УДК 512.55

А.А. Конырханова[1], В.А. Романьков[2]

[1] *Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева, Усть-Каменогорск, Казахстан;*
[2] *Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Россия*
(E-mail: ErkeshanK@mail.ru)

О разрешимости коммутаторных уравнений в алгебрах Ли

Доказано, что любое коммутаторное уравнение разрешимо над алгеброй Ли Гейзенберга над произвольным полем в большей алгебре Ли верхних нильтреугольных матриц над этим же полем. Показано, что любой член нижнего центрального ряда кольца (алгебры) Ли верхних нильтреугольных матриц является образом коммутаторной функции от одной переменной, определенной на этом кольце (алгебре).

Ключевые слова: кольцо (алгебра) Ли, нильтреугольные матрицы, уравнение, расщепимое уравнение, коммутатор, простой коммутатор.

Введение

Пусть L – кольцо (алгебра) Ли над произвольным кольцом (полем) коэффициентов K. Уравнением относительно L называется выражение вида

$$f(x_1, ..., x_n, L) = 0, \tag{1}$$

где левая часть получена из переменных $x_1, ..., x_n$ и констант (элементов L) с помощью лиевых операций сложения, умножения (коммутирования) и умножений на элементы из F. Уравнение (1) называется расщепимым, если $f(x_1, ..., x_n, L) = g(x_1, ..., x_n) - a, a \in L$, где $g(x_1, ..., x_n)$ не содержит констант. В этом случае оно записывается в виде

$$g(x_1, ..., x_n) = a. \tag{2}$$

Говорят, что уравнение (1) (или (2)) разрешимо в L, если для некоторых элементов $b_1, ..., b_n \in L$ выполнено равенство $f(b_1, ..., b_n, L) = 0$ в случае (1)(или $g(b_1, ..., b_n) = a$ в случае (2)). Набор элементов $b_1, ..., b_n$ называется решением соответствующего уравнения. Говорят, что уравнение (1) (или (2)) разрешимо над L (в классе колец (алгебр) Ли $\mathbf{A}$), если существует кольцо (алгебра) M над K (из класса $\mathbf{A}$), содержащее в качестве подкольца (подалгебры) L, в котором соответствующее уравнение имеет решение $b_1, ..., b_n \in M$.

О разрешимости уравнений для различных классов колец (алгебр) Ли известно сравнительно мало. Установлена алгоритмическая неразрешимость расщепимых уравнений в свободных и свободных нильпотентных ступени не меньше девяти кольцах Ли ранга не меньше двух над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ [1]. Вычислена коммутаторная ширина ряда свободных и относительно свободных, в том числе свободных нильпотентных, алгебр Ли конечного ранга [2], т.е. для соответствующей алгебры L определено наименьшее число k такое, что для любого элемента a из квадрата L^2 алгебры L уравнение (2) с левой частью вида $[x_1, x_2] + ... + [x_{2k-1}, x_{2k}]$ имеет решение в L.

Простой коммутатор веса $k \geq 3$ от неизвестных и (или) элементов алгебры Ли L определяется индуктивно: $[z_1, z_2, ..., z_k] = [[z_1, z_2, ..., z_{k-1}], z_k]$. Выражение $[x, y; k] = [x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k}]$ означает простой коммутатор с k вхождениями y. Уравнение (2) называется коммутаторным, если его левая часть имеет вид $[x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}], i_1, i_2, ..., i_k \in \{x_1, ..., x_n\}$. Здесь $\{x_1, ..., x_n\}$ – множество всех неизвестных, участвующих в записи уравнения.

В данной работе рассматривается разрешимость коммутаторных уравнений (2) относительно (кольца) алгебры Ли $\mathbb{N}_n(K)$ верхних нильтреугольных матриц размера $n \times n$ над произвольным ассоциативным кольцом с единицей (полем) K.

Доказаны аналоги теорем Н.С. Бахта [3, 4], уточненных первым автором в [5, 6]. Эти теоремы относятся к разрешимости коммутаторных уравнений вида (2) в группах верхних унитреугольных матриц

$\mathrm{UT}_n(K)$ размера $n \times n$ над ассоциативным кольцом с единицей (полем) K. При этом, конечно, простой коммутатор левой части (2) понимается в теоретико-групповом смысле.

Предложение 1. Коммутаторное уравнение (2) вида

$$[x, y] = a$$

имеет решение в $\mathbb{N}_n(F)$ тогда и только тогда, когда $a \in \mathbb{N}_n(F)^2$. При этом значение y можно выбрать фиксированным: $y = g, g \in \mathbb{N}_n(F)$, не зависящим от a.

