МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.95

Ж.А. Балкизов

Институт прикладной математики и автоматизации Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук», Нальчик, Россия
(E-mail: giraslan@yandex.ru)

Краевая задача для уравнения третьего порядка с нелокальным условием по времени

В конечной прямоугольной области рассмотрена однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, с условиями периодичности по времени. Единственность решения исследуемой задачи доказана с использованием метода априорных оценок. Методом разделения переменных для частного случая исследуемой задачи построено решение в виде ряда Фурье по собственным функциям задачи. Исследована равномерная сходимость полученного решения и его производных порядка, входящих в уравнение.

Ключевые слова: нелокальная краевая задача, априорная оценка решения, метод Фурье, задача на собственные значения, собственные значения и функции задачи, равномерная сходимость ряда, непрерывность функции и ее производных.

Введение

В прямоугольной области $D=\{(x,y):\ \ 0<x<r,\ \ 0<y<h\}$ евклидовой плоскости точек $z=(x,y)$ рассмотрим уравнение

$$Lu=u_{xxx}(z)+a_2(z)\,u_{xx}(z)+a_1(z)\,u_x(z)+b_2(z)\,u_{yy}(z)+b_1(z)\,u_y(z)+b_0(z)\,u=-f(z), \tag{1}$$

где $a_i(z)=a_i(x,y)$ $(i=1,\,2)$, $b_j(z)=b_j(x,y)$ $(j=0,\,1,\,2)$, $f(z)=f(x,y)$ – заданные функции из класса $a_i(z)\in C_x^i\left(\bar{D}\right)$, $\ b_j(z)\in C_y^j\left(\bar{D}\right)$, $\ f(z)\in C\left(\bar{D}\right)$, а $u(z)=u(x,y)-$ искомая функция.

Уравнение (1), которое в монографии [1; 132] названо уравнением третьего порядка с кратными характеристиками, относится к уравнению параболического типа [2; 72]. Как показано в [3], линейное приближение распространения нелинейных звуковых волн в жидкости при кавитации описывается уравнением вида (1) при $b_2(z)\equiv 0$. В работах [4–7] изучены локальная, нелокальная и общие краевые задачи для уравнения (1) в случае, когда коэффициент $b_2(z)\equiv 0$.

В работах [8–10] различными методами получены фундаментальные решения модельного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками вида

$$u_{xxx}(z)-u_{yy}(z)=0, \tag{2}$$

а также изучены свойства полученных решений и, в частности, получены оценки построенных фундаментальных решений и их производных.

Краевые задачи для уравнений вида (2) и (1) при $b_2\,(x,\,y)\neq 0$ как в ограниченной, так и в неограниченной областях изучены в работах [11–16].

Постановка задачи

Регулярным в области D решением уравнения (1) назовем функцию $u\,(z) = u\,(x,\,y)$ из класса $C\left(\bar{D}\right) \cap C^{3,\,2}_{x,\,y}\,(D)$, при подстановке которой уравнение (1) обращается в тождество.

В данной работе исследуется следующая

Задача A. Требуется найти регулярное в области D решение уравнения (1) из класса $u(x,y) \in C^1_y\,(D \cup \{y=0\} \cup \{y=h\}) \cap C^2_x\,(D \cup \{x=r\})$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\,(0,\,y) = 0, \quad u_x\,(0,\,y) = 0, \quad u_{xx}\,(r,\,y) - \alpha\, u\,(r,\,y) = 0, \quad 0 < y < h; \tag{3}$$

$$u\,(x,\,0) = u\,(x,\,h)\,, \quad u_y\,(x,\,0) = u_y\,(x,\,h)\,, \quad 0 < x < r, \tag{4}$$

где $\alpha = const$ — заданное действительное число.

