\cdot erf\sqrt{st_1}+\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{sT}\cdot daw\sqrt{st_1}\right)\cdot\vartheta_s+$$

$$+\left(1+\frac{\alpha_1}{s^2}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t_1}}+\frac{1}{\sqrt{\pi t_1}}\cdot chsT-\frac{\sqrt{s}}{2}\cdot e^{s(t_1-T)}\cdot erf\sqrt{st_1}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{sT}\cdot daw\sqrt{st_1}\right]\right)\cdot\alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}}u_s^{(1)}(t_1)=$$

$$=\alpha_1\frac{1}{s\sqrt{\pi}}\Bigg\{f_s^{(1)}(t_1)\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}\cdot erf\sqrt{st_1}+\frac{2}{\sqrt{s}}\cdot sh\,st_1\cdot daw\sqrt{st_1}\right)+$$

$$+\int\limits_0^{t_1}f_s^{(1)}(\tau)\Big[\sqrt{s}\cdot e^{-s\tau}\cdot daw\sqrt{st_1}-\sqrt{s}\cdot daw\sqrt{s(t_1-\tau)}+$$

$$+\frac{\sqrt{\pi s}}{2}\cdot e^{s(t_1-\tau)}\left(erf\sqrt{st_1}-erf\sqrt{s(t_1-\tau)}\right)\Big]d\tau+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{T}f_s^{(1)}(\tau)\left[-\frac{\sqrt{s}\cdot\sqrt{\pi}}{2}e^{s(t_1-\tau)}\cdot erf\sqrt{st_1}-\frac{1}{\sqrt{t_1}}ch\,s\tau+\sqrt{s}\cdot e^{st_1}\cdot daw\sqrt{st_1}\right]d\tau\Bigg\}. \tag{27}$$

В представлении (22) полагаем $t=t_2$, тогда будем иметь

$$\alpha_2\cos s(t_2+T)\cdot\nu_s+\frac{\alpha_2}{s}\sin s(t_2+T)\cdot\varphi_s-$$

$$-\alpha_2u_s^{(2)}(t_2)\left(1+\alpha_2u_s^{(2)}(t_2)\cdot\frac{1-\cos s(t_2+T)}{s^2}\right)=F_s^4, \tag{28}$$

где

$$F_s^4=-\alpha_2\int\limits_{-T}^{t_2}\frac{\sin s(t_2-\tau)}{s}\cdot f_s^{(2)}(\tau)d\tau. \tag{29}$$

Теперь из системы уравнений (25) и (28) определим неизвестные величины φ_s, v_s, $\alpha_1D_t^{\frac{1}{2}}u_s^{(1)}(t_1)$, $\alpha_2u_s^{(2)}(t_2)$, $\forall s\in S$:

$$\varphi_s=\frac{|\Delta_{\varphi_s}|}{|\Delta_s|},\;\;\nu_s=\frac{|\Delta_{\nu_s}|}{|\Delta_s|},\;\;\alpha_1u_s^{(1)}(t_1)=\frac{\left|\Delta_{\alpha_1D_t^{\frac{1}{2}}u_s^{(1)}(t_1)}\right|}{|\Delta_s|},\;\;\alpha_2u_s^{(2)}(t_2)=\frac{\left|\Delta_{\alpha_2u_s^{(2)}(t_2)}\right|}{|\Delta_s|}, \tag{30}$$

где матрицы Δ_{φ_s}, Δ_{ν_s}, $\Delta_{\alpha_1D_t^{\frac{1}{2}}u_s^{(1)}(t_1)}$, $\Delta_{\alpha_2u_s^{(2)}(t_2)}$ получаются из матрицы Δ_s заменой соответствующих столбцов элементами F_s^1, F_s^2, F_s^3, F_s^4.

Далее, подставляя (30) в (21) и (22), получаем окончательное представление решений граничных задач (15), (16):

$$u_s^{(1)}(t)=\frac{|\Delta_{\nu_s}|}{|\Delta_s|}\cdot\mu_0\cdot ch\,s(t-T)+\frac{|\Delta_{\varphi_s}|}{|\Delta_s|}\cdot\mu_1\cdot\frac{sh\,s(t-T)}{s}+\int\limits_t^T\frac{sh\,s(t-\tau)}{s}\cdot f_s^{(1)}(\tau)d\tau-$$

$$-\frac{\left|\Delta_{\alpha_1D_t^{\frac{1}{2}}u_s^{(1)}(t_1)}\right|}{|\Delta_s|}\cdot\frac{1-chs(t-T)}{s^2},\quad s\in S; \tag{31}$$

$$u_s^{(2)}(t)=\frac{|\Delta_{\nu_s}|}{|\Delta_s|}\cdot\cos s(t+T)+\frac{|\Delta_{\varphi_s}|}{|\Delta_s|}\cdot\frac{\sin s(t+T)}{s}+\int\limits_{-T}^{t}\frac{\sin s(t-\tau)}{s}\cdot f_s^{(2)}(\tau)d\tau-$$

$$-\frac{\left|\Delta_{\alpha_2u_s^{(2)}(t_2)}\right|}{|\Delta_s|}\cdot\frac{1-\cos s(t+T)}{s^2},\quad s\in S. \tag{32}$$