Следствие 1. Коммутант (квадрат) $\mathbb{N}_n(F)^2$ кольца (алгебры) $\mathbb{N}_n(F)$ является образом функции одной переменной $\mathbb{N}_n(F) \to \mathbb{N}_n(F)^2, x \mapsto [x, g]$ при некотором фиксированном элементе $g \in \mathbb{N}_n(F)$.

Элемент g с указанным свойством называется *универсальным.* В [3, 4] приведено описание универсальных элементов в групповом случае.

Предложение 2. Коммутаторное уравнение (2) вида

$$[x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k}] = a$$

имеет решение в $\mathbb{N}_n(F)$ тогда и только тогда, когда $a \in \mathbb{N}_n(F)^{k+1}$. При этом значение y можно выбрать фиксированным: $y = g, g \in \mathbb{N}_n(F)$, не зависящим от a.

Следствие 2. Степень $\mathbb{N}_n(F)^{k+1}$ кольца (алгебры) Ли $\mathbb{N}_n(F)$ является образом функции одной переменной $\mathbb{N}_n(F) \to \mathbb{N}_n(F)^{k+1}, x \mapsto [x, g; k]$ при некотором фиксированном элементе $g \in \mathbb{N}_n(F)$.

Элемент g с указанным свойством называется *универсальным*, что соответствует частному случаю следствия 2 следствию 1. Такие элементы в групповом случае также описаны в [3, 4]. Доказательства приведенных предложений 1 и 2 содержатся в разделе 2.

Отметим работы А. Бира [7, 8], в которых установлено, что вербальные подгруппы групп унитреугольных матриц над полем исчерпываются членами нижнего центрального ряда, и доказано, что каждая такая вербальная подгруппа совпадает с множеством значений простого коммутатора от различных переменных соответствующей длины. В работе Ю.В. Сосновского [9] (анонс в [10]) доказано, что члены нижнего центрального ряда группы треугольных матриц над произвольным полем являются множествами значений любого внешнекоммутаторного слова соответствующей длины. Напомним, что внешнекоммутаторным словом длины l называется любое слово, полученное из l различных переменных с помощью операций коммутирования.

Раздел 3 посвящен доказательству основного результата статьи о разрешимости произвольного коммутаторного уравнения (2) над алгеброй Ли $\mathbb{N}_3(F)$ нильтреугольных матриц, которое называется *алгеброй Гейзенберга.* Здесь F обозначает произвольное поле.

Теорема 1. Любое коммутаторное уравнение (2) вида

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}] = a, a \in \mathbb{N}_3(F), i_1, i_2, ..., i_k \in \{x_1, ..., x_n\}, i_1 \neq i_2, \tag{3}$$

имеет решение в алгебре $\mathbb{N}_m(F)$ при достаточно большом m и естественном вложении $\mathbb{N}_3(F)$ в $\mathbb{N}_m(F)$.

Детали, касающиеся фигурирующего в формулировке теоремы 1 вложения, смотрите в разделе 3.

2 Представимость коммутанта и членов нижнего центрального ряда кольца (алгебры) $\mathbb{N}_n(K)$ как образа коммутаторной функции одной переменной

Рассмотрим множество $\mathbb{N}_n(F)$ верхних нильтреугольных матриц размера $n \times n$ над полем F, т.е. множество всех матриц $x = (x_{i,j})$ размера $n \times n$, в которых $x_{ij} = 0$ при $i \geq j$. Легко проверяется, что для всех $x \in \mathbb{N}_n(F)$ выполняется равенство $x^n = 0$. Более того, для любых элементов $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{N}_n(F)$ выполнено равенство $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = 0$. В то же время произведение $e1, 2 \cdot e_{2,3} \cdot ... \cdot e_{n-1,n} = e_{1,n}$ не равно 0. Таким образом, множество $\mathbb{N}_n(F)$ с обычными матричными операциями сложения, умножения и умножения на элементы из F является нильпотентной ассоциативной алгеброй ступени нильпотентности n. При замене поля F на коммутативное ассоциативное кольцо K получаем ассоциативное кольцо $\mathbb{N}_n(K)$, которое является нильпотентным ступени не больше, чем n.

Далее рассматриваем алгебры Ли $\mathbb{N}_n(F)$ над произвольным полем F.

