УДК 517.51

Н.А. Бокаев[1], В.И. Буренков[2,3], Д.Т. Матин[1]

[1] *Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана;*
[2] *Кардиффский университет, Великобритания;*
[3] *Российский университет дружбы народов, Москва*
(E-mail: bokayev2011@yandex.ru)

О достаточном условии предкомпактности множеств в обобщенных пространствах Морри

В статье приведены достаточные условия предкомпактности множеств в обобщенных пространствах Морри $M_p^{w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Из доказанной теоремы в случае $w(r) = r^{-\lambda}, 0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$, вытекает известный результат для пространства Морри $M_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)$, а в случае $\lambda = 0$ — хорошо известная теорема Фреше-Колмогорова. Предварительно доказаны несколько лемм об оценке средних функций в обобщенном пространстве Морри. Эти леммы представляют самостоятельный интерес. Обсуждается необходимость полученных условий.

Ключевые слова: пространства Морри, обобщенные пространства Морри, предкомпактность.

Пусть $1 \leq p \leq \infty$, w – измеримая неотрицательная функция на $(0, \infty)$, не эквивалентная нулю. Обобщенное пространство Морри $M_p^{w(\cdot)} \equiv M_p^{w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ определяется как множество всех функций $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ с конечной квазинормой

$$\|f\|_{M_p^{w(\cdot)}} \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}^n,\ r>0} \Big(w(r) \, \|f\|_{L_p(B(x,r))} \Big),$$

где $B(x,r)$ – открытый шар с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$ радиуса $r > 0$.

Пространство $M_p^{w(\cdot)}$ совпадает с классическим пространством Морри M_p^{λ} при $w(r) = r^{-\lambda}$, где $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$, которое, в свою очередь, при $\lambda = 0$ совпадает с пространством $L_p(\mathbb{R}^n)$, а при $\lambda = \frac{n}{p}$ — с пространством $L_\infty(\mathbb{R}^n)$.

В соответствии с [1, 2] обозначим через $\Omega_{p\infty}$ множество всех функций, которые являются неотрицательными, измеримыми на $(0, \infty)$, не эквивалентными 0 и такими, что для некоторого $t > 0$ (а значит, и для любых $t > 0$)

$$\|w(r) r^{\frac{n}{p}}\|_{L_\infty(0,t)} < \infty, \quad \|w(r)\|_{L_\infty(t,\infty)} < \infty.$$

Пространство $M_p^{w(\cdot)}$ нетривиально, т.е. состоит не только из функций, эквивалентных 0 на $\mathbb{R}^n$, тогда и только тогда, когда $w \in \Omega_{p\infty}$ (см. [3, 4]).

Пусть $\chi(A)$ — характеристическая функция множества $A \subset \mathbb{R}^n$ и ${}^cA$ — дополнение A.

Теорема. Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и $w \in \Omega_{p\infty}$. Предположим, что множество $S \subset M_p^{w(\cdot)}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\sup_{f \in S} \|f\|_{M_p^{w(\cdot)}} < \infty; \tag{1}$$

$$\lim_{u \to 0} \sup_{f \in S} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_{M_p^{w(\cdot)}} = 0; \tag{2}$$

$$\lim_{r \to \infty} \sup_{f \in S} \left\| f \chi_{{}^cB(0,r)} \right\|_{M_p^{w(\cdot)}} = 0. \tag{3}$$

Тогда S является предкомпактным множеством в $M_p^{w(\cdot)}$. В случае пространства Морри $M_p^{\lambda}(0 < \lambda < \frac{n}{p})$ эта теорема была доказана в работе [5], а в случае $\lambda = 0$ — это хорошо известная теорема Фреше-Колмогорова [6].

Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Для $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ и $r > 0$ обозначим

$$(M_r f)(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} f(y) dy,$$

где $|\,A\,|$ обозначает меру Лебега множества $A \subset \mathbb{R}^n$.