Единственность решения задачи A

Обозначим

$$(u,\,v)_0 = \int\limits_D u(z)v(z)\,dx\,dy, \quad \|u\|_0^2 = (u,\,u)_0 = \int\limits_D u^2\,(z)\;dx\,dy.$$

Справедлива следующая

Теорема. Пусть коэффициенты $a_i(x,y)$ $(i=1,\,2)$, $b_j(x,y)$ $(j=0,\,1,\,2)$ α *таковы, что обладают свойствами*

$$a_2(x,y) \geq 0, \quad b_2(x,y) \geq 0 \quad \forall \;\; (x,y) \in D; \tag{5}$$

$$a_{2xx}(x,y) + b_{2yy}(x,y) - a_{1x}\,(x,\,y) - b_{1y}(x,y) + 2\,b_0\,(x,\,y) < 0 \quad \forall \;\; (x,y) \in D; \tag{6}$$

$$a_{2x}\,(r,\,y) - a_1\,(r,\,y) - 2\,\alpha \geq a_2^2\,(r,\,y) \quad \forall \;\; y \in [0,h]; \tag{7}$$

$$b_2\,(x,\,h) = b_2\,(x,\,0)\,, \quad b_{2y}\,(x,\,h) - b_{2y}\,(x,\,0) \geq b_1\,(x,\,h) - b_1\,(x,\,0) \quad \forall \;\; x \in [0,\,r]\,. \tag{8}$$

Тогда для решения $u(z) = u(x,y)$ задачи A имеет место энергетическое неравенство

$$\|u(z)\|_0 \leq C\;\|f(z)\|_0\,, \tag{9}$$

где C – положительная постоянная, не зависящая от искомой функции $u(z)$.

Доказательство. Обозначим через $D_\varepsilon = \{(x,\,y):\; \varepsilon < x < r-\varepsilon,\; \varepsilon < y < h-\varepsilon\}$, где ε – произвольное, достаточно малое положительное число. Для исходного оператора Lu справедливо тождество

$$2u\,Lu = \frac{\partial Q(z)}{\partial\, x} - \frac{\partial P(z)}{\partial\, y} + a_{00}(z)\,u^2 - 2a_2(z)\,u_x^2 - 2b_2(z)\,u_y^2, \tag{10}$$

где

$$P(z) = [b_{2y}(z) - b_1(z)]\;u^2 - 2\,b_2(z)\,u\,u_y;$$

$$Q(z) = [a_1(z) - a_{2x}(z)]\;u^2 + 2\,u\,u_{xx} + 2\,a_2(z)u\,u_x - u_x^2;$$

$$a_{00}(z) = a_{2xx}(z) + b_{2yy}\,(z) - a_{1x}(z) - b_{1y}(z) + 2b_0\,(z)\,.$$

Интегрируя тождество (10) по вспомогательной области D_ε, а затем применяя к полученному равенству формулу Грина, будем иметь

$$2\int\limits_{D_\varepsilon} u\,Lu\,dx\,dy = \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} P(x,y)dx + Q(x,y)dy +$$

$$+\int\limits_{D_\varepsilon}\left[a_{00}(z)u^2 - 2a_2(z)u_x^2 - 2b_2(z)u_y^2\right]dx\,dy = -2\int\limits_{D_\varepsilon} u(z)f(z)dx\,dy, \tag{11}$$

где Γ_ε — граница вспомогательной области D_ε.

Перейдем в равенстве (11) к пределу при $\varepsilon \to 0$. Легко заметить, что при этом область D_ε переходит в D. Тогда, с учетом граничных условий (3), (4), получим

$$-2\,(u,\,f)_0 = 2\int\limits_0^r [b_2(x,h) - b_2(x,0)]\,u(x,0)\,u_y(x,0)\,dx+$$

$$+\int\limits_0^r [b_{2y}(x,0) - b_{2y}(x,h) + b_1(x,h) - b_1(x,0)]\,u^2(x,0)\,dx+$$

$$+\int\limits_0^r \left[(2\alpha + a_1(r,y) - a_{2x}(r,y))\,u^2(r,y) + 2a_2(r,y)\,u(r,y)\,u_x(r,y) - u_x^2(r,y)\right]dy+$$

$$+\int\limits_D \left[a_{00}(z)u^2 - 2a_2(z)\,u_x^2 - 2b_2(z)u_y^2\right]dx\,dy = I_1 - I_2 - I_3 - I_4. \tag{12}$$