Определим на $\mathbb{N}_n(F)$ операцию коммутирования, полагая $[x, y] = xy - yx$ для любой пары элементов $x, y \in \mathbb{N}_n(F)$. Хорошо известно, что $(\mathbb{N}_n(F), +, [\ ])$ является алгеброй Ли, для которой мы сохраняем обозначение $\mathbb{N}_n(F)$. Алгебра Ли $\mathbb{N}_n(F)$ нильпотентна ступени n. Действительно, тождество $[x_1, x_2, ..., x_n] = 0$

следует из соответствующего тождества ассоциативной алгебры, а непосредственно проверяемое равенство $[e_{1,2}, e_{2,3}, ..., e_{n-1,n}] = e_{1,n}$ показывает, что ступень нильпотентности при этом не меньше, чем n. Любая подалгебра алгебры $\mathbb{N}_n(F)$ также является нильпотентной алгеброй Ли степени нильпотентности не больше, чем n.

Алгебры Ли составляют один из основных классов алгебр. Важность алгебр Ли объясняется тем, что они тесно связаны с группами Ли, т.е. важнейшим классом непрерывных групп.

Матричные единицы $e_{i,j}$ при $i < j$ образуют базу линейного пространства $V_n(F)$ алгебры $\mathbb{N}_n(F)$. Тогда $dim(V_n(F)) = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Таблица умножения для матричных единиц обычная: $e_{i,j} \cdot e_{j,k} = e_{i,k}, e_{i,j} \cdot e_{l,k} = 0$ при $j \neq l$.

Заметим, что для алгебры Ли $\mathbb{N}_n(F)$ и любых $\alpha, \beta \in F$ верны соотношения

$$[\alpha e_{i,j}, \beta e_{k,l}] = \begin{cases} \alpha\beta e_{i,l}, \text{если } j = k; \\ -\alpha\beta e_{k,j}, \text{если } i = l; \\ \ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Определим для $m = 1, 2, ..., n-1$ множество матриц $\mathbb{N}_n(F)^m$, состоящее из всех матриц с $m-1$ нулевой диагональю выше главной. Известно, что $\mathbb{N}_n(F)^m$ совпадает с m-й степенью алгебры $\mathbb{N}_n(F)$.

Предложение 1. Коммутаторное уравнение (2) вида

$$[x, y] = a \tag{4}$$

имеет решение в $\mathbb{N}_n(F)$ тогда и только тогда, когда $a \in \mathbb{N}_n(F)^2$.

Доказательство. Случаи $n = 1, 2$, когда $[x, y] = 0$, тривиальны. В дальнейшем считаем, что $n \geq 3$.

Пусть для некоторого $a \in \mathbb{N}_n(F)$ уравнение (4) имеет решение в $\mathbb{N}_n(F)$, тогда докажем, что $a \in \mathbb{N}_n(F)^2$. Матрицы $x, y \in \mathbb{N}_n(F)$ однозначно записываются в виде

$$x = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_{i,j} e_{i,j}, \ y = \sum_{1 \leq i < j \leq n} y_{i,j} e_{i,j}; \ x_{i,j}, y_{i,j} \in F.$$

Непосредственным вычислением получаем, что

$$x \cdot y = \sum_{i<j<k} x_{i,j} y_{j,k} e_{i,k}.$$

Заметим, что $k - i \geq 2$, т.е. при умножении любых двух матриц из $\mathbb{N}_n(F)$ получим матрицу с нулями на первой побочной диагонали. Тогда $[x, y] = x \cdot y - y \cdot x \in \mathbb{N}_n(F)^2$. Таким образом, $a \in \mathbb{N}_n(F)^2$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $a = \sum_{j-i \geq 2} a_{i,j} e_{i,j}$, $a_{i,j} \in F$. Покажем разрешимость уравнения (4).

Пусть x – матрица, у которой на первой побочной диагонали стоят единицы, а остальные элементы нули, т.е. $x = \sum_{i=1}^{n-1} e_{i,i+1}$. Тогда уравнение (4) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{n-1} e_{i,i+1} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} y_{i,j} e_{i,j} - \sum_{i=1}^{n-1} e_{i,i+1} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} y_{i,j} e_{i,j} = \sum_{j-i \geq 2} a_{i,j} e_{i,j}. \tag{5}$$

Легко проверяется, что значение второй побочной диагонали $(a_{1,3}, a_{2,4}, ..., a_{n-2,n})$ (первая нулевая) матрицы a полностью определяется значениями первой побочной диагонали матрицы y, а именно:

$$a_{1,3} = y_{2,3} - y_{1,2}, a_{2,4} = y_{3,4} - y_{2,3};$$
$$a_{3,5} = y_{4,5} - y_{3,4}, a_{4,6} = y_{5,6} - y_{4,5}, ...;$$
$$a_{n-2,n} = y_{n-1,n} - y_{n-2,n-1}.$$