Теперь обсудим вопрос об установлении L_2-оценок для решений (31)-(33), равномерных по $s\in S$, т.е. оценок вида

$$\left\|u_s^{(1)}(t)\right\|_{L_2(0,T)}\le C_1\left\|f_s^{(1)}\right\|_{L_2(0,T)},\;\;s\in S; \tag{33}$$

$$\left\|u_s^{(2)}(t)\right\|_{L_2(-T,0)} \le C_2 \left\|f_s^{(2)}\right\|_{L_2(-T,0)}, \quad s \in S, \tag{34}$$

где постоянные C_1, C_2 не зависят от s.

Для этого рассмотрим вначале случай отсутствия нагруженных слагаемых. Из (31), (32) получаем следующие представления для искомых решений ($s \in S$):

$$u_s^{(1)}(t) = \int\limits_t^T \frac{sh\,s(t-\tau)}{s} \cdot f_s^{(1)}(\tau)d\tau + \frac{\left|\tilde{\Delta}_{\varphi_s}\right|}{\left|\tilde{\Delta}_s\right|} \cdot \mu_1 \cdot \frac{sh\,s(t-T)}{s} + \frac{\left|\tilde{\Delta}_{\nu_s}\right|}{\left|\tilde{\Delta}_s\right|} \cdot \mu_0 \cdot ch\,s(t-T); \tag{35}$$

$$u_s^{(2)}(t) = \int\limits_{-T}^t \frac{\sin s(t-\tau)}{s} \cdot f_s^{(2)}(\tau)d\tau + \frac{\left|\tilde{\Delta}_{\varphi_s}\right|}{\left|\tilde{\Delta}_s\right|} \cdot \frac{\sin s(t+T)}{s} + \frac{\left|\tilde{\Delta}_{\nu_s}\right|}{\left|\tilde{\Delta}_s\right|} \cdot \cos s(t+T), \tag{36}$$

где из (21) имеем

$$\left|\tilde{\Delta}_s\right| = \begin{vmatrix} \frac{\sin sT}{s} + \mu_1 \frac{shsT}{s} & \cos sT - \mu_0 chsT \\ \cos sT - \mu_1 chsT & s\left(-\sin sT + \mu_0 shsT\right) \end{vmatrix} =$$

$$= -1 - \mu_0\mu_1 + (\mu_0 - \mu_1)\sin sT \cdot shsT + (\mu_0 + \mu_1)\cos sT \cdot chsT; \tag{37}$$

$$\left|\tilde{\Delta}_{\varphi_s}\right| = \begin{vmatrix} \int\limits_{-T}^0 \frac{\sin s\tau}{s} \cdot f_s^{(2)}(\tau)d\tau - \int\limits_0^T \frac{sh\,s\tau}{s} \cdot f_s^{(1)}(\tau)d\tau & \cos sT - \mu_0 chsT \\ -\int\limits_{-T}^0 \cos s\tau \cdot f_s^{(2)}(\tau)d\tau + \int\limits_0^T chs\tau \cdot f_s^{(1)}(\tau)d\tau & s\left(-\sin sT + \mu_0 shsT\right) \end{vmatrix} =$$

$$= \int\limits_{-T}^0 f_s^{(2)}(\tau)\left[\cos s(\tau+T) - \mu_0(\cos s\tau \cdot chsT - \sin s\tau \cdot shsT)\right]d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^T f_s^{(1)}(\tau)\left[\mu_0 chs(\tau-T) - chs\tau \cdot \cos sT + shs\tau \sin sT\right]d\tau; \tag{38}$$

$$\left|\tilde{\Delta}_{\nu_s}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\sin sT}{s} + \mu_1 \frac{shsT}{s} & \int\limits_{-T}^0 \frac{\sin s\tau}{s} \cdot f_s^{(2)}(\tau)d\tau - \int\limits_0^T \frac{sh\,s\tau}{s} \cdot f_s^{(1)}(\tau)d\tau \\ \cos sT - \mu_1 chsT & -\int\limits_{-T}^0 \cos s\tau \cdot f_s^{(2)}(\tau)d\tau + \int\limits_0^T chs\tau \cdot f_s^{(1)}(\tau)d\tau \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{s}\int\limits_{-T}^0 f_s^{(2)}(\tau)\left[-\sin s(\tau+T) + \mu_1(\sin s\tau \cdot chsT - shsT \cdot \cos s\tau)\right]d\tau +$$

$$+ \frac{1}{s}\int\limits_0^T f_s^{(1)}(\tau)\left[\mu_1 shs(T-\tau) + shs\tau \cdot \cos sT + \sin sT \cdot chs\tau\right]d\tau. \tag{39}$$