Лемма 1. Пусть $1 \le p \le \infty$, $w \in \Omega_{p\infty}$. Тогда для всех $f \in M_p^{w(\cdot)}$ и $r > 0$ имеет место оценка

$$\|M_r f - f\|_{M_p^{w(\cdot)}} \le \sup_{u \in B(0,r)} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_{M_p^{w(\cdot)}}\,. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $z \in \mathbb{R}^n$ и $\rho > 0$. Тогда, согласно неравенству Гельдера,

$$\|M_r f - f\|_{L_p(B(z,\rho))} = \left(\int\limits_{B(z,\rho)} \left|\frac{1}{|B(x,r)|}\int\limits_{B(x,r)} f(y)dy - f(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int\limits_{B(z,\rho)} \left|\frac{1}{|B(x,r)|}\int\limits_{B(x,r)} (f(y) - f(x))dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \left(\int\limits_{B(z,\rho)} \left(\frac{1}{|B(x,r)|}\int\limits_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|^p dy\right) dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Далее, используя замену переменных $y = x + u$ и меняя местами порядок интегрирования, получаем:

$$\|M_r f - f\|_{L_p(B(z,\rho))} \le \left(\int\limits_{B(z,\rho)} \left(\frac{1}{|B(0,r)|}\int\limits_{B(0,r)} |f(x+u) - f(x)|^p du\right) dx\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\frac{1}{|B(0,r)|}\int\limits_{B(0,r)} \left(\int\limits_{B(z,\rho)} |f(x+u) - f(x)|^p dx\right) du\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\frac{1}{|B(0,r)|}\int\limits_{B(0,r)} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|^p_{L_p(B(z,\rho))}\, du\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Следовательно,

$$\|M_r f - f\|_{M_p^{w(\cdot)}} = \sup_{z \in \mathbb{R}^n,\ \rho > 0} w(\rho)\, \|M_r f - f\|_{L_p(B(z,\rho))} \le$$

$$\le \sup_{z \in \mathbb{R}^n,\ \rho > 0} w(\rho) \left(\frac{1}{|B(0,r)|}\int\limits_{B(0,r)} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|^p_{L_p(B(z,\rho))}\, du\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \left(\frac{1}{|B(0,r)|}\int\limits_{B(0,r)} \sup_{z \in \mathbb{R}^n,\ \rho > 0} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|^p_{L_p(B(z,\rho))}\, du\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\frac{1}{|B(0,r)|}\int\limits_{B(0,r)} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|^p_{M_p^{w(\cdot)}}\, du\right)^{\frac{1}{p}} \le \sup_{u \in B(0,r)} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_{M_p^{w(\cdot)}}\,.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $1 \le p \le \infty$, $w \in \Omega_{p\infty}$. Тогда для всех $f \in M_p^{w(\cdot)}$ и $r > 0$ имеет место неравенство

$$\|M_r f\|_{M_p^{w(\cdot)}} \le \|f\|_{M_p^{w(\cdot)}}\,. \tag{5}$$

Доказательство. Согласно неравенству Гельдера

$$\|M_r f\|_{L_p(B(z,\rho))} = \left(\int\limits_{B(z,\rho)} \left| \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} f(y)dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{B(z,\rho)} \left(\frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|^p \, dy \right) dx \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int\limits_{B(z,\rho)} \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int\limits_{B(0,r)} |f(x+u)|^p \, du \right) dx \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int\limits_{B(0,r)} \left(\int\limits_{B(z,\rho)} |f(x+u)|^p \, dx \right) du \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int\limits_{B(0,r)} \left(\int\limits_{B(z+u,\rho)} |f(v)|^p \, dv \right) du \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int\limits_{B(0,r)} \|f\|^p_{L_p(B(z+u,\rho))} \, du \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Далее,

$$\|M_r f\|_{M_p^{w(\cdot)}} \leq \sup_{z \in \mathbb{R}^n, \ \rho > 0} \Big(w(\rho) \, \|M_r f\|_{L_p(B(z,\rho))} \Big) \leq$$