Из условия (8) теоремы следует, что

$$I_1 = 2\int\limits_0^r [b_2(x,h) - b_2(x,0)]\,u(x,0)\,u_y(x,0)\,dx = 0.$$

Тогда равенство (12) перепишется в следующей форме:

$$2\,(u,f)_0 = \int\limits_0^r [b_{2y}(x,h) - b_{2y}(x,0) + b_1(x,0) - b_1(x,h)]\,u^2(x,0)\,dx+$$

$$+\int\limits_0^r \left[u_x^2(r,y) - 2a_2(r,y)\,u(r,y)\,u_x(r,y) + (a_{2x}(r,y) - a_1(r,y) - 2\alpha)\,u^2(r,y)\right]dy+$$

$$+\int\limits_D \left[2a_2(z)u_x^2 + 2b_2(z)\,u_y^2 - a_{00}(z)u^2\right]dx\,dy. \tag{13}$$

В силу условий (7) и (8) теоремы справедливы неравенства

$$I_2 = \int\limits_0^r [b_{2y}(x,h) - b_{2y}(x,0) + b_1(x,0) - b_1(x,h)]\,u^2(x,0)\,dx \ge 0;$$

$$I_3 = \int\limits_0^r \left[u_x^2(r,y) - 2a_2(r,y)\,u(r,y)\,u_x(r,y) + (a_{2x}(r,y) - a_1(r,y) - 2\alpha)\,u^2(r,y)\right]dy \ge 0,$$

а в силу условий (5) справедливо

$$I_4 = \int\limits_D \left[2a_2(z)u_x^2 + 2b_2(z)\,u_y^2 - a_{00}(z)u^2\right]dx\,dy \ge -\int\limits_D a_{00}(z)u^2(z)dx\,dy.$$

С учетом полученных выше неравенств из (13) находим

$$m\,\|u\|_0^2 \le 2\,(u,f)_0 \le \varepsilon_1\,\|u\|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon_1}\,\|f\|_0^2,$$

где $m = \min\limits_{(x,y)\in D}|a_{00}(z)| = \min\limits_{(x,y)\in D}|a_{2xx}(z) + b_{2yy}(z) - a_{1x}(z) - b_{1y}(z) + 2b_0(z)|$; ε_1 — достаточно малое положительное число.

Выбирая $\varepsilon_1 = \frac{m}{2}$ из последнего неравенства, приходим к априорной оценке (9). Теорема доказана.

Из априорной оценки (9) вытекает единственность регулярного решения исследуемой задачи A.

Существование решения задачи A

Далее перейдем к исследованию вопроса о существовании решения задачи A. Существование решения задачи (3), (4) для уравнения (1) будем доказывать с использованием метода разделения переменных (метода Фурье) для частного случая уравнения (1), когда

$$b_2\,(x,y) = \lambda = const, \quad b_0\,(x,y) = \mu = const, \quad a_1\,(x,y) = a_2\,(x,y) = b_1\,(x,y) \equiv 0.$$

Условия (5)–(8) при этом будут выполнены, если

$$\lambda \geq 0, \quad \mu < 0, \quad \alpha \leq 0. \tag{14}$$

При сделанных предположениях относительно коэффициентов $a_i(z) = a_i(x,\ y)\,(i = 1,\,2)$, $b_j\,(z) = b_j(x,\ y)$ $(j = 0,\,1,\,2)$ задача (1), (3), (4) переходит к следующей задаче:

$$u_{xxx} + \lambda\,u_{yy} + \mu\,u = -f(x,y), \quad (x,y) \in D; \tag{15}$$

$$u\,(0,\,y) = 0, \quad u_x\,(0,\,y) = 0, \quad u_{xx}\,(r,\,y) - \alpha\,u\,(r,\,y) = 0, \quad y \in (0,h); \tag{16}$$

$$u\,(x,\,0) = u\,(x,\,h)\,, \quad u_y\,(x,\,0) = u_y\,(x,\,h)\,, \quad x \in (0,\,r)\,. \tag{17}$$