Полагаем, что

$$y_{1,2} = a_{1,3}, y_{2,3} = 0, y_{3,4} = a_{2,4};$$
$$y_{4,5} = a_{2,4} + a_{3,5}, y_{5,6} = a_{2,4} + a_{3,5} + a_{4,6}, ...;$$
$$y_{n-1,n} = a_{2,4} + a_{3,5} + a_{4,6} + ... + a_{n-2,n}.$$

Продолжаем решать уравнение (5) относительно неизвестных $y_{1,3}, y_{2,4}, ..., y_{n-2,n}$:

$$\begin{gathered} a_{1,4} = y_{2,4} - y_{1,3}; \\ a_{2,5} = y_{3,5} - y_{2,4}; \\ a_{3,6} = y_{4,6} - y_{3,5}; \\ ... \\ a_{n-3,n} = y_{n-2,n} - y_{n-3,n-1}. \end{gathered}$$

Полагая $y_{2,4} = 0$, определяем значения переменных $y_{1,3}, y_{3,5}, y_{4,6}, ..., y_{n-2,n}$, т.е. все значения второй побочной диагонали матрицы y, и т.д. Значения предпоследней диагонали матрицы y определяется из уравнения

$$a_{1,n} = y_{2,n} - y_{1,n-1}.$$

Полагая $y_{1,n-1} = 0$, определяем значение $y_{2,n}$. Таким образом, мы получили все значения матрицы y. Предложение 1 доказано.

Предложение 2. Коммутаторное уравнение (2) вида

$$[x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k}] = a \tag{6}$$

имеет решение в $\mathbb{N}_n(F)$ тогда и только тогда, когда $a \in \mathbb{N}_n(F)^{k+1}$, где $n > k+1$.

Доказательство. Пусть для некоторого $a \in \mathbb{N}_n(F)$ уравнение (6) имеет решение в $\mathbb{N}_n(F)$, тогда докажем, что $a \in \mathbb{N}_n(F)^{k+1}$. Используем индукцию по k. При $k = 1$ утверждение предложений доказано в предложении 1. Допустим, что предложение 2 справедливо при $k-1$, где $k \geq 2$, т.е. известно, что если $[x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k-1}] = a$ имеет решение в $\mathbb{N}_n(F)$, то $a \in \mathbb{N}_n(F)^k$. Подалгебра Ли $\mathbb{N}_n(F)^k$ состоит из всех матриц, имеющих $k-1$ нулевую побочную диагональ. Возьмем произвольную матрицу $z \in [x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k-1}]$, тогда по предположению $z \in \mathbb{N}_n(F)^k$, т.е.

$$z = \sum_{j-i \geq k} z_{i,j} e_{i,j}, \ z_{i,j} \in F. \tag{7}$$

Непосредственным вычислением для любого $z \in \mathbb{N}_n(F)^k$ и $y \in \mathbb{N}_n(F)$ получим, что $z \cdot y \in \mathbb{N}_n(F)^{k+1}$. Тогда $[z, y] = z \cdot y - y \cdot z \in \mathbb{N}_n(F)^{k+1}$. Таким образом, $a \in \mathbb{N}_n(F)^{k+1}$.

Докажем обратное утверждение. Возьмем произвольную матрицу $a \in \mathbb{N}_n(F)^{k+1}$, покажем разрешимость уравнения (6). Используем индукцию по k. При $k-1$ утверждение теоремы доказано в предложении 1. При этом в качестве y можно выбрать матрицу, в которой на первой побочной диагонали стоят единицы, а остальные элементы — нули. Допустим, что предложение 2 справедливо для этой матрицы при $k-1$, где $k \geq 2$. Теперь докажем, что матрица a представима в виде $a = [x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k}]$. По индуктивному предположению для этого достаточно найти матрицу $z \in \mathbb{N}_n(F)^k$ такую, что $a = [z, y]$.

Действительно, если мы найдем такую матрицу z, то её можно представить как $z = [x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k-1}]$, и тогда $a = [x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k}]$.

Будем решать уравнение

$$a = [z, y],$$

где неизвестной является матрица $z \in \mathbb{N}_n(F)^k$, тогда эту матрицу можем записать в виде (7).