$$\leq \sup_{z \in \mathbb{R}^n, \ \rho > 0} \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int\limits_{B(0,r)} \Big(w(\rho) \, \|f\|_{L_p(B(z+u,\rho))} \Big)^p du \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int\limits_{B(0,r)} \Big(\sup_{z \in \mathbb{R}^n, \ \rho > 0} w(\rho) \, \|f\|_{L_p(B(z+u,\rho))} \Big)^p du \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int\limits_{B(0,r)} \Big(\sup_{x \in \mathbb{R}^n, \ \rho > 0} w(\rho) \, \|f\|_{L_p(B(x,\rho))} \Big)^p du \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{M_p^{w(\cdot)}} .$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $w \in \Omega_{p\infty}$. Тогда существует $r_0 > 0$ и для любых $0 < r \leq r_0$ существует $C_r > 0$, зависящее только от r, n, p, w, такое, что:

1) для любых $f \in M_p^{w(\cdot)}$

$$\|M_r f\|_{C(\mathbb{R}^n)} \leq C_r \, \|f\|_{M_p^{w(\cdot)}} ; \tag{6}$$

2) для любых $\delta > 0$

$$\sup_{u \in B(0,\delta)} \|M_r f(\cdot + u) - M_r f\|_{C(\mathbb{R}^n)} \leq C_r \sup_{u \in B(0,\delta)} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_{M_p^{w(\cdot)}} . \tag{7}$$

Доказательство 1. Так как функция $w \in \Omega_{p\infty}$ не эквивалентна 0, то существует $r_0 > 0$ такое, что $\sup\limits_{r_0<\rho<\infty} w(\rho) > 0$. Пусть $0 < r \leq r_0$. Согласно неравенству Гельдера для любых $x \in \mathbb{R}^n$

$$|M_r f(x)| \leq \frac{1}{|B(x,r)|^{\frac{1}{p}}} \|f\|_{L_p(B(x,r))} .$$

Следовательно,

$$|M_r f(x)|\, w(\rho) \leq \frac{1}{(v_n r^n)^{\frac{1}{p}}} \left(w(\rho) \|f\|_{L_p(B(x,r))} \right),$$

где v_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$ и

$$|M_r f(x)| \sup_{r<\rho<\infty} w(\rho) \leq \frac{1}{(v_n r^n)^{\frac{1}{p}}} \left(\sup_{r<\rho<\infty} w(\rho) \|f\|_{L_p(B(x,r))} \right) \leq \frac{1}{(v_n r^n)^{\frac{1}{p}}} \left(\sup_{r<\rho<\infty} w(\rho) \|f\|_{L_p(B(x,\rho))} \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{(v_n r^n)^{\frac{1}{p}}} \left(\sup_{\rho>0} w(\rho) \|f\|_{L_p(B(x,\rho))} \right).$$

Поэтому для любых $x \in \mathbb{R}^n$

$$|M_r f(x)| \leq C_r \|f\|_{M_p^{w(\cdot)}}, \tag{8}$$

где $C_r = \left((\sup\limits_{r<\rho<\infty} w(\rho))(v_n r^n)^{\frac{1}{p}} \right)^{-1}$.

2. Далее, для любых $x_1, x_2 \in B(0,r)$

$$|(M_r f)(x_1) - (M_r f)(x_2)| = \frac{1}{v_n r^n} \left| \int\limits_{B(x_1,r)} f(y)dy - \int\limits_{B(x_2,r)} f(y)dy \right| =$$

$$= (v_n r^n)^{-1} \left| \int\limits_{B(0,r)} f(z+x_1)dz - \int\limits_{B(0,r)} f(z+x_2)dz \right| \leq$$

$$\leq (v_n r^n)^{-1} \int\limits_{B(0,r)} |f(z+x_1) - f(z+x_2)|\, dz =$$

$$= (v_n r^n)^{-1} \int\limits_{B(x_2,r)} |f(s+x_1-x_2) - f(s)|\, ds \leq$$

$$\leq (v_n r^n)^{-\frac{1}{p}} \|f(\cdot + x_1 - x_2) - f(\cdot)\|_{L_p(B(x_2,r))} .$$