Вначале положим, что $f(x,y) = 0$. Решение задачи (15)–(17) ищем в виде

$$u(x,y) = X(x)\,Y\,(y)\,. \tag{18}$$

Подставляя (18) в (15), с учетом условий (17), приходим к следующей задаче на собственные значения относительно $Y(y)$:

$$Y''\,(y) + \theta\,Y\,(y) = 0; \tag{19}$$

$$Y\,(0) = Y\,(h)\,, \quad Y'\,(0) = Y'\,(h)\,. \tag{20}$$

При $\theta < 0$ задача (19), (20) имеет только тривиальное решение $Y(y) \equiv 0$.

Пусть $\theta = 0$. В этом случае функция $Y_0\,(y) = \frac{A_0}{2}$, где $A_0 = const$, является собственной функцией задачи (19), (20), соответствующей собственному значению $\theta_0 = 0$.

И, наконец, при $\theta > 0$ собственные значения задачи (19), 20) будут иметь вид

$$\theta_n = \left(\frac{2\,\pi\,n}{h}\right)^2, \quad n \in N,$$

а собственными функциями, соответствующими собственным значениям θ_n, будут

$$Y_n\,(y) = A_n\,\cos\left(\frac{2\pi\,n}{h}y\right) + B_n\,\sin\left(\frac{2\pi\,n}{h}\,y\right).$$

Легко заметить, что система функций $\left\{\frac{1}{2};\ \cos\left(\frac{2\pi n}{h}\,y\right);\ \sin\left(\frac{2\pi n}{h}\,y\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ образует полную ортогональную систему в $L_2[0,h]$.

Пусть теперь $f(x,y) \neq 0$. Решение неоднородного уравнения (15) будем искать в виде ряда Фурье по собственным функциям задачи (19), (20)

$$u(x,y) = \frac{A_0\,(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n(x)\,\cos\left(\frac{2\pi\,n}{h}y\right) \,+\, B_n(x)\,\sin\left(\frac{2\pi\,n}{h}\,y\right)\right], \tag{21}$$

где $A_0(x)$, $A_n(x)$, $B_n(x)$ — пока неизвестные достаточно гладкие функции.

Предположим, что правая часть $f(x,y)$ уравнения (15) допускает разложение в ряд Фурье по собственным функциям задачи (19), (20):

$$f(x,y) = \frac{F_0\,(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[F_n(x)\,\cos\left(\frac{2\pi n}{h}y\right) \,+\, \Phi_n(x)\,\sin\left(\frac{2\pi n}{h}\,y\right)\right], \tag{22}$$

где $F_n(x) = \frac{2}{h} \int\limits_0^h f(x,y) \cos\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) dy$, $\Phi_n(x) = \frac{2}{h} \int\limits_0^h f(x,y) \sin\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) dy$, $n = 0, 1, 2, ...$

Подставляя (21) в уравнение (15), с учетом (22), приходим к равенству

$$\frac{A_0'''(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n'''(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) + B_n'''(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) \right] -$$

$$-\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi n}{h}\right)^2 \left[A_n(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) + B_n(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) \right] +$$

$$+\frac{\mu}{2} A_0(x) + \mu \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) + B_n(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) \right] =$$

$$= -\frac{F_0(x)}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[F_n(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) + \Phi_n(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) \right].$$