Легко проверяется, что значение $(k+1)$–й побочной диагонали $(a_{1,k+2}, a_{2,k+3}, ..., a_{n-k-1,n})$ (все предыдущие нулевые) матрицы a полностью определяется значениями $(z_{1,k+1}, z_{2,k+2}, ..., z_{n-k,n})$ k-й побочной диагонали матрицы z. А именно:

$$\begin{gathered} a_{1,k+2} = z_{1,k+1} - z_{2,k+2}, \ a_{2,k+3} = z_{2,k+2} - z_{3,k+3}; \\ a_{3,k+4} = z_{3,k+3} - z_{4,k+4} \ , ..., \ a_{n-k-1,n} = z_{n-k-1,n-1} - z_{n-k,n}. \end{gathered}$$

Полагая $z_{2,k+2}=0$, получим все значения $(k+1)$-й побочной диагонали матрицы z, а именно:

$$z_{1,k+1}=a_{1,k+2}, z_{3,k+3}=-a_{2,k+3}, z_{4,k+4}=-a_{2,k+3}-a_{3,k+4},$$
$$z_{5,k+5}=-a_{2,k+3}-a_{3,k+4}-a_{4,k+5}, ..., \; z_{n-k,n}=-a_{2,k+3}-a_{3,k+4}-a_{4,k+5}-...-a_{n-k-1,n}.$$

Элементы матрицы z выше этой диагонали считаются произвольными. По индуктивному предположению матрица z представима в виде $z=[x,\underbrace{y,y,...,y}_{k-1}]$. В дальнейшем мы определяем значения матрицы z, стоящие выше $(k+1)$–й побочной диагонали. Значение $(k+2)$–й диагонали определяется из системы уравнений вида

$$\begin{gathered} a_{1,k+3}=z_{1,k+2}-z_{2,k+3}, a_{2,k+4}=z_{2,k+3}-z_{3,k+4}; \\ a_{3,k+5}=z_{3,k+4}-z_{4,k+5}, ..., a_{n-k-2,n}=z_{n-k-2,n-1}-z_{n-k-1,n}. \end{gathered} \tag{8}$$

Полагая $z_{2,k+3}=0$, определим все значения $(k+2)$-й побочной диагонали $z_{1,k+2},\; z_{2,k+3}, ..., z_{n-k-1,n}$ матрицы z. Вычислим $[z,y]$ и получим систему уравнений, аналогичных (8). Продолжая указанный процесс, мы получим все значения матрицы z. Предложение доказано.

Замечание. Аналоги предложений 1 и 2 справедливы также в случае, если рассматривается кольцо Ли $\mathbb{N}_n(K)$, где K – произвольное коммутативное ассоциативное кольцо с 1. Доказательства аналогичны приведенным выше.

3 Разрешимость коммутаторных уравнений над алгеброй Ли $\mathbb{N}_3(K)$

Пусть F – произвольное поле. Алгебра Ли $\mathbb{N}_3(F)$ называется *алгеброй Гейзенберга.* Она имеет различные приложения как в математике, так и в теоретической физике. Вначале установим вложимость алгебры Ли $\mathbb{N}_3(F)$ в достаточно высокую степень $s-1$ алгебры Ли $\mathbb{N}_{2s-1}(F)$.

Рассмотрим линейное отображение $\varphi:\mathbb{N}_3(F)\to\mathbb{N}_t(F), t=2s-1$, по правилу

$$x=x_{1,2}e_{1,2}+x_{1,3}e_{1,3}+x_{2,3}e_{2,3}\longmapsto x_{1,2}e_{1,s}+x_{1,3}e_{1,t}+x_{2,3}e_{s,t},$$

где $x_{i,j}\in F$. Это отображение будет изоморфизмом алгебры Ли $\mathbb{N}_3(F)$ и подалгебры алгебры Ли $\mathbb{N}_t(F)$, порожденной элементами $e_{1,s}, e_{1,t}, e_{s,t}$. Другими словами, указанное отображение является изоморфным вложением алгебры Ли $\mathbb{N}_3(F)$ в алгебру Ли $\mathbb{N}_t(F)$. При этом образ $\varphi(N_3(\mathbb{F}))$ лежит в $\mathbb{N}_t(F)^{s-1}$.

Докажем, что отображение φ — действительно указанный изоморфизм. Очевидно, что для любых $a,b\in\mathbb{F}$ и $x,y\in\mathbb{F}$ выполнено равенство $\varphi(ax+by)=a\varphi(x)+b\varphi(y)$. По определению отображения φ прообразом нулевого элемента является только нулевой элемент. Остается доказать свойство гомоморфности для умножения.