Подставляя (37)–(39) в (35), получаем

$$u_s^{(1)}(t) = \frac{1}{s \cdot \left|\tilde{\Delta}_s\right|} \cdot \int\limits_{-T}^0 f_s^{(2)}(\tau)\Big\{\mu_1 shs(t-T) \cdot \cos s(\tau+T) - \mu_0 \sin s(\tau+T) \cdot chs(t-T) +$$

$$+ \mu_0\mu_1\left[\cos s\tau \cdot chs(2T-t) - shst \cdot \cos s\tau\right]\Big\}d\tau +$$

$$+ \frac{1}{s \cdot \left|\tilde{\Delta}_s\right|} \cdot \int\limits_0^T f_s^{(1)}(\tau)\Big\{\mu_0\mu_1 shs(t-\tau) + \mu_0 \sin sT \cdot chs(t-T)chs\tau - \mu_1 \cos sT \cdot shs(t-T)chs\tau\Big\}d\tau +$$

$$+\frac{1}{s\cdot\left|\tilde{\Delta}_s\right|}\int\limits_t^T f_s^{(1)}(\tau)\Big\{-(1+\mu_0\mu_1)shs(t-\tau)+(\mu_0-\mu_1)\sin sT\cdot shsT\cdot sh(t-\tau)+$$

$$+(\mu_0+\mu_1)\cos sT\cdot chsT\cdot shs(t-\tau)\Big\}d\tau. \tag{40}$$

Формулы для решений (36) и (40) позволяют получить требуемые L_2-оценки для самих функций $u_s^{(1)}(t)$, $u_s^{(2)}(t)$ и для их производных $\dfrac{du_s^{(1)}(t)}{dt}$, $\dfrac{du_s^{(2)}(t)}{dt}$, $\dfrac{d^2u_s^{(1)}(t)}{dt^2}$, $\dfrac{d^2u_s^{(2)}(t)}{dt^2}$:

$$\left\|u_s^{(1)}(t)\right\|_{L_2(0,T)}\le C_1\left[\left\|f_s^{(1)}(t)\right\|_{L_2(0,T)}+\left\|f_s^{(2)}(t)\right\|_{L_2(-T,0)}\right]; \tag{41}$$

$$\left\|u_s^{(2)}(t)\right\|_{L_2(0,T)}\le C_2\left[\left\|f_s^{(1)}(t)\right\|_{L_2(0,T)}+\left\|f_s^{(2)}(t)\right\|_{L_2(-T,0)}\right]; \tag{42}$$

$$\left\|\frac{du_s^{(1)}(t)}{dt}\right\|_{L_2(0,T)}\le C_3\left[\left\|f_s^{(1)}(t)\right\|_{L_2(0,T)}+\left\|f_s^{(2)}(t)\right\|_{L_2(-T,0)}\right]; \tag{43}$$

$$\left\|\frac{d^2u_s^{(1)}(t)}{dt^2}\right\|_{L_2(0,T)}\le C_4\left[\left\|s\cdot f_s^{(1)}(t)\right\|_{L_2(0,T)}+\left\|s\cdot f_s^{(2)}\,(t)\right\|_{L_2(-T,0)}\right]; \tag{44}$$

$$\left\|\frac{du_s^{(2)}(t)}{dt}\right\|_{L_2(0,T)}\le C_5\left[\left\|f_s^{(1)}(t)\right\|_{L_2(0,T)}+\left\|f_s^{(2)}(t)\right\|_{L_2(-T,0)}\right]; \tag{45}$$

$$\left\|\frac{d^2u_s^{(2)}(t)}{dt^2}\right\|_{L_2(0,T)}\le C_6\left[\left\|s\cdot f_s^{(1)}(t)\right\|_{L_2(0,T)}+\left\|s\cdot f_s^{(2)}(t)\right\|_{L_2(-T,0)}\right]. \tag{46}$$

Обсудим, например, получение (41). Для этого запишем представление (40) в виде

$$u_s^{(1)}(t)=\int\limits_{-T}^0 G_{2s}(t,\tau)\cdot f_s^{(1)}(\tau)d\tau+\int\limits_0^T G_{1s}(t,\tau)\cdot f_s^{(1)}(\tau)d\tau,\ \ s\in S.$$

Для получения требуемых оценок достаточно показать равномерную по s ограниченность функций G_{1s}, G_{2s}, т.е.

$$\{|G_{1s}(t,\tau)|\,,\,|G_{2s}(t,\tau)|\}\le K$$

для любых допустимых t,τ.