Из последнего равенства, с учетом условий (16), приходим к следующим задачам относительно искомых функций $A_0(x)$, $A_n(x)$, $B_n(x)$:

$$A_0'''(x) + \mu A_0(x) = -F_0(x); \quad 0 < x < r; \tag{23}$$

$$A_0(0) = 0, \quad A_0'(0) = 0, \quad A_0''(r) - \alpha A_0(r) = 0; \tag{24}$$

$$A_n'''(x) + \mu A_n(x) - \lambda \left(\frac{2\pi n}{h}\right)^2 A_n(x) = -F_n(x), \quad n \in N, \quad 0 < x < r; \tag{25}$$

$$A_n(0) = 0, \quad A_n'(0) = 0, \quad A_n''(r) - \alpha A_n(r) = 0; \tag{26}$$

$$B_n'''(x) + \mu B_n(x) - \lambda \left(\frac{2\pi n}{h}\right)^2 B_n(x) = -\Phi_n(x), \quad n \in N, \quad 0 < x < r; \tag{27}$$

$$B_n(0) = 0, \quad B_n'(0) = 0, \quad B_n''(r) - \alpha B_n(r) = 0. \tag{28}$$

Решения задач (23–28) выписываются по формулам

$$A_n(x) = -\int\limits_0^r G_n(x, t)\, F_n(t)\, dt, \quad n \in N \cup 0;$$

$$B_n(x) = -\int\limits_0^r G_n(x, t)\, \Phi_n(t)\, dt, \quad n \in N,$$

где $G_n(x, t)$ — функция Грина оператора

$$L[g] = g'''(x) - \omega_n^3 g(x)$$

с условиями

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad g''(r) - \alpha g(r) = 0,$$

явный вид которой определяется формулой

$$G_n(x, t) = \begin{cases} \left[e^{\omega_n x} - 2e^{-\frac{\omega_n x}{2}} \sin\left(\kappa_n x + \frac{\pi}{6}\right)\right] a_{1n}, \quad 0 \le x < t, \\ \left[e^{\omega_n x} - 2e^{-\frac{\omega_n x}{2}} \sin\left(\kappa_n x + \frac{\pi}{6}\right)\right] a_{1n} + \frac{1}{3\omega_n^2} \left[e^{\omega_n (x-t)} - 2e^{-\frac{\omega_n}{2}(x-t)} \sin\left(\kappa_n (x-t) + \frac{\pi}{6}\right)\right], \\ t < x \le r. \end{cases}$$

Здесь $\omega_n^3 = \lambda \left(\frac{2\pi n}{h}\right)^2 - \mu > 0$, $\kappa_n = \frac{\sqrt{3}\omega_n}{2}$;

$$a_{1n} = -\frac{\left(\omega_n^2 - \alpha\right) e^{\omega_n (r-t)} + 2\omega_n^2 e^{-\frac{\omega_n}{2}(r-t)} \cos\left(\kappa_n (r-t)\right) + 2\alpha e^{-\frac{\omega_n}{2}(r-t)} \cos\left(\kappa_n (r-t) - \frac{\pi}{3}\right)}{3\omega_n^2 \left[\left(\omega_n^2 - \alpha\right) e^{\omega_n r} + 2\omega_n^2 e^{-\frac{\omega_n r}{2}} \cos\left(\kappa_n r\right) + 2\alpha e^{-\frac{\omega_n r}{2}} \cos\left(\kappa_n r - \frac{\pi}{3}\right)\right]}.$$

Подставляя значения $A_0(x)$, $A_n(x)$, $B_n(x)$ в (21), находим

$$u(x,y) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^r G_0\,(x,\,t)\;F_0\,(t)\;dt - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int\limits_0^r G_n\,(x,\,t)\;F_n\,(t)\;dt\,\cos\left(\frac{2\pi\,n}{h}y\right) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^r G_n\,(x,\,t)\;\Phi_n\,(t)\;dt\;\sin\left(\frac{2\pi\,n}{h}y\right)\right]. \qquad (29)$$