Поэтому, аналогично первому шагу доказательства, получим вместо (8) неравенство

$$|(M_r f)(x_1) - (M_r f)(x_2)| \leq C_r \|f(\cdot + x_1 - x_2) - f(\cdot)\|_{M_p^{w(\cdot)}} .$$

Следовательно,

$$\sup_{x_1,x_2\in\mathbb{R}^n,\ |x_1-x_2|\leq\delta} |(M_r f)(x_1) - (M_r f)(x_2)| \leq C_r \sup_{x_1,x_2\in\mathbb{R}^n,\ |x_1-x_2|\leq\delta} \|f(\cdot + x_1 - x_2) - f(\cdot)\|_{M_p^{w(\cdot)}} =$$

$$= C_r \sup_{u\in B(0,\delta)} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_{M_p^{w(\cdot)}} .$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $w \in \Omega_{p\infty}$. Тогда существует $C > 0$, зависящее только от n, p, w, такое, что для любых $r, R > 0$ и любых $f, g \in M_p^{w(\cdot)}$ имеет место оценка

$$\|M_r f - M_r g\|_{M_p^{w(\cdot)}} \leq C \left(1 + R^{\frac{n}{p}} \right) \|M_r f - M_r g\|_{C\left(\overline{B(0,R)}\right)} +$$

$$+\sup_{u\in B(0,r)}\|f(\cdot+u)-f(\cdot)\|_{M_p^{w(\cdot)}}+\sup_{u\in B(0,r)}\|g(\cdot+u)-g(\cdot)\|_{M_p^{w(\cdot)}}+$$

$$+\left\|f\chi_{{}^cB(0,R)}\right\|_{M_p^{w(\cdot)}}+\left\|g\chi_{{}^cB(0,R)}\right\|_{M_p^{w(\cdot)}}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\|M_rf-M_rg\|_{M_p^{w(\cdot)}}\le\left\|(M_rf-M_rg)\,\chi_{B(0,R)}\right\|_{M_p^{w(\cdot)}}+\left\|(M_rf-M_rg)\,\chi_{{}^cB(0,R)}\right\|_{M_p^{w(\cdot)}}=I_1+I_2.$$

Далее,

$$I_1=\sup_{x\in\mathbb{R}^n,\ \rho>0}\Big(w(\rho)\,\|M_rf-M_rg\|_{L_p(B(x,\rho)\cap B(0,R))}\Big)\le$$

$$\le\sup_{x\in\mathbb{R}^n,\ 0<\rho<1}\Big(w(\rho)\,\|M_rf-M_rg\|_{L_p(B(x,\rho)\cap B(0,R))}\Big)+$$

$$+\sup_{x\in\mathbb{R}^n,\ 1\le\rho<\infty}\Big(w(\rho)\,\|M_rf-M_rg\|_{L_p(B(x,\rho)\cap B(0,R))}\Big)\le$$

$$\le\|M_rf-M_rg\|_{C(\overline{B(0,R)})}\cdot\left(\sup_{0<\rho<1}w(\rho)\,(v_n\rho^n)^{\frac{1}{p}}+\sup_{1\le\rho<\infty}w(\rho)\,(v_nR^n)^{\frac{1}{p}}\right)\le$$

$$\le C\left(1+R^{\frac{n}{p}}\right)\|M_rf-M_rg\|_{C(\overline{B(0,R)})},$$

где

$$C=v_n^{\frac{1}{p}}\left(\sup_{0<\rho<1}w(\rho)\rho^{\frac{n}{p}}+\sup_{1\le\rho<\infty}w(\rho)\right)<\infty,$$

так как $w\in\Omega_{p\infty}$.

Кроме того, согласно лемме 1

$$I_2\le\|M_rf-f\|_{M_p^{w(\cdot)}}+\left\|(f-g)\chi_{{}^cB(0,R)}\right\|_{M_p^{w(\cdot)}}+\|M_rg-g\|_{M_p^{w(\cdot)}}\le$$

$$\le\sup_{u\in B(0,r)}\|f(\cdot+u)-f(\cdot)\|_{M_p^{w(\cdot)}}+\sup_{u\in B(0,r)}\|g(\cdot+u)-g(\cdot)\|_{M_p^{w(\cdot)}}+$$

$$+\left\|f\chi_{{}^cB(0,R)}\right\|_{M_p^{w(\cdot)}}+\left\|g\chi_{{}^cB(0,R)}\right\|_{M_p^{w(\cdot)}},$$

откуда и следует искомое неравенство.