Пусть

$$x=x_{1,2}e_{1,2}+x_{1,3}e_{1,3}+x_{2,3}e_{2,3}, y=y_{1,2}e_{1,2}+y_{1,3}e_{1,3}+y_{2,3}e_{2,3}.$$

Тогда

$$\varphi(x)=x_{1,2}e_{1,s}+x_{1,3}e_{1,3+t}+x_{2,3}e_{s,3+t}, \varphi(y)=y_{1,2}e_{1,s}+y_{1,3}e_{1,3+t}+y_{2,3}e_{s,3+t}.$$

Непосредственным вычислением находим

$$[\varphi(x),\,\varphi(y)]=(x_{1,2}y_{2,3}-y_{1,2}x_{2,3})e_{1,3+t}.$$

С другой стороны, $\varphi([x,y])=\varphi((x_{1,2}y_{2,3}-y_{1,2}x_{2,3})e_{1,3})=((x_{1,2}y_{2,3}-y_{1,2}x_{2,3})e_{1,3+t}$. Значит, φ является изоморфным вложением.

Таким образом, для любого числа $s\geq 3$ алгебра $\mathbb{N}_3(F)$ вложима в степень $s-1$ алгебры $\mathbb{N}_t(F)$ при $t=2s-1$. Указанное вложение будем называть *естественным.* Именно такое отображение фигурирует в формулировке теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим уравнение (3). Обозначим: $x=x_{i_1}, y=x_{i_2}$. Если в записи уравнения (3) имеются переменные, отличные от x,y, заменим их на y. Получим коммутаторное уравнение от двух переменных. Его разрешимость над алгеброй $\mathbb{N}_3(F)$ в алгебре Ли вида $\mathbb{N}_t(F)$ влечет разрешимость исходного уравнения (3) в этой алгебре. Поэтому далее предполагаем, что уравнение (3) зависит только от двух неизвестных x и y.

Для упрощения вычислений рассмотрим уравнение вида

$$[x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k}, \underbrace{x, ..., x}_{l}] = a. \tag{9}$$

Докажем, что для любого $a \in \mathbb{N}_3(F)$ уравнение (9) разрешимо над $\mathbb{N}_3(F)$ в алгебре Ли $\mathbb{N}_m(F)$ при достаточно большом m. Точное значение m будет приведено по окончании доказательства. Считаем, что образ $\mathbb{N}_3(F)$ при естественном вложении лежит в $\mathbb{N}_m(F)^{k+l+1}$.

При $k = 1$ или $l = 0$ получим уравнение вида (6), разрешимость которого установлена в предложении 2. Рассмотрим случаи, когда $k > 1, l > 0$. Алгебру $\mathbb{N}_3(F)$ вложим в алгебру $\mathbb{N}_m(F)^{k+l+1}$ по правилу

$$a = a_{1,2}e_{1,2} + a_{1,3}e_{1,3} + a_{2,3}e_{2,3} \longmapsto a_{1,2}e_{1,s} + a_{1,3}e_{1,m} + a_{2,3}e_{s,m},$$

где $a_{i,j} \in F$ и $k + l + 1 < s < m - k - l$.

Тогда решением уравнения (9) является выражение вида

$$x = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3},\ y = \overline{y_1} + \overline{y_2} + \overline{y_3}, \tag{10}$$

где

$$\overline{x_1} = (-1)^l a_{1,2}e_{1,\alpha_1} + e_{\alpha_1,\alpha_2} + ... + e_{\alpha_l,\alpha_{l+1}};$$

$$\overline{y_1} = e_{\alpha_{l+1},\alpha_{l+2}} + e_{\alpha_{l+2},\alpha_{l+3}} + ... + e_{\alpha_{l+k},s};$$

$$\overline{x_2} = (-1)^l a_{1,3}e_{1,\beta_1} + e_{\beta_1,\beta_2} + ... + e_{\beta_l,\beta_{l+1}};$$

$$\overline{y_2} = e_{\beta_{l+1},\beta_{l+2}} + e_{\beta_{l+2},\beta_{l+3}} + ... + e_{\beta_{l+k},m};$$

$$\overline{x_3} = e_{\gamma_k,\gamma_{k+1}} + e_{\gamma_{k+1},\gamma_{k+2}} + ... + e_{\gamma_{k+l},m};$$

$$\overline{y_3} = (-1)^k a_{2,3}e_{s,\gamma_1} + e_{\gamma_1,\gamma_2} + ... + e_{\gamma_{k-1},\gamma_k}.$$