С учетом значений $F_0(x)$, $F_n(x)$, $\Phi_n(x)$ из (29) приходим к следующему представлению решения исследуемой задачи A:

$$u(x,y) = -\frac{2}{h}\int\limits_0^h\int\limits_0^r G\,(x,\,t;\,y-s)\;f\,(t,\,s)\;dt\,ds, \qquad (30)$$

где

$$G\,(x,\,t;\,y-s) = \frac{1}{2}\,G_0\,(x,\,t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n\,(x,\,t)\,\cos\left(\frac{2\pi n}{h}\;(y-s)\right).$$

Покажем, что знаменатель

$$\Delta = \left(\omega_n^2 - \alpha\right)\,e^{\omega_n\,r} + 2\,\omega_n^2\,e^{-\frac{\omega_n\,r}{2}}\,\cos\left(\kappa_n\,r\right) + 2\,\alpha\,e^{-\frac{\omega_n\,r}{2}}\,\cos\left(\kappa_n\,r - \frac{\pi}{3}\right)$$

коэффициента $a_{1n}\,(t)$ не равен нулю. Для этого рассмотрим однородную задачу

$$L\,[g] = g'''\,(x) - \omega_n^3\,g\,(x) = 0, \quad 0 < x < r \qquad (31)$$

с условиями

$$g\,(0) = 0, \quad g'\,(0) = 0, \quad g''\,(r) - \alpha\,g\,(r) = 0. \qquad (32)$$

Умножая уравнение (31) скалярно на функцию $g(x)$, с учетом условий (32), находим

$$(g(x),\,L\,[g])_0 = \int\limits_0^r g(x)\;\left[g'''\,(x) - \omega_n^3\,g\,(x)\right]\,dx = \alpha\,g^2\,(r) - \frac{1}{2}g'^{\,2}\,(r) - \omega_n^3\int\limits_0^r g^2(x)\,dx = 0.$$

Так как $\alpha \le 0$, а $\omega_n^3 > 0$, то последнее равенство может иметь место в том и только в том случае, когда $g(x) \equiv 0$, т. е. однородная задача (31), (32) имеет только нулевое решение.

С другой стороны, общее решение уравнения (31) можно представить в следующем виде:

$$g(x) = \frac{1}{(3+\sqrt{3})\,\omega_n^2}\;\left[\left(2\,e^{\omega_n x} + \left(1+\sqrt{3}\right)\,e^{-\frac{\omega_n x}{2}}\cos\left(\kappa_n x\right) + \left(1-\sqrt{3}\right)\,e^{-\frac{\omega_n x}{2}}\sin\left(\kappa_n x\right)\right)\,\omega_n^2\,c_1 + \right.$$

$$+ \left(e^{\omega_n x} - e^{-\frac{\omega_n x}{2}}\cos\left(\kappa_n x\right) + \left(2+\sqrt{3}\right)\,e^{-\frac{\omega_n x}{2}}\sin\left(\kappa_n x\right)\right)\,\omega_n\,c_2 +$$

$$\left. + \left(\sqrt{3}\,e^{\omega_n x} - \sqrt{3}\,e^{-\frac{\omega_n x}{2}}\cos\left(\kappa_n x\right) - 3\,e^{-\frac{\omega_n x}{2}}\sin\left(\kappa_n x\right)\right)\;c_3\,\right]. \qquad (33)$$

Удовлетворяя (33) условиям (32), находим, что

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0;$$

$$\left[\left(\omega_n^2 - \alpha\right)\,e^{\omega_n r} + 2\,\omega_n^2\,e^{-\frac{\omega_n r}{2}}\,\cos\left(\kappa_n r\right) + 2\,\alpha\,e^{-\frac{\omega_n\,r}{2}}\,\cos\left(\kappa_n r - \frac{\pi}{3}\right)\right]\,c_3 = 0. \qquad (34)$$