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Пусть $1\le p\le\infty$, $w\in\Omega_{p\infty}$. Тогда для любых $r,\ R>0$ и $f,\ g\in M_p^{w(\cdot)}$

$$\|f-g\|_{M_p^{w(\cdot)}}\le C\left(1+R^{\frac{n}{p}}\right)\|M_rf-M_rg\|_{C(\overline{B(0,R)})}+$$

$$+2\sup_{u\in B(0,r)}\|f(\cdot+u)-f(\cdot)\|_{M_p^{w}}+2\sup_{u\in B(0,r)}\|g(\cdot+u)-g(\cdot)\|_{M_p^{w(\cdot)}}+$$

$$+\left\|f\chi_{{}^cB(0,R)}\right\|_{M_p^{w}}+\left\|g\chi_{{}^cB(0,R)}\right\|_{M_p^{w}},\qquad(9)$$

где $C>0$ такое же, как и в лемме 4.

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$\|f-g\|_{M_p^{w(\cdot)}}\le\|M_rf-f\|_{M_p^{w(\cdot)}}+\|M_rf-M_rg\|_{M_p^{w(\cdot)}}+\|M_rg-g\|_{M_p^{w(\cdot)}},$$

и воспользоваться леммами 1 и 4.

Доказательство теоремы. Пусть $S\subset M_p^{w(\cdot)}$ и выполнены условия (1)–(3).

Шаг 1. Пусть $0<r<r_0$, где r_0 определено в лемме 3, и $R>0$ фиксированы. В силу неравенства (6) и условия (1) следует, что $\sup_{f\in S}\|M_rf\|_{C(\overline{B(0,R)})}<\infty$.

Кроме того, в силу неравенства (7) и условия (2), следует, что

$$\lim_{u\to 0}\sup_{f\in S}\|M_rf(\cdot+u)-M_rf(\cdot)\|_{C(\overline{B(0,R)})}=0.$$

Следовательно, по теореме Асколи-Арцела множество $S_r=\{M_rf:f\in S\}$ предкомпактно в $C(\overline{B(0,R)})$, или, что то же самое, множество S_r вполне ограничено, т.е. для любых $\varepsilon>0$ существуют $m\in\mathbb{N}$, $f_1,...,f_m\in S$ (зависящие от ε, r и R) такие, что для любых $f\in S$

$$\min_{j=1,\dots,m}\|M_rf-M_rf_j\|_{C(\overline{B(0,R)})}<\varepsilon.$$

Шаг 2. Пусть $\{\varphi_1,...,\varphi_m\}$ – произвольное конечное подмножество S. В силу неравенства (9) для любых $f\in S$ и любых $j=1,...,m$

$$\|f-\varphi_j\|_{M_p^w}\le C(1+R^{\frac{n}{p}})\,\|M_rf-M\varphi_j\|_{C(\overline{B(0,R)})}+$$

$$+2\sup_{u\in B(0,r)}\|f(\cdot+u)-f(\cdot)\|_{M_p^{w(\cdot)}}+2\sup_{u\in B(0,r)}\|\varphi_j(\cdot+u)-\varphi_j(\cdot)\|_{M_p^{w(\cdot)}}+$$

$$+\left\|f\chi_{{}^cB(0,R)}\right\|_{M_p^{w(\cdot)}}+\left\|\varphi_j\chi_{{}^cB(0,R)}\right\|_{M_p^{w(\cdot)}}\le$$

$$\le C(1+\mathbb{R}^{\frac{n}{p}})\,\|M_rf-M_r\varphi_j\|_{C(\overline{B(0,R)})}+4\sup_{u\in B(0,r)}\sup_{g\in S}\|g(\cdot+u)-g(\cdot)\|_{M_p^w}+2\sup_{g\in S}\left\|g\chi_{{}^cB(0,R)}\right\|_{M_p^w}.$$