При этом выполнены следующие неравенства:

$$1 < \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_{l+k} < \beta_1 < \beta_2 < ... < \beta_{l+k} < \gamma_1\gamma_2 < ... < \gamma_{k+l+1}$$

и

$$\beta_i, \gamma_j \neq s \text{ при } i = \overline{1, k+l},\ j = \overline{1, k+l}.$$

Докажем, что (10) является решением уравнения (9). Для этого подставим значения (10) в (9) и произведем вычисления:

$$[x, y] = e_{\alpha_l,\alpha_{l+2}} + e_{\beta_l,\beta_{l+2}} - e_{\gamma_{k-1},\gamma_{k+1}};$$

$$[x, y, y] = e_{\alpha_l,\alpha_{l+3}} + e_{\beta_l,\beta_{l+3}} + e_{\gamma_{k-2},\gamma_{k+1}};$$

$$[x, y, y, y] = e_{\alpha_l,\alpha_{l+4}} + e_{\beta_l,\beta_{l+4}} - e_{\gamma_{k-3},\gamma_{k+1}};$$

$$\cdots$$

$$[x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k-1}] = e_{\alpha_l,\alpha_{l+k}} + e_{\beta_l,\beta_{l+k}} + (-1)^{k-1}e_{\gamma_1,\gamma_{k+1}};$$

$$[x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k}] = e_{\alpha_l,s} + e_{\beta_l,m} + a_{2,3}e_{s,\gamma_{k+1}};$$

$$[x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k}, x] = a_{2,3}e_{s,\gamma_{k+2}} - e_{\alpha_{l-1},s} - e_{\beta_{l-1},m};$$

$$[x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k}, x, x] = a_{2,3}e_{s,\gamma_{k+3}} + e_{\alpha_{l-2},s} - e_{\beta_{l-2},m};$$

$$[x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k}, \underbrace{x, x, ..., x}_{l-1}] = a_{2,3}e_{s,\gamma_{k+l}} + (-1)^{l-1}e_{\alpha_1,s} + (-1)^{l-1}e_{\beta_1,m};$$

$$[x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k}, \underbrace{x, x, ..., x}_{l}] = a_{2,3}e_{s,m} + a_{1,2}e_{1,s} + a_{1,3}e_{1,m}.$$

В общем случае мы рассмотрим уравнение вида

$$[x, y, z_1, ..., z_{k+l-1}] = a, \tag{11}$$

где неизвестные z_i совпадают либо с x, либо с y. Пусть неизвестная x встречается в записи коммутатора ровно $(l+1)$ раз, а y – ровно k раз. Непосредственно проверяется, что полученные выше решения уравнения (9) также будут решениями уравнения (11).

Остается оценить минимальное при данном методе значение m. Используемых индексов вида $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}$ и $\gamma_{i,j}$ ровно $3(k + l)$. Есть еще индексы $1, s$. Все они меньше, чем m. Значит, минимально возможное значение m равно $3(k + l) + 3 = 3(k + l + 1)$. Оно равно утроенной длине коммутатора из левой части рассматриваемого уравнения.

Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства видно, что аналогичные рассуждения проходят, если вместо алгебры Ли Гейзенберга рассматривать кольцо Ли Гейзенберга $\mathbb{N}_3(K)$ над произвольным ассоциативным кольцом с единицей K.

4 О разрешимости коммутаторных уравнений над произвольной нильпотентной алгеброй Ли

Пусть $\mathbb{N}$ – произвольная нильпотентная алгебра Ли конечной размерности над полем F. Известно, что при достаточно большом n алгебра $\mathbb{N}$ вложима в алгебру Ли $\mathbb{N}_n(F)$.

Гипотеза. Любое коммутаторное уравнение (2) разрешимо в классе нильпотентных алгебр Ли над произвольной нильпотентной алгеброй Ли $\mathbb{N}$.

В свете приведенного выше вложения достаточно подтвердить данную гипотезу для случая $\mathbb{N} = \mathbb{N}_n(F)$, причем алгебру M, в которой находится решение рассматриваемого уравнения, можно также искать в виде $\mathbb{N}_m(F)$. При $n = 3$ утверждение гипотезы дано теоремой 1.

Исследование второго автора выполнено за счет Российского научного фонда (проект №16-11-10002).

Список литературы

1 *Романьков В.А.* О неразрешимости проблемы эндоморфной сводимости в свободных нильпотентных группах и в свободных кольцах // Алгебра и логика. — 1977. — Т. 16. — № 4. — С. 457–471.