Для конечных s из условий теоремы эти неравенства справедливы. Остается рассматривать случаи: $s=0$, $s=\pm\infty$. Пусть $s=0$. Неравенства следуют из того факта, что в каждом слагаемом из $G_{1s}(t,\tau)$, $G_{2s}(t,\tau)$ присутствуют выражения вида $\left\{\dfrac{sh\ s\beta}{s}\right\},\left\{\dfrac{\sin s\beta}{s}\right\}$, которые ограничены при $s\to 0$. В случае $s\to\pm\infty$ ограниченность $\{|G_{1s}(t,\tau)|,G_{2s}(t,\tau)|\}$ следует из-за наличия в них гиперболических функций $\{sh,\ \ ch\}$ как в числителе, так и в знаменателе одного и того же порядка.

Аналогичное имеет место и для остальных оценок (42)-(46).

Оценки (41)-(42) остаются справедливыми в задаче (1) и при наличии нагруженных слагаемых. Для завершения доказательства теоремы теперь достаточно применить лемму из [4; 118].

Список литературы

1 Дженалиев М.Т. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений / М.Т. Дженалиев, М.И. Рамазанов. — Алматы: Ғылым, 2010. — 334 с.

2 Кароль И.Л. О краевых задачах для уравнения смешанного типа / И.Л. Кароль // Вестн. ЛГУ. Сер. Математика, механика, астрономия. — 1956. — Т. 1, № 1. — С. 177–181.

3 Лаврентьев М.А. К проблеме уравнений смешанного типа / М.А. Лаврентьев, А.В. Бицадзе // ДАН СССР. — 1950. — Т. 70, № 3. — С. 373–376.

4 Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач / А.А. Дезин. — М.: Наука, 1980. — 207 с.

А.Х. Аттаев, С.А. Ысқақов, М.И. Рамазанов

Бөлшекті-жүктелген Лаврентьев-Бицадзе теңдеуі үшін шекаралық есеп

Мақалада тіктөртбұрышты облыста бөлшекті-жүктелген Лаврентьев-Бицадзе теңдеуі үшін локальді емес шекаралық есебі зерттелген. Осыған ұқсас шекаралық есептер [1-3] жұмыстарында қарастырылған. Бұл жұмыста зерттелетін есептің алдынғы есептерден айырмашылығы, біріншіден, гиперболалық бөліктің облысы сипаттамалық емес, екіншіден, теңдеуде бөлшекті-жүктелген қосылғыштардың бар болуы қарастырылып отырған есептің кейбір ерекшеліктерін анықтауға мүмкіндік береді.

Кілт сөздер: шекаралық есеп, жүктелген теңдеулер, бөлшек туынды, айнымалыларды бөлу әдісі.

A.Kh. Attaev, S.A. Iskakov, M.I. Ramazanov

Boundary value problem for the fractional-loaded Lavrent'ev-Bitsadze equation

In this paper we study the boundary value problem for a fractional-loaded Lavrent'ev-Bitsadze equation in a rectangular domain with nonlocal boundary conditions. Similar boundary value problems were studied in papers [1-3]. The problem studied in this paper differs from the problems considered earlier in that, firstly, the domain in the hyperbolic part is not characteristic, and secondly, there are fractional-loaded terms in the equation, which makes it possible to reveal certain features of the problem under consideration.

Keywords: boundary value problem, loaded equations, fractional derivative, method of separation of variables.

References

1 Jenaliyev, M.T. & Ramazanov, M.I. (2010). *Nahruzhennye uravneniia kak vozmushcheniia differentsialnykh uravnenii [The Loaded Equations as Perturbations of Differential Equations].* Almaty: Hylym [in Russian].

2 Karol, I.L. (1956). O kraevykh zadachakh dlia uravneniia smeshannoho tipa [On boundary-value problems for a mixed-type equation]. *Vestnik LGU. Seria Matematika, mekhanika, astronomiia — Bulletin of Leningrad State University. Series Mathematics, mechanics, astronomy, 1,* 1, 177–181 [in Russian].

3 Lavrent'ev, M.A. & Bitsadze, A.V. (1950). K probleme uravnenii smeshannoho tipa [To the problem of equations of mixed type]. *DAN SSSR, 1950, 70, 3, 373–376* [in Russian].

4 Dezin, A.A. (1980). *Obshchie voprosy teorii hranichnykh zadach [General questions of the theory of boundary value problems].* Moscow: Nauka [in Russian].