Следовательно,

$$\min_{j=1,\dots,m}\|f-\varphi_j\|_{M_p^w}\le C(1+\mathbb{R}^{\frac{n}{p}})\min_{j=1,\dots,m}\|M_rf-M_r\varphi_j\|_{C(\overline{B(0,R)})}+$$

$$+4\sup_{u\in B(0,r)}\sup_{g\in S}\|g(\cdot+u)-g(\cdot)\|_{M_p^w}+2\sup_{g\in S}\left\|g\chi_{{}^cB(0,R)}\right\|_{M_p^w}. \qquad (10)$$

Шаг 3. Пусть $\varepsilon>0$. Во-первых, используя условие (3), мы находим такое $R(\varepsilon)>0$, что

$$\sup_{g\in S}\left\|g\chi_{{}^cB(0,R(\varepsilon))}\right\|_{M_p^w}<\frac{\varepsilon}{6}.$$

Далее, используя условие (2), мы находим такое $r(\varepsilon)$, что

$$\sup_{u\in B(0,r(\varepsilon))}\sup_{g\in S}\|g(\cdot+u)-g(\cdot)\|_{M_p^w}<\frac{\varepsilon}{12}.$$

И, наконец, в силу предкомпактности множества $S_{r(\varepsilon)}$ в $C(\overline{B(0,R(\varepsilon))})$ существуют такие $m(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ и $f_{1,\varepsilon},...,f_{m(\varepsilon),\varepsilon}\in S$, что для любых $f\in S$

$$\min_{j=1,\dots,m(\varepsilon)}\left\|M_{r(\varepsilon)}f-M_{r(\varepsilon)}f_{j,\varepsilon}\right\|_{C(\overline{B(0,R(\varepsilon))})}<\frac{\varepsilon}{3C(1+R(\varepsilon)^{\frac{n}{p}})}.$$

Следовательно, в силу неравенства (10) с $\varphi_j=f_{j,\varepsilon}, j=1,...,m(\varepsilon)$, для любых $f\in S$

$$\min_{j=1,\dots,m(\varepsilon)}\|f-f_{j,\varepsilon}\|_{M_p^w}<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Это означает, что множество S вполне ограничено в M_p^w, или, что то же самое, множество S предкомпактно в M_p^w, что и завершает доказательство теоремы.

Замечание. Условие (1) в теореме является необходимым, так как любое предкомпактное множество в нормированном пространстве является ограниченным.

Что касается условий (2) и (3), то они не являются необходимыми, во всяком случае при $n=1$ и $w(r)=r^{-\lambda},\ 0<\lambda<\frac{1}{p}$, так как множество S, состоящее только из одной функции $|x|^{\lambda-\frac{1}{p}}\in M_p^\lambda$, предкомпактно, но условия (2) и (3) не выполняются. Это следует из приводимого ниже примера.

Таким образом, вопрос о нахождении необходимых и достаточных условий предкомпактности множества $S \subset M_p^{w(\cdot)}$ остается открытым.

Пример. При $n = 1$ и $w(r) = r^{-\lambda},\ 1 \le p < \infty,\ 0 < \lambda < \frac{1}{p}$,

$$\left(M_r(|\cdot|^{\lambda-\frac{1}{p}})\right)(x) \nrightarrow |x|^{\lambda-\frac{1}{p}} \tag{11}$$

в M_p^λ при $r \to 0^+$;

$$|x+u|^{\lambda-\frac{1}{p}} \nrightarrow |x|^{\lambda-\frac{1}{p}} \tag{12}$$

в M_p^λ при $u \to 0$;

$$|x|^{\lambda-\frac{1}{p}}\chi_{{}^c B(0,r)}(x) \nrightarrow 0 \tag{13}$$

в M_p^λ при $r \to +\infty$.