2 *Романьков В.А.* Коммутаторная ширина некоторых относительно свободных алгебр Ли и нильпотентных групп // Сиб. мат. журн. — 2016. — Т. 57. — № 4. — С. 866–888.

3 *Бахта Н.С.* О представимости коммутанта группы $UT(n, K)$ множеством значений функции одной переменной // Вестн. Омского ун-та. — 2012. — № 2. — С. 44–46.

4 *Бахта Н.С.* О представимости членов нижнего центрального ряда группы $UT(n, K)$ множеством значений функции одной переменной // Вестн. Омского ун-та. — 2013. — № 4. — С. 13–15.

5 *Конырханова А.А.* Универсальные элементы групп унитреугольных матриц над полем // Вестн. Омского ун-та. — 2015. — № 4(78). — С. 18–20.

6 *Конырханова А.А.* Универсальные элементы групп унитреугольных матриц над кольцом целых чисел // Вестн. Омского ун-та. — 2016. — № 2. — С. 11–13.

7 *Bier A.* Verbal subgroups in the group of triangular matrices over field of characteristic 0 // Journal Algebra. — 2009. — Vol. 321. — No. 2. — P. 483–494.

8 *Bier A.* The width of verbal subgroups in the group of unitriangular matrices over a field // International Journal of Algebra and Computation. — 2012. — Vol. 22. — No. 3. — P. 1250019.

9 *Sosnovskiy Yu.V.* On the width of verbal subgroups of the groups of triangular matrices over a field of arbitrary characteristic // International Journal of Algebra and Computation. — 2016. — Vol. 26. — No. 2. — P. 217–222.

10 *Сосновский Ю.В.* Вербальные подгруппы групп треугольных и унитреугольных матриц над полем произвольной характеристики // Мальцевские чтения: сб. тезисов докл. междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения Анатолия Ивановича Мальцева, 24–28 августа, Новосибирск, 2009. — С. 85, 86.

Ә.Ә. Қоңырханова, В.А. Романьков

Ли алгебрасында коммутаторлық теңдеулердің шешімділігі туралы

Кез келген коммутаторлық теңдеу Гейзенберг Ли сақинасының (алгебрасының) сыртындағы үлкен жоғарғы нильүшбұрышты матрицалар сақинасында (алгебрасында) шешімді екендігі дәлелденген. Жоғарғы нильүшбұрышты матрицалардың Ли сақинасының (алгебрасының) төменгі орталық қатарының кез келген мүшесі осы сақинада (алгебрада) анықталған бір айнымалы коммутаторлық функцияның бейнесі болатындығы көрсетілген.

Кілт сөздер: Ли сақинасы (алгебрасы), нильүшбұрышты матрицалар, теңдеу, теңдеу шешімділігі, коммутатор, жай коммутатор.

A.A. Konyrkhanova, V.A. Roman'kov

On solvability of commutator equations in Lie algebras

We prove that every commutator equation is solvable over the Heisenberg Lie algebra in the case of arbitrary field in a bigger Lie algebra of upper niltriangular matrices over the same field. It is shown that every member of the descending central series of the Lie ring (algebra) of the upper niltriangular matrices is the image of a commutator one-variable function defined on this Lie ring (algebra).

Keywords: Lie ring (algebra), niltriangular matrices, equation, split equation, commutator, simple commutator.

References

1 Roman'kov V.A. *Algebra and logic,* 1977, 16, 4, p. 457–471.
2 Roman'kov V.A. *Siberian Mathematical Journal,* 2016, 57, 4, p. 866–888.
3 Bahta N.S. *Bull. of Omsk University,* 2012, 2, p. 44–46.
4 Bahta N.S. *Bull. of Omsk University,* 2013, 4, p. 13–15.
5 Konyrkhanova A.A. *Bull. of Omsk University,* 2015, 4(78), p. 18–20.
6 Konyrkhanova A.A. *Bull. of Omsk University,* 2016, 2, p. 11–13.
7 Bier A. *Journal Algebra,* 2009, 321, 2, p. 483–494.
8 Bier A. *International Journal of Algebra and Computation,* 2012, 22, 3, p. 1250019.
9 Sosnovskiy Yu.V. *International Journal of Algebra and Computation,* 2016, 26, 2, p. 217–222.
10 Sosnovskiy Yu.V. *In International Conference «Mal'tsev Meeting», dedicated to the 100th anniversary of Anatoliĭ Ivanovich Mal'tsev,* August, 24–28, Novosibirsk, 2009, p. 85, 86.