Если $\Delta = 0$, то, как видно из (34), постоянная c_3 будет произвольной и поэтому задача (31), (32) будет иметь нетривиальное решение вида

$$g(x) = \frac{1}{(1+\sqrt{3})\,\omega_n^2}\,\left(e^{\omega_n x} - \,e^{-\frac{\omega_n x}{2}}\cos\left(\kappa_n x\right) - \sqrt{3}\,e^{-\frac{\omega_n x}{2}}\sin\left(\kappa_n x\right)\right)\,c_3.$$

Однако выше доказано, что однородная задача (31), (32) имеет только нулевое решение. Полученное противоречие доказывает, что

$$\Delta = \left(\omega_n^2 - \alpha\right) e^{\omega_n r} + 2\,\omega_n^2\, e^{-\frac{\omega_n r}{2}} \cos\left(\kappa_n r\right) + 2\,\alpha\, e^{-\frac{\omega_n r}{2}} \cos\left(\kappa_n r - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0,$$

и, стало быть, при условиях (14) существует единственная функция Грина $G_n\left(x,\,t\right)$ задачи (31), (32).

Таким образом, формула (30) дает представление единственного решения задачи А для уравнения (1) в случае, когда коэффициенты $a_1\left(x,\,y\right) = a_2(x,y) = b_1(x,y) \equiv 0$, а

$$b_2(x,y) = \lambda = const \geq 0, \quad b_0(x,y) = \mu = const < 0, \quad \alpha \leq 0.$$

Список литературы

1 *Джураев Т.Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. — Ташкент: ФАН, 1979. — 238 с.

2 *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высш. шк., 1995. — 301 с.

3 *Красильников В.А., Кузнецов В.П.* Распространение нелинейных звуковых волн в жидкости при кавитации // Акустический журн. — 1974. — Т. 20. — № 3. — С. 473–477.

4 *Cattabriga L.* Annali della seuola normole Superici di pisa e mathematics. — 1959. — Vol. 13. — No. 2. — P. 163.

5 *Иргашев Ю.* Некоторые краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками // Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения: сб. науч. тр. — Ташкент: ФАН, 1976. — С. 17–31.

6 *Джураев Т.Д., Абдиназаров С.* Краевые задачи типа задачи Бицадзе-Самарского для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками // Известия АН Узбекской ССР. — 1981. — № 1. — С. 8–11.

7 *Абдиназаров С.* Общие краевые задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Дифференц. уравнения. — 1981. — Т. 17. — № 1. — С. 3–12.

8 *Block H.* Sur les equations lineaires aux derivies partielles a caracteristiques mulptiples // Arkiv for Mat. Astr. och Fysik. — 1912. — Bd.7. — P. 3–20.

9 *Cattabriga L.* Potenziale di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple // Rendiconti del seminario Matem. della univ. di Padava. — 1961. — Vol. 31.

10 *Джураев Т.Д., Апаков Ю.П.* Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. — 2007. — № 2(16). — С. 18–26.

11 *Апаков Ю.П.* Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: материалы III Междунар. конф. — Нальчик: Эльбрус, 2006. — С. 37–39.

12 *Иргашев Ю., Апаков Ю.П.* Первая краевая для уравнения третьего порядка псевдоэллиптического типа // Узбек. мат. журн. — 2006. — № 2. — С. 44–51.

13 *Апаков Ю.П.* К решению краевых задач для уравнения $u_{xxx} - u_{yy} = 0$ в неограниченных областях // Докл. АН Республики Узбекистан. — 2006. — № 3. — С. 17–20.

14 *Апаков Ю.П.* О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Укр. мат. журн. — Т. 64. — № 1. — 2012. — С. 3–13.

15 *Балкизов Ж.А., Кодзоков А.Х.* О представлении решения краевой задачи для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Известия Кабардино-Балкарского науч. центра РАН. — 2010. — № 4. — С. 64–69.

16 *Балкизов Ж.А.* Краевая задача для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Докл. Адыгской (Черкесской) МАН. — 2015. — Т. 17. — № 3. — С. 13–21.