Действительно, для $x > 0$ и $0 < r < x$

$$M_r(|\cdot|^{\lambda-\frac{1}{p}})(x) = \frac{1}{2r}\int\limits_{x-r}^{x+r} y^{\lambda-\frac{1}{p}}dy =$$

$$= \left(\lambda - \frac{1}{p} + 1\right)^{-1}\frac{1}{2r}\left((x+r)^{\lambda-\frac{1}{p}+1} - (x-r)^{\lambda-\frac{1}{p}+1}\right) =$$

$$= \left(\lambda - \frac{1}{p} + 1\right)^{-1}\frac{x^{\lambda-\frac{1}{p}+1}}{2r}\left[\left(1+\frac{r}{x}\right)^{\lambda-\frac{1}{p}+1} - \left(1-\frac{r}{x}\right)^{\lambda-\frac{1}{p}+1}\right];$$

$$M_r(|\cdot|^{\lambda-\frac{1}{p}})(x) - x^{\lambda-\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\lambda - \frac{1}{p} + 1\right)^{-1}\frac{x^{\lambda-\frac{1}{p}+1}}{2r}\left[\left(1+\frac{r}{x}\right)^{\lambda-\frac{1}{p}+1} - \left(1-\frac{r}{x}\right)^{\lambda-\frac{1}{p}+1} - 2\left(\lambda - \frac{1}{p} + 1\right)\frac{r}{x}\right].$$

Воспользовавшись неравенством*

$$(1+y)^\mu - (1-y)^\mu - 2\mu y \ge \frac{\mu(1-\mu)(2-\mu)}{3}y^3,$$

справедливым для любых $0 < \mu < 1$ и $0 < y < 1$, получим, полагая $\mu = \lambda - \frac{1}{p} + 1$ и $y = \frac{r}{x}$, что для некоторого $c > 0$, зависящего только от λ и p, для любых $0 < r < x$

$$M_r(|\cdot|^{\lambda-\frac{1}{p}})(x) - x^{\lambda-\frac{1}{p}} \ge c x^{\lambda-\frac{1}{p}}\left(\frac{r}{x}\right)^2.$$

Следовательно,

$$\left\|M_r(|\cdot|^{\lambda-\frac{1}{p}})(x) - |x|^{\lambda-\frac{1}{p}}\right\|_{M_p^\lambda} = \sup_{z\in\mathbb{R},\ r>0} r^{-\lambda}\left\|M_r(|\cdot|^{\lambda-\frac{1}{p}})(x) - |x|^{\lambda-\frac{1}{p}}\right\|_{L_p(z-r,z+r)} \ge$$

$$\ge r^{-\lambda}\left\|M_r(|\cdot|^{\lambda-\frac{1}{p}})(x) - |x|^{\lambda-\frac{1}{p}}\right\|_{L_p(2r,4r)} \ge c r^{-\lambda}\left\|x^{\lambda-\frac{1}{p}}\left(\frac{r}{x}\right)^2\right\|_{L_p(2r,4r)} \ge$$

*Действительно, согласно формуле Тейлора, существуют такие ξ, η, что $1 - x < \eta < 1 < \xi < 1 + x$ и

$$(1+y)^\mu - (1-y)^\mu - 2\mu x = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{6}x^3 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{24}\xi^{\mu-4}x^4 -$$

$$-\left(1 - \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2}x^2 - \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{6}x^3 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{24}\eta^{\mu-4}x^4\right) - 2\mu x =$$

$$= \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3}x^3 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{24}\left(\xi^{\mu-4} - \eta^{\mu-4}\right)x^4 \ge \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3}x^3.$$

$$\geq c\, r^{-\lambda}(4r)^{\lambda-\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{4}\right)^2(2r)^{\frac{1}{p}} = c\, 4^{\lambda-\frac{1}{p}-2}2^{\frac{1}{p}} > 0,$$

откуда следует (11). Из (11), согласно лемме 1, следует (12). Наконец,

$$\left\| |x|^{\lambda-\frac{1}{p}}\,\chi_{{}^c_{B(0,r)}}(x)\right\|_{M_p^\lambda} = \sup_{z\in\mathbb{R}^n,\ \rho>0}\left\| |x|^{\lambda-\frac{1}{p}}\,\chi_{{}^c_{B(0,r)}}(x)\right\|_{L_p(x-\rho,x+\rho)} \geq$$

$$\geq \sup_{\rho>r}\rho^{-\lambda}\left\| |x|^{\lambda-\frac{1}{p}}\right\|_{L_p((0,\rho)\cap(r,\infty))} = \sup_{\rho>r}\rho^{-\lambda}\left(nv_n\int\limits_r^\rho x^{\lambda p-1}dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq$$

$$\geq \lim_{\rho\to+\infty}\rho^{-\lambda}\left(\frac{nv_n}{\lambda p}\left(\rho^{\lambda p-1}-r^{\lambda p-1}\right)dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{nv_n}{\lambda p}\right)^{\frac{1}{p}},$$

откуда следует (13).

Данная работа выполнена при поддержке Государственного проекта 0085/PTSF-14, гранта Министерства образования и науки (проект 2709/ГФ4) и Российского научного фонда (проект 14-11-00443). Отметим, что результаты этой работы ранее без доказательства были опубликованы в [7].

Список литературы

1 *Burenkov V. I.* Recent progress in studying the bounded ness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces. I. // Eurasian Mathematical Journal. — 2012. — Vol. 3. — No. 3. — P. 11–32.

2 *Burenkov V.I.* Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces. II. // Eurasian Mathematical Journal. — 2013. — Vol. 4. — No. 1. — P. 21–45.

3 *Burenkov V.I., Guliyev H.V.* Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in the local Morrey-type spaces // Studia Mathematical. — 2004. — Vol. 163. — No. 2. — P. 157–176.

4 *Burenkov V.I., Jain P., Tararykova T.V.* On boundedness of the Hardy operator in local Morrey-type spaces // Eurasian Mathematical Journal. — 2011. — Vol. 2. — No. 1. — P. 52–80.

5 *Chen Y., Ding Y., Wang X.* Compactness of Commutators for singular integrals on Morrey spaces // Canad. J. Math. — 2012. — Vol. 64(2). — P. 257–281.

6 *Yosida K.* Functional Analysis. Springer-Verlag. — Berlin, 1978.

7 *Bokayev N.A., Burenkov V.I., Matin D.T.* On the pre-compactness of a set in the generalized Morrey spaces // AIP Conference Proceedings. — 2016. — Vol. 1759. — P. 020108-01–03.doi: 10.1063/1.4959722. — [ER]. Access mode: http://dx.doi.org/10.1063/1.4959722

Н.А. Бокаев, В.И. Буренков, Д.Т. Матин

Жалпыланған Морри кеңістігіндегі жиындардың жинақы болуының жеткілікті шарты туралы

Мақалада $M_p^{w(\cdot)}$ жалпыланған Морри кеңістігіндегі жиындардың жинақы болуының жеткілікті шарттары келтірілді. Дәлелденген теоремадан $w(r) = r^{-\lambda}$ болған жағдайда M_p^λ Морри кеңістігіне белгілі нәтиже шығады, ал $\lambda = 0$ жағдайда бұл жақсы белгілі Фреше-Колмогоров теоремасы. Алдымен, орталанған функциялардың жалпыланған Морри кеңістігінде бағалануы туралы бірнеше лемма дәлелденген. Бұл леммалардың өзіндік маңызы бар. Алынған шарттардың қажеттілігі талқыланды.

N.A. Bokayev, V.I. Burenkov, D.T. Matin

Sufficient conditions for pre-compactness of sets in the generalized Morrey spaces

In this paper, we present sufficient conditions for pre-compactness of sets in the generalized Morrey spaces $M_p^{w(\cdot)}$. From this theorem for the case of $w(r) = r^{-\lambda}$ follows the well-known result for the Morrey space M_p^{λ} and in the case of $\lambda = 0$ this is the well-known Frechet-Kolmogorov theorem. Pre proved some lemmas on the estimation of the average in the generalized Morrey space. These lemmas gives independent interest. It is discussed the necessity of the obtained conditions.