Ж.А. Балкизов

Уақыт бойынша бейлокалды шарттары бар үшінші ретті теңдеу үшін шеттік есеп

Мақалада тікбұрышты шекті облыста уақыт бойынша периодты шартты, еселі сипаттаушылары бар үшінші ретті теңдеу үшін бейлокалды шеттік есептің бірмәнді шешімділігі дәлелденген. Априорлы бағалау әдісімен зерттеліп отырған есеп шешімінің жалғыздығы дәлелденген. Берілген есептің дербес жағдайы үшін айнымалыларды бөліктеу әдісімен есептің меншікті функциялары бойынша Фурье қатары түрінде шешімі табылған. Алынған шешімнің салынған шешуі мен теңдеуге енгізілген туындыларының бірқалыпты жинақтылығы жан-жақты зерттелген.

Кілт сөздер: бейлокалды шеттік есеп, шешімнің априорлық бағалануы, Фурье әдісі, меншікті мәндерге қойылған есеп, есептің меншікті мәндері мен меншікті функциялары, қатардың бірқалыпты жинақталуы, функция мен оның туындысының байланысы.

Zh.A. Balkizov

A boundary value problem for a third-order equation with a nonlocal condition for the time

At the end of the rectangular area in the unique solvability of a nonlocal boundary value problem for a third-order equation with multiple characteristics with the terms of the frequency with respect to time. Uniqueness of the solution of the problem is proved by the method of a priori estimates. The method of separation of variables for the particular case of the problem solution is constructed in the form of a Fourier series in eigenfunctions of the problem. Studied uniform convergence of the solution and its derivatives of order, included in the equation.

Keywords: nonlocal boundary value problem, a priori estimate of the solution, Fourier method, the problem on their own values, their own values and tasks functions, uniform convergence of the series, the continuity of the function and its derivatives.

References

1 Juraev T.D. *Boundary value problems for equations of mixed and mixed-composite types,* Tashkent: FAN, 1979, 238 p.

2 Nahushev A.M. *Equations of mathematical biology,* Moscow: Vysshaya shkola, 1995, 301 p.

3 Krasilnikov V.A., Kuznetsov V.P. *Acoustic of the Journal,* 1974, 20, 3, p. 473–477.

4 Cattabriga L. *Annali della seuola normole Superici di pisa e mat.,* 1959, 13, 2, p. 163.

5 Irgashev Yu. *Boundary value problems for differential equations and their applications: collection of scientific papers,* Tashkent: FAN, 1976, p. 17–31.

6 Juraev T.D., Abdinazarov S. *News of the Academy of Sciences of the Uzbek SSR,* 1981, 1, p. 8–11.

7 Abdinazarov S. *Differential Equations,* 1981, 17, 1, p. 3–12.

8 Block H. *Arkiv for Mat. Astr. och Fysik.*, 1912, 7, p. 3–20.

9 Cattabriga L. *Rendiconti del seminario Matem. della univ. di Padava,* 1961, 31.

10 Juraev T.D., Apakov Yu.P. *Bulletin of Samara State Technical University. A series of physical and mathematical sciences,* 2007, 2(16), p. 18–26.

11 Apakov Yu.P. *Nonlocal boundary-value problems and related problems of mathematical biology, informatics and physics: materials III International conferences,* Nalchik: Elbrus, 2006, p. 37–39.

12 Irgashev Yu., Apakov Yu.P. *Uzbek Mathematical Journal,* 2006, 2, p. 44–51.

13 Apakov Yu.P. *Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,* 2006, 3, p. 17–20.

14 Apakov Yu.P. *Ukrainian Mathematical Journal,* 2012, 64, 1, p. 3–13.

15 Balkizov Zh.A., Kodzokov A.Kh. *News of the Kabardino-Balkar Scientific Centre of Russian Academy of Sciences,* 2010, 4, p. 64–69.

16 Balkizov Zh.A. *Reports of the Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences,* 2015, 17, 3, p. 13